



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Ottimizzazione combinatoria

Esercizi 2 — Formulazioni dei problemi e loro proprietà

Esercizi svolti sui capitoli del volume 2, formulazioni dei problemi e loro proprietà:
ogni esercizio è seguito dalla sua soluzione completa.

Fabio Furini

fabiofurini.github.io

Dipartimento di Ingegneria informatica, automatica e gestionale — Sapienza Università di Roma

Versione online e materiale scaricabile:
fabiofurini.github.io/ottimizzazione-combinatoria/
github.com/fabiofurini/ottimizzazione-combinatoria

Anno accademico 2026–2027

Indice

9	Formulazioni dei problemi di zaino	2
9.1	Zaino: upper bound di Dantzig e di Martello-Toth	2
9.2	Modelli ILP delle varianti dello zaino	9
10	Formulazioni dei problemi di packing	16
11	Formulazioni dei problemi di colorazione	24
12	Formulazioni dei problemi di clique	32
13	Formulazioni dei problemi di routing	48
14	Formulazioni dei problemi di scheduling	58
15	Formulazioni dei problemi di lot sizing	64

Formulazioni dei problemi di zaino

9.1 Zaino: upper bound di Dantzig e di Martello-Toth

Upper bound usati in questi esercizi

I bound del [Capitolo 9 «Formulazioni dei problemi di zaino»](#), per un'istanza del KP con gli oggetti ordinati per efficienza non crescente. L'**oggetto critico** $s \in \mathcal{J}$ e la **capacità residua** rc sono

$$\sum_{j=1}^{s-1} w_j \leq c \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^s w_j > c, \quad rc = c - \sum_{j=1}^{s-1} w_j. \quad (\text{K1})$$

L'**upper bound di Dantzig** per $z(\text{ILP}_{\text{KP}})$ è

$$\text{UB}_D = \sum_{j=1}^{s-1} p_j + \left\lfloor p_s \frac{rc}{w_s} \right\rfloor. \quad (\text{K2})$$

L'**upper bound di Martello-Toth** per $z(\text{ILP}_{\text{KP}})$ è $\text{UB}_{\text{MT}} = \max\{\text{UB}_0, \text{UB}_1\}$, dove

$$\text{UB}_0 = \sum_{j=1}^{s-1} p_j + \left\lfloor rc \frac{p_{s+1}}{w_{s+1}} \right\rfloor \quad \text{e} \quad \text{UB}_1 = \sum_{j=1}^{s-1} p_j + \left\lfloor p_s - (w_s - rc) \frac{p_{s-1}}{w_{s-1}} \right\rfloor. \quad (\text{K3})$$

Esercizio 9.1 — Upper bound per il problema dello zaino 0/1 (1)

Consideriamo uno zaino di capacità $c = 11$ e un insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ di 5 oggetti ($n = 5$) con i seguenti profitti e pesi:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$
p_j	8	6	14	6	2
w_j	3	3	9	5	2

Domande

1. Verificare se gli oggetti sono ordinati per efficienza non crescente, altrimenti ordinarli in questo modo.
2. Calcolare gli upper bound di Dantzig e di Martello-Toth e determinare quale dei due è più forte per questa istanza del KP.

Soluzione

Usiamo l'oggetto critico e la capacità residua (K1), il bound di Dantzig (K2) e il bound di Martello-Toth (K3) del box all'inizio del capitolo.

1. Gli oggetti sono ordinati per efficienza non crescente, poiché abbiamo:

$$\frac{8}{3} \geq \frac{6}{3} \geq \frac{14}{9} \geq \frac{6}{5} \geq \frac{2}{2}$$

2. L'oggetto critico è $s = 3$ poiché:

$$\sum_{j=1}^2 w_j = 3 + 3 = 6 \leq 11 \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^3 w_j = 3 + 3 + 9 = 15 > 11$$

e la capacità residua è:

$$rc = c - \sum_{j=1}^2 w_j = 11 - 3 - 3 = 5$$

L'upper bound di Dantzig è:

$$UB_D = \sum_{j=1}^2 p_j + \left\lfloor p_3 \frac{rc}{w_3} \right\rfloor = 8 + 6 + \left\lfloor 14 \frac{5}{9} \right\rfloor = 14 + \left\lfloor \frac{70}{9} \right\rfloor = 21$$

L'upper bound di Martello-Toth è:

$$UB_0 = \sum_{j=1}^2 p_j + \left\lfloor rc \frac{p_4}{w_4} \right\rfloor = 8 + 6 + \left\lfloor 5 \frac{6}{5} \right\rfloor = 14 + 6 = 20$$

$$UB_1 = \sum_{j=1}^2 p_j + \left\lfloor p_3 - (w_3 - rc) \frac{p_2}{w_2} \right\rfloor = 8 + 6 + \left\lfloor 14 - (9 - 5) \frac{6}{3} \right\rfloor = 14 + 6 = 20$$

$$UB_{MT} = \max \left\{ UB_0, UB_1 \right\} = \max \left\{ 20, 20 \right\} = 20$$

Per questa istanza del KP, l'upper bound di Martello-Toth è più forte dell'upper bound di Dantzig, poiché abbiamo:

$$UB_{MT} < UB_D$$

Esercizio 9.2 — Upper bound per il problema dello zaino 0/1 (2)

Consideriamo uno zaino di capacità $c = 8$ e un insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4\}$ di 4 oggetti ($n = 4$) con i seguenti profitti e pesi:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
p_j	40	42	25	12
w_j	4	7	5	3

Domande

1. Verificare se gli oggetti sono ordinati per efficienza non crescente, altrimenti ordinarli in questo modo.
2. Calcolare gli upper bound di Dantzig e di Martello-Toth e determinare quale dei due è più forte per questa istanza del KP.

Soluzione

Usiamo l'oggetto critico e la capacità residua (K1), il bound di Dantzig (K2) e il bound di Martello-Toth (K3) del box all'inizio del capitolo.

1. Gli oggetti sono ordinati per efficienza non crescente, poiché abbiamo:

$$\frac{40}{4} \geq \frac{42}{7} \geq \frac{25}{5} \geq \frac{12}{3}$$

2. L'oggetto critico è $s = 2$ poiché:

$$w_1 = 4 \leq 8 \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^2 w_j = 4 + 7 = 11 > 8$$

e la capacità residua è:

$$rc = c - w_1 = 8 - 4 = 4$$

L'upper bound di Dantzig è:

$$UB_D = p_1 + \left\lfloor p_2 \frac{rc}{w_2} \right\rfloor = 40 + \left\lfloor 42 \frac{4}{7} \right\rfloor = 40 + \lfloor 24 \rfloor = 64$$

L'upper bound di Martello-Toth è:

$$UB_0 = p_1 + \left\lfloor rc \frac{p_3}{w_3} \right\rfloor = 40 + \left\lfloor 4 \frac{25}{5} \right\rfloor = 40 + \lfloor 20 \rfloor = 60$$

$$UB_1 = p_1 + \left\lfloor p_2 - (w_2 - rc) \frac{p_1}{w_1} \right\rfloor = 40 + \left\lfloor 42 - (7 - 4) \frac{40}{4} \right\rfloor = 40 + \lfloor 12 \rfloor = 52$$

$$UB_{MT} = \max \left\{ UB_0, UB_1 \right\} = \max \left\{ 60, 52 \right\} = 60$$

Per questa istanza del KP, l'upper bound di Martello-Toth è più forte dell'upper bound di Dantzig, poiché abbiamo:

$$UB_{MT} < UB_D$$

Esercizio 9.3 — Upper bound per il problema dello zaino 0/1 (3)

Consideriamo uno zaino di capacità $c = 15$ e un insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4\}$ di 4 oggetti ($n = 4$) con i seguenti profitti e pesi:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
p_j	24	17	12	6
w_j	10	8	6	5

Domande

1. Verificare se gli oggetti sono ordinati per efficienza non crescente, altrimenti ordinarli in questo modo.
2. Calcolare gli upper bound di Dantzig e di Martello-Toth e determinare quale dei due è più forte per questa istanza del KP.

Soluzione

Usiamo l'oggetto critico e la capacità residua (K1), il bound di Dantzig (K2) e il bound di Martello-Toth (K3) del box all'inizio del capitolo.

1. Gli oggetti sono ordinati per efficienza non crescente, poiché abbiamo:

$$\frac{24}{10} \geq \frac{17}{8} \geq \frac{12}{6} \geq \frac{6}{5}$$

2. L'oggetto critico è $s = 2$ poiché:

$$w_1 = 10 \leq 15 \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^2 w_j = 10 + 8 = 18 > 15$$

e la capacità residua è:

$$rc = c - w_1 = 15 - 10 = 5$$

L'upper bound di Dantzig è:

$$UB_D = p_1 + \left\lfloor p_2 \frac{rc}{w_2} \right\rfloor = 24 + \left\lfloor 17 \frac{5}{8} \right\rfloor = 24 + \left\lfloor \frac{85}{8} \right\rfloor = 34$$

L'upper bound di Martello-Toth è:

$$UB_0 = p_1 + \left\lfloor rc \frac{p_3}{w_3} \right\rfloor = 24 + \left\lfloor 5 \frac{12}{6} \right\rfloor = 24 + \lfloor 10 \rfloor = 34$$

$$UB_1 = p_1 + \left\lfloor p_2 - (w_2 - rc) \frac{p_1}{w_1} \right\rfloor = 24 + \left\lfloor 17 - (8 - 5) \frac{24}{10} \right\rfloor = 24 + \left\lfloor \frac{49}{5} \right\rfloor = 33$$

$$UB_{MT} = \max \left\{ UB_0, UB_1 \right\} = \max \left\{ 34, 33 \right\} = 34$$

Per questa istanza del KP, l'upper bound di Martello-Toth è forte quanto l'upper bound di Dantzig, poiché abbiamo:

$$UB_{MT} = UB_D$$

Esercizio 9.4 — Upper bound per il problema dello zaino 0/1 (4)

Consideriamo uno zaino di capacità $c = 9$ e un insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ di 6 oggetti ($n = 6$) con i seguenti profitti e pesi:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$
p_j	6	5	8	9	6	7
w_j	2	3	6	7	5	9

Domande

1. Verificare se gli oggetti sono ordinati per efficienza non crescente, altrimenti ordinarli in questo modo.

2. Calcolare gli upper bound di Dantzig e di Martello-Toth e determinare quale dei due è più forte per questa istanza del KP.

Soluzione

Usiamo l'oggetto critico e la capacità residua (K1), il bound di Dantzig (K2) e il bound di Martello-Toth (K3) del box all'inizio del capitolo.

1. Gli oggetti sono ordinati per efficienza non crescente, poiché abbiamo:

$$\frac{6}{2} \geq \frac{5}{3} \geq \frac{8}{6} \geq \frac{9}{7} \geq \frac{6}{5} \geq \frac{7}{9}$$

2. L'oggetto critico è $s = 3$ poiché:

$$\sum_{j=1}^2 w_j = 2 + 3 = 5 \leq 9 \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^3 w_j = 2 + 3 + 6 = 11 > 9$$

e la capacità residua è:

$$rc = c - \sum_{j=1}^2 w_j = 9 - 2 - 3 = 4$$

L'upper bound di Dantzig è:

$$UB_D = \sum_{j=1}^2 p_j + \left\lfloor p_3 \frac{rc}{w_3} \right\rfloor = 6 + 5 + \left\lfloor 8 \frac{4}{6} \right\rfloor = 11 + \left\lfloor \frac{16}{3} \right\rfloor = 16$$

L'upper bound di Martello-Toth è:

$$UB_0 = \sum_{j=1}^2 p_j + \left\lfloor rc \frac{p_4}{w_4} \right\rfloor = 6 + 5 + \left\lfloor 4 \frac{9}{7} \right\rfloor = 11 + \left\lfloor \frac{36}{7} \right\rfloor = 16$$

$$UB_1 = \sum_{j=1}^2 p_j + \left\lfloor p_3 - (w_3 - rc) \frac{p_2}{w_2} \right\rfloor = 6 + 5 + \left\lfloor 8 - (6 - 4) \frac{5}{3} \right\rfloor = 11 + \left\lfloor \frac{14}{3} \right\rfloor = 15$$

$$UB_{MT} = \max \left\{ UB_0, UB_1 \right\} = \max \left\{ 16, 15 \right\} = 16$$

Per questa istanza del KP, l'upper bound di Martello-Toth è forte quanto l'upper bound di Dantzig, poiché abbiamo:

$$UB_{MT} = UB_D$$

Esercizio 9.5 — Upper bound per il problema dello zaino 0/1 (5)

Consideriamo uno zaino di capacità $c = 21$ e un insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ di 6 oggetti ($n = 6$) con i seguenti profitti e pesi:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$
p_j	24	25	13	10	9	2
w_j	2	6	8	7	10	3

Domande

1. Verificare se gli oggetti sono ordinati per efficienza non crescente, altrimenti ordinarli in questo modo.
2. Calcolare gli upper bound di Dantzig e di Martello-Toth e determinare quale dei due è più forte per questa istanza del KP.

Soluzione

Usiamo l'oggetto critico e la capacità residua (K1), il bound di Dantzig (K2) e il bound di Martello-Toth (K3) del box all'inizio del capitolo.

1. Gli oggetti sono ordinati per efficienza non crescente, poiché abbiamo:

$$\frac{24}{2} \geq \frac{25}{6} \geq \frac{13}{8} \geq \frac{10}{7} \geq \frac{9}{10} \geq \frac{2}{3}$$

2. L'oggetto critico è $s = 4$ poiché:

$$\sum_{j=1}^3 w_j = 2 + 6 + 8 = 16 \leq 21 \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^4 w_j = 2 + 6 + 8 + 7 = 23 > 21$$

e la capacità residua è:

$$rc = c - \sum_{j=1}^3 w_j = 21 - 2 - 6 - 8 = 5$$

L'upper bound di Dantzig è:

$$UB_D = \sum_{j=1}^3 p_j + \left\lfloor p_4 \frac{rc}{w_4} \right\rfloor = 24 + 25 + 13 + \left\lfloor 10 \frac{5}{7} \right\rfloor = 62 + \left\lfloor \frac{50}{7} \right\rfloor = 69$$

L'upper bound di Martello-Toth è:

$$UB_0 = \sum_{j=1}^3 p_j + \left\lfloor rc \frac{p_5}{w_5} \right\rfloor = 24 + 25 + 13 + \left\lfloor 5 \frac{9}{10} \right\rfloor = 62 + \left\lfloor \frac{9}{2} \right\rfloor = 66$$

$$\begin{aligned} UB_1 &= \sum_{j=1}^3 p_j + \left\lfloor p_4 - (w_4 - rc) \frac{p_3}{w_3} \right\rfloor \\ &= 24 + 25 + 13 + \left\lfloor 10 - (7 - 5) \frac{13}{8} \right\rfloor = 62 + \left\lfloor \frac{27}{4} \right\rfloor = 68 \end{aligned}$$

$$UB_{MT} = \max \left\{ UB_0, UB_1 \right\} = \max \left\{ 66, 68 \right\} = 68$$

Per questa istanza del KP, l'upper bound di Martello-Toth è più forte dell'upper bound di Dantzig, poiché abbiamo:

$$UB_{MT} < UB_D$$

9.2 Modelli ILP delle varianti dello zaino

Esercizio 9.6 — Modello PLI del problema del subset sum

Il problema del subset sum (SSP) e il suo modello ILP_{SSP} sono nel [Capitolo 9 «Formulazioni dei problemi di zaino»](#). Consideriamo un valore obiettivo $c = 16$ e un insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, \dots, 6\}$ di 6 oggetti ($n = 6$), con i seguenti pesi:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$
w_j	2	4	5	8	9	13

Domande

1. Scrivere il modello ILP_{SSP} del capitolo per questa istanza.
2. Risolvere il modello con Gurobi. Dare il valore ottimo, una soluzione ottima e la soluzione associata del SSP, e dire se la soluzione ottima è unica.

Soluzione

1. Il modello ha 6 variabili binarie e un vincolo lineare (oltre ai domini delle variabili). Il modello ILP_{SSP} per questa istanza è:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 8x_4 + 9x_5 + 13x_6 \\ \text{soggetto a} \quad & 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 8x_4 + 9x_5 + 13x_6 \leq 16 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5, \quad x_6 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

2. Gurobi restituisce il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{SSP}}) = 16$. Una soluzione ottima è

$$\tilde{x}_1 = 1, \tilde{x}_2 = 0, \tilde{x}_3 = 1, \tilde{x}_4 = 0, \tilde{x}_5 = 1, \tilde{x}_6 = 0$$

Gli oggetti selezionati hanno peso totale $2 + 5 + 9 = 16$. Poiché $z(\text{ILP}_{\text{SSP}}) = c = 16$, la risposta al SSP è **sì**, con il sottoinsieme $\tilde{S} = \{1, 3, 5\}$.

Enumerando i 22 sottoinsiemi di peso al più 16 si vede che $\tilde{S}$ è l'unico sottoinsieme di peso esattamente 16: la soluzione ottima è unica.

Esercizio 9.7 — Modello PLI del problema dello zaino limitato

Il problema dello zaino limitato (BKP) e il suo modello ILP_{BKP} sono nel [Capitolo 9 «Formulazioni dei problemi di zaino»](#). Consideriamo uno zaino di capacità $c = 18$ e un insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, \dots, 5\}$ di 5 oggetti ($n = 5$), con i seguenti profitti, pesi e copie disponibili:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$
p_j	5	12	11	7	4
w_j	5	7	3	3	8
b_j	3	2	3	2	2

Domande

1. Scrivere il modello ILP_{BKP} del capitolo per questa istanza.
2. Risolvere il modello con Gurobi. Dare il valore ottimo, una soluzione ottima e la soluzione associata del BKP, e dire se la soluzione ottima è unica.

Soluzione

1. Il modello ha 5 variabili intere e un vincolo lineare (oltre ai domini delle variabili). Il modello ILP_{BKP} per questa istanza è:

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 12x_2 + 11x_3 + 7x_4 + 4x_5 \\ \text{soggetto a} \quad & 5x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 8x_5 \leq 18 \\ & x_1, \quad \quad \quad x_3 \quad \quad \quad \in \{0, 1, 2, 3\} \\ & \quad \quad \quad x_2, \quad \quad \quad x_4, \quad \quad x_5 \in \{0, 1, 2\} \end{aligned}$$

2. Gurobi restituisce il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{BKP}}) = 47$. Una soluzione ottima è

$$\tilde{x}_1 = 0, \tilde{x}_2 = 0, \tilde{x}_3 = 3, \tilde{x}_4 = 2, \tilde{x}_5 = 0$$

Prende tre copie dell'oggetto 3 e due copie dell'oggetto 4: il peso totale è $3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 15 \leq 18$ e ogni $\tilde{x}_j$ è al più b_j .

Enumerando i 68 vettori ammissibili di copie si vede che la soluzione ottima è unica.

Esercizio 9.8 — Modello PLI del problema dello zaino illimitato

Il problema dello zaino illimitato (UKP) e il suo modello ILP_{UKP} sono nel [Capitolo 9 «Formulazioni dei problemi di zaino»](#). Consideriamo uno zaino di capacità $c = 19$ e un insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, \dots, 5\}$ di 5 oggetti ($n = 5$), ciascuno disponibile in un numero illimitato di copie, con i seguenti profitti e pesi:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$
p_j	4	9	7	5	8
w_j	4	5	6	6	9

Domande

1. Scrivere il modello ILP_{UKP} del capitolo per questa istanza.
2. Risolvere il modello con Gurobi. Dare il valore ottimo, una soluzione ottima e la soluzione associata dell'UKP, e dire se la soluzione ottima è unica.

Soluzione

1. Il modello ha 5 variabili intere e un vincolo lineare (oltre ai domini delle variabili). Il modello ILP_{UKP} per questa istanza è:

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 8x_5 \\ \text{soggetto a} \quad & 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 9x_5 \leq 19 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{aligned}$$

2. Gurobi restituisce il valore ottimo $z(ILP_{UKP}) = 31$. Una soluzione ottima è

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 3, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 0$$

Prende una copia dell'oggetto 1 e tre copie dell'oggetto 2: il peso totale è $1 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 19 \leq 19$.

Il vincolo di capacità dà $x_j \leq \hat{b}_j = \lfloor c/w_j \rfloor$, cioè $\hat{b}_1 = 4$, $\hat{b}_2 = 3$, $\hat{b}_3 = 3$, $\hat{b}_4 = 3$, $\hat{b}_5 = 2$. Enumerando i 54 vettori ammissibili di copie entro questi limiti si vede che la soluzione ottima è unica.

Esercizio 9.9 — Modello PLI del problema dello zaino multidimensionale

Il problema dello zaino multidimensionale (MDKP) e il suo modello ILP_{MDKP} sono nel [Capitolo 9 «Formulazioni dei problemi di zaino»](#). Consideriamo uno zaino a 2 dimensioni ($k = 2$) con capacità $c_1 = 17$ e $c_2 = 14$, e un insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, \dots, 5\}$ di 5 oggetti ($n = 5$), con i seguenti profitti e pesi:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$
p_j	10	8	11	6	9
w_{1j}	9	9	3	6	3
w_{2j}	5	5	2	3	9

Domande

1. Scrivere il modello ILP_{MDKP} del capitolo per questa istanza.
2. Risolvere il modello con Gurobi. Dare il valore ottimo, una soluzione ottima e la soluzione associata del MDKP, e dire se la soluzione ottima è unica.

Soluzione

1. Il modello ha 5 variabili binarie e $k = 2$ vincoli lineari, uno per ogni dimensione (oltre ai domini delle variabili). Il modello ILP_{MDKP} per questa istanza è:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 10x_1 + 8x_2 + 11x_3 + 6x_4 + 9x_5 \\
 \text{soggetto a} \quad & 9x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 3x_5 \leq 17 \\
 & 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 9x_5 \leq 14 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

2. Gurobi restituisce il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{MDKP}}) = 26$. Una soluzione ottima è

$$\tilde{x}_1 = 0, \quad \tilde{x}_2 = 0, \quad \tilde{x}_3 = 1, \quad \tilde{x}_4 = 1, \quad \tilde{x}_5 = 1$$

Il sottoinsieme associato è $\tilde{S} = \{3, 4, 5\}$, con peso $12 \leq 17$ nella dimensione 1 e $14 \leq 14$ nella dimensione 2.

Enumerando i 16 sottoinsiemi ammissibili si vede che la soluzione ottima è unica.

Esercizio 9.10 — Modello PLI del problema degli zaini multipli

Il problema degli zaini multipli (MKP) e il suo modello ILP_{MKP} sono nel [Capitolo 9 «Formulazioni dei problemi di zaino»](#). Consideriamo $m = 2$ zaini con capacità $c_1 = 12$ e $c_2 = 14$, e un insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, \dots, 5\}$ di 5 oggetti ($n = 5$), con i seguenti profitti e pesi:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$
p_j	10	12	6	4	9
w_j	9	4	5	7	8

Domande

1. Scrivere il modello ILP_{MKP} del capitolo per questa istanza.
2. Risolvere il modello con Gurobi. Dare il valore ottimo, una soluzione ottima e la soluzione associata del MKP, e dire se la soluzione ottima è unica.

Soluzione

1. Il modello ha $nm = 10$ variabili binarie, $m = 2$ vincoli di capacità e $n = 5$ vincoli di assegnamento (oltre ai domini delle variabili). Con così tante variabili scriviamo un vincolo per riga. Il modello ILP_{MKP} per questa istanza è:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 10x_{11} + 12x_{21} + 6x_{31} + 4x_{41} + 9x_{51} \\
 & + 10x_{12} + 12x_{22} + 6x_{32} + 4x_{42} + 9x_{52} \\
 \text{soggetto a} \quad & 9x_{11} + 4x_{21} + 5x_{31} + 7x_{41} + 8x_{51} \leq 12 \\
 & 9x_{12} + 4x_{22} + 5x_{32} + 7x_{42} + 8x_{52} \leq 14 \\
 & x_{11} + x_{12} \leq 1 \\
 & x_{21} + x_{22} \leq 1 \\
 & x_{31} + x_{32} \leq 1 \\
 & x_{41} + x_{42} \leq 1 \\
 & x_{51} + x_{52} \leq 1 \\
 & x_{11}, x_{21}, x_{31}, \dots, x_{52} \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

2. Gurobi restituisce il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{MKP}}) = 37$. Una soluzione ottima è

$$\tilde{x}_{21} = 1, \tilde{x}_{51} = 1, \tilde{x}_{12} = 1, \tilde{x}_{32} = 1,$$

con tutte le altre variabili pari a 0. La soluzione associata del MKP è $(\tilde{S}_1, \tilde{S}_2) = (\{2, 5\}, \{1, 3\})$: lo zaino 1 ha peso $4 + 8 = 12 \leq 12$, lo zaino 2 ha peso $9 + 5 = 14 \leq 14$, e l'oggetto 4 resta fuori.

Enumerando i 81 assegnamenti ammissibili degli oggetti agli zaini si vede che la soluzione ottima è unica.

Esercizio 9.11 — Modello PLI del problema dello zaino a scelta multipla

Il problema dello zaino a scelta multipla (MCKP) e il suo modello ILP_{MCKP} sono nel [Capitolo 9 «Formulazioni dei problemi di zaino»](#). Consideriamo uno zaino di capacità $c = 14$ e un insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, \dots, 7\}$ di 7 oggetti ($n = 7$), partizionato in $q = 3$ classi $\mathcal{J}_1 = \{1, 2\}$, $\mathcal{J}_2 = \{3, 4, 5\}$ e $\mathcal{J}_3 = \{6, 7\}$, con i seguenti profitti e pesi:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$	$j = 7$
p_j	6	4	12	7	11	12	6
w_j	6	6	4	3	6	3	8

Domande

1. Scrivere il modello ILP_{MCKP} del capitolo per questa istanza.
2. Risolvere il modello con Gurobi. Dare il valore ottimo, una soluzione ottima e la soluzione associata del MCKP, e dire se la soluzione ottima è unica.

Soluzione

1. Il modello ha 7 variabili binarie, un vincolo di capacità e $q = 3$ vincoli di classe (oltre ai domini delle variabili). Il modello ILP_{MCKP} per questa istanza è:

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 4x_2 + 12x_3 + 7x_4 + 11x_5 + 12x_6 + 6x_7 \\ \text{soggetto a} \quad & 6x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 6x_5 + 3x_6 + 8x_7 \leq 14 \\ & x_1 + x_2 = 1 \\ & x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ & x_6 + x_7 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

2. Gurobi restituisce il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{MCKP}}) = 30$. Una soluzione ottima è

$$\tilde{x}_1 = 1, \tilde{x}_2 = 0, \tilde{x}_3 = 1, \tilde{x}_4 = 0, \tilde{x}_5 = 0, \tilde{x}_6 = 1, \tilde{x}_7 = 0$$

Il sottoinsieme associato è $\tilde{S} = \{1, 3, 6\}$: un oggetto per classe, con peso totale $6 + 4 + 3 = 13 \leq 14$.

Solo 4 delle 12 scelte di un oggetto per classe entrano nello zaino; enumerandole si vede che la soluzione ottima è unica.

Esercizio 9.12 — Modello PLI del problema dello zaino con setup

Il problema dello zaino con setup (KPS) e il suo modello ILP_{KPS} sono nel [Capitolo 9 «Formulazioni dei problemi di zaino»](#). Consideriamo uno zaino di capacità $c = 19$ e un insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, \dots, 6\}$ di 6 oggetti ($n = 6$), partizionato in $q = 2$ classi $\mathcal{J}_1 = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{J}_2 = \{4, 5, 6\}$, con costi di setup $f_1 = 4$, $f_2 = 2$, pesi di setup $s_1 = 1$, $s_2 = 4$, e i seguenti ricavi e pesi:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$
p_j	4	3	8	5	4	11
w_j	7	6	3	6	7	4

Domande

1. Scrivere il modello ILP_{KPS} del capitolo per questa istanza.
2. Risolvere il modello con Gurobi. Dare il valore ottimo, una soluzione ottima e la soluzione associata del KPS, e dire se la soluzione ottima è unica.

Soluzione

1. Il modello ha 6 variabili x_j , $q = 2$ variabili y_h , un vincolo di capacità e $n = 6$ vincoli di collegamento $x_j \leq y_h$, scritti come $x_j - y_h \leq 0$ (oltre ai domini delle variabili). Il modello ILP_{KPS} per questa istanza è:

$$\begin{array}{llllllll}
 \max & 4x_1 & +3x_2 & +8x_3 & +5x_4 & +4x_5 & +11x_6 & -4y_1 & -2y_2 \\
 \text{soggetto a} & 7x_1 & +6x_2 & +3x_3 & +6x_4 & +7x_5 & +4x_6 & +y_1 & +4y_2 \leq 19 \\
 & x_1 & & & & & & -y_1 & \leq 0 \\
 & & x_2 & & & & & -y_1 & \leq 0 \\
 & & & x_3 & & & & -y_1 & \leq 0 \\
 & & & & x_4 & & & -y_2 & \leq 0 \\
 & & & & & x_5 & & -y_2 & \leq 0 \\
 & & & & & & x_6 & -y_2 & \leq 0 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & & \in \{0,1\} \\
 & & & & & & & y_1, & y_2 \in \{0,1\}
 \end{array}$$

2. Gurobi restituisce il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{KPS}}) = 18$. Una soluzione ottima è

$$\tilde{x}_1 = 0, \quad \tilde{x}_2 = 0, \quad \tilde{x}_3 = 1, \quad \tilde{x}_4 = 1, \quad \tilde{x}_5 = 0, \quad \tilde{x}_6 = 1, \quad \tilde{y}_1 = 1, \quad \tilde{y}_2 = 1$$

Il sottoinsieme associato è $\tilde{S} = \{3, 4, 6\}$, che attiva entrambe le classi: il peso totale è $3 + 6 + 4 + 1 + 4 = 18 \leq 19$, e il valore è $8 + 5 + 11 - 4 - 2 = 18$.

Enumerando i 27 sottoinsiemi ammissibili si vede che la soluzione ottima è unica.

Formulazioni dei problemi di packing

Formulazioni usate in questi esercizi. Il modello ILP_{BPP} del capitolo [Formulazioni dei problemi di packing](#), con l'insieme dei contenitori $\mathcal{B} = \{1, \dots, m\}$:

$$\min \sum_{b \in \mathcal{B}} y_b \quad (\text{B0})$$

$$\text{soggetto a } \sum_{b \in \mathcal{B}} x_{jb} = 1, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \quad (\text{B1})$$

$$- \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j x_{jb} + c y_b \geq 0, \quad \forall b \in \mathcal{B}, \quad (\text{B2})$$

$$x_{jb} \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \forall b \in \mathcal{B}, \quad (\text{B3})$$

$$y_b \in \{0, 1\}, \quad \forall b \in \mathcal{B}. \quad (\text{B4})$$

I rilassamenti LP-0_{BPP} e LP_{BPP} del capitolo rilassano (B3) e (B4) in $x_{jb} \geq 0$ e $y_b \geq 0$, con anche $y_b \leq 1$ in LP_{BPP}. Per ogni istanza e ogni m valido i due rilassamenti hanno lo stesso valore ottimo

$$z(\text{LP-0}_{\text{BPP}}) = z(\text{LP}_{\text{BPP}}) = \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j}{c}, \quad (\text{B5})$$

raggiunto da $\tilde{x}_{jb} = \frac{1}{m}$ e $\tilde{y}_b = \frac{\sum_j w_j}{m c}$; una soluzione duale ottima è $\tilde{\mu}_j = \frac{w_j}{c}$ e $\tilde{\pi}_b = \frac{1}{c}$ (e $\tilde{\lambda}_b = 0$ per LP_{BPP}).

Esercizio 10.1 — Modello PLI del problema del bin packing (1)

Consideriamo contenitori di capacità $c = 10$ e un insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, \dots, 5\}$ di 5 oggetti ($n = 5$), con i seguenti pesi degli oggetti:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$
w_j	6	5	4	3	2

Gli schemi di riempimento $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$ e $\{5\}$ formano una soluzione ammissibile.

Domande

1. Spiegare perché $m = 3$ è un upper bound valido sul numero di contenitori usati in una qualunque soluzione ottima.

2. Contare le variabili e i vincoli (oltre ai domini delle variabili) del modello ILP_{BPP} con $m = 3$.
3. Scrivere il modello ILP_{BPP} con $m = 3$ per questa istanza.
4. Risolvere il modello con Gurobi. Dare il valore ottimo, una soluzione ottima e gli schemi di riempimento associati, e dire se la soluzione ottima è unica.

Soluzione

1. Gli schemi di riempimento dati hanno pesi 9, 9 e 2, tutti al più $c = 10$: formano una soluzione ammissibile con 3 contenitori. Quindi $z(\text{ILP}_{\text{BPP}}) \leq 3$, e $m = 3$ è un upper bound valido.
2. Ci sono $m n = 3 \cdot 5 = 15$ variabili di assegnamento x_{jb} e $m = 3$ variabili di attivazione y_b , quindi 18 variabili binarie. Ci sono $n = 5$ vincoli di assegnamento e $m = 3$ vincoli di capacità, quindi 8 vincoli lineari.
3. Con $\mathcal{B} = \{1, 2, 3\}$ il modello ILP_{BPP} è:

$$\begin{array}{ll}
 \min & y_1 + y_2 + y_3 \\
 \text{soggetto a} & x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1 \\
 & x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1 \\
 & x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1 \\
 & x_{41} + x_{42} + x_{43} = 1 \\
 & x_{51} + x_{52} + x_{53} = 1 \\
 & -6x_{11} - 5x_{21} - 4x_{31} - 3x_{41} - 2x_{51} + 10y_1 \geq 0 \\
 & -6x_{12} - 5x_{22} - 4x_{32} - 3x_{42} - 2x_{52} + 10y_2 \geq 0 \\
 & -6x_{13} - 5x_{23} - 4x_{33} - 3x_{43} - 2x_{53} + 10y_3 \geq 0 \\
 & x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots, x_{53} \in \{0, 1\} \\
 & y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}
 \end{array}$$

4. Gurobi restituisce il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{BPP}}) = 2$. Il lower bound $\lceil \frac{6+5+4+3+2}{10} \rceil = 2$ lo conferma. Una soluzione ottima è

$$\tilde{x}_{11} = 1, \tilde{x}_{31} = 1, \tilde{x}_{22} = 1, \tilde{x}_{42} = 1, \tilde{x}_{52} = 1, \tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = 1, \tilde{y}_3 = 0,$$

con tutte le altre variabili pari a 0. Gli schemi di riempimento sono $\tilde{P}_1 = \{1, 3\}$ (peso 10) e $\tilde{P}_2 = \{2, 4, 5\}$ (peso 10).

La partizione degli oggetti è unica: l'oggetto 1 può condividere un contenitore solo con un peso al più 4, e solo $\{1, 3\}$ lascia un secondo contenitore di peso al più 10. La soluzione ottima del modello non è unica: i due schemi possono andare in due qualunque dei 3 contenitori, il che dà $3 \cdot 2 = 6$ soluzioni ottime.

Esercizio 10.2 — Rilassamenti lineari del modello del BPP (1)

Consideriamo contenitori di capacità $c = 12$ e un insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, \dots, 5\}$ di 5 oggetti ($n = 5$), con i seguenti pesi degli oggetti:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$
w_j	7	6	5	4	3

Usiamo $m = 3$ contenitori: gli schemi di riempimento $\{1, 3\}$, $\{2, 4\}$ e $\{5\}$ sono ammissibili.

Domande

1. Risolvere i due rilassamenti lineari $LP-0_{BPP}$ e LP_{BPP} con Gurobi e confrontarne i valori ottimi con la formula (B5).
2. Scrivere la soluzione primale e la soluzione duale date dal capitolo per questa istanza, e verificare che sono ammissibili e hanno lo stesso valore obiettivo.
3. Ricavare il lower bound sul numero di contenitori, e stabilire se coincide con il valore ottimo.

Soluzione

Usiamo il valore (B5) dei rilassamenti e le soluzioni primale e duale date con esso nel box all'inizio del capitolo.

1. Gurobi restituisce $z(LP-0_{BPP}) = \frac{25}{12}$ e $z(LP_{BPP}) = \frac{25}{12}$. La formula dà lo stesso valore:

$$\frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j}{c} = \frac{7 + 6 + 5 + 4 + 3}{12} = \frac{25}{12}.$$

I limiti superiori $y_b \leq 1$ non cambiano il valore ottimo.

2. La soluzione primale è $\tilde{x}_{jb} = \frac{1}{3}$ per ogni j e b , e $\tilde{y}_b = \frac{25}{3 \cdot 12} = \frac{25}{36}$ per ogni b .
 - Assegnamento: $\sum_b \tilde{x}_{jb} = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ per ogni oggetto j .
 - Capacità: $-\sum_j w_j \tilde{x}_{jb} + 12 \tilde{y}_b = -\frac{25}{3} + 12 \cdot \frac{25}{36} = 0$ per ogni contenitore b .
 - Limiti: $0 \leq \frac{25}{36} \leq 1$, quindi vale anche $\tilde{y}_b \leq 1$.

La soluzione duale è $\tilde{\pi}_b = \frac{1}{12}$ per ogni contenitore e $\tilde{\mu}_j = \frac{w_j}{12}$:

$$\tilde{\mu}_1 = \frac{7}{12}, \quad \tilde{\mu}_2 = \frac{1}{2}, \quad \tilde{\mu}_3 = \frac{5}{12}, \quad \tilde{\mu}_4 = \frac{1}{3}, \quad \tilde{\mu}_5 = \frac{1}{4}.$$

Ogni vincolo $\mu_j - w_j \pi_b \leq 0$ vale all'uguaglianza, poiché $\frac{w_j}{12} - w_j \frac{1}{12} = 0$, e ogni vincolo $c \pi_b \leq 1$ vale all'uguaglianza, poiché $12 \cdot \frac{1}{12} = 1$.

Valore primale: $\sum_b \tilde{y}_b = 3 \cdot \frac{25}{36} = \frac{25}{12}$. Valore duale: $\sum_j \tilde{\mu}_j = \frac{25}{12}$. I due valori coincidono, quindi per la dualità debole della PL entrambe le soluzioni sono ottime.

3. Poiché $z(ILP_{BPP})$ è intero, $z(ILP_{BPP}) \geq \lceil \frac{25}{12} \rceil = 3$. La soluzione ammissibile del testo usa 3 contenitori, quindi $z(ILP_{BPP}) = 3$ (Gurobi dà lo stesso valore): il bound arrotondato coincide con il valore ottimo.

Esercizio 10.3 — Soluzioni ammissibili del modello del BPP (1)

Consideriamo contenitori di capacità $c = 10$ e un insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, \dots, 6\}$ di 6 oggetti ($n = 6$), con i seguenti pesi degli oggetti:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$
w_j	5	4	4	3	2	2

Usiamo il modello ILP_{BPP} con $m = 3$ contenitori. Le seguenti soluzioni candidate danno gli oggetti in ogni contenitore (tutte le variabili non elencate sono pari a 0):

- (a) contenitore 1: $\{1, 3\}$, contenitore 2: $\{2, 4, 5\}$, contenitore 3: $\{6\}$, e $y_1 = y_2 = y_3 = 1$;
- (b) contenitore 1: $\{1, 2, 4\}$, contenitore 2: $\{3, 5\}$, contenitore 3: $\{6\}$, e $y_1 = y_2 = y_3 = 1$;
- (c) contenitore 1: $\{1, 4, 5\}$, contenitore 2: $\{2, 3, 6\}$, contenitore 3 vuoto, e $y_1 = y_2 = y_3 = 1$;
- (d) contenitore 1: $\{1, 4, 5\}$, contenitore 2: $\{2, 3, 6\}$, contenitore 3: $\{6\}$, e $y_1 = y_2 = y_3 = 1$;
- (e) $x_{jb} = \frac{1}{3}$ per ogni oggetto j e ogni contenitore b , e $y_1 = y_2 = y_3 = \frac{2}{3}$.

Domande

- Per ogni candidata, verificare i vincoli di assegnamento e i vincoli di capacità del modello.
- Stabilire quali candidate sono ammissibili per il modello ILP_{BPP} e quali per il suo rilassamento LP_{BPP} , e dare il valore obiettivo di quelle ammissibili.
- Usare le candidate per trovare il valore ottimo dell'istanza.

Soluzione

- Ogni oggetto è in esattamente un contenitore. I carichi sono 9, 9, 2 contro le capacità 10, 10, 10. Tutti i vincoli di capacità valgono.
 - Ogni oggetto è in esattamente un contenitore. I carichi sono 12, 6, 2 contro le capacità 10, 10, 10. Il vincolo di capacità del contenitore 1 è violato.
 - Ogni oggetto è in esattamente un contenitore. I carichi sono 10, 10, 0 contro le capacità 10, 10, 10. Tutti i vincoli di capacità valgono.
 - L'oggetto 6 è in 2 contenitori: il vincolo di assegnamento dell'oggetto 6 è violato. I carichi sono 10, 10, 2 contro le capacità 10, 10, 10. Tutti i vincoli di capacità valgono.
 - Ogni oggetto è in esattamente un contenitore. I carichi sono $\frac{20}{3}$, $\frac{20}{3}$, $\frac{20}{3}$ contro le capacità $\frac{20}{3}$, $\frac{20}{3}$, $\frac{20}{3}$. Tutti i vincoli di capacità valgono.
- Ammissibile per ILP_{BPP} , quindi per LP_{BPP} , di valore 3.
 - Inammissibile per entrambi i modelli: il contenitore 1 contiene peso $12 > 10$.

- (c) Ammissibile per entrambi i modelli, di valore 3. Il contenitore 3 è vuoto ma contato: porre $y_3 = 0$ mantiene soddisfatti tutti i vincoli e dà valore 2.
- (d) Inammissibile per entrambi i modelli: l'oggetto 6 è inserito due volte.
- (e) Ammissibile per LP_{BPP} , di valore $3 \cdot \frac{2}{3} = 2$, ma non per ILP_{BPP} , poiché le variabili sono frazionarie. Ogni vincolo di capacità vale all'uguaglianza: $\frac{20}{3} = 10 \cdot \frac{2}{3}$.
3. La candidata (c) con $y_3 = 0$ usa 2 contenitori, con schemi $\{1, 4, 5\}$ e $\{2, 3, 6\}$, entrambi di peso 10. Il lower bound $\lceil \frac{5+4+4+3+2+2}{10} \rceil = 2$ mostra che nessuna soluzione usa meno contenitori: $z(ILP_{BPP}) = 2$. Il valore 2 della candidata (e) è il valore $\frac{\sum_j w_j}{c} = 2$ dei rilassamenti lineari.

Esercizio 10.4 — I limiti $y_b \leq 1$ e la scelta di m (1)

Consideriamo contenitori di capacità $c = 10$ e un insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, \dots, 3\}$ di 3 oggetti ($n = 3$), con i seguenti pesi degli oggetti:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
w_j	6	6	6

I due rilassamenti differiscono solo per i limiti superiori $y_b \leq 1$.

Domande

1. Risolvere $LP-0_{BPP}$, LP_{BPP} e ILP_{BPP} con $m = 3$ usando Gurobi, e spiegare perché i limiti $y_b \leq 1$ non cambiano il valore del rilassamento.
2. Mostrare che i limiti superiori $x_{jb} \leq 1$ sono validi ma implicati dagli altri vincoli.
3. Ripetere il calcolo con $m = 2$. Spiegare il risultato.
4. Ripetere il calcolo con $m = 1$, e confrontare i due rilassamenti.

Soluzione

1. Gurobi dà $z(LP-0_{BPP}) = z(LP_{BPP}) = \frac{9}{5}$ e $z(ILP_{BPP}) = 3$. La soluzione ottima del capitolo ha $\tilde{y}_b = \frac{18}{3 \cdot 10} = \frac{3}{5} \leq 1$: soddisfa i limiti $y_b \leq 1$, quindi aggiungerli non taglia alcuna soluzione ottima di $LP-0_{BPP}$. In generale $\frac{\sum_j w_j}{mc} \leq 1$ ogni volta che $\frac{\sum_j w_j}{c} \leq z(ILP_{BPP}) \leq m$.
2. Per ogni oggetto j e contenitore b , il vincolo di assegnamento e $x_{jk} \geq 0$ danno

$$x_{jb} \leq \sum_{k \in \mathcal{B}} x_{jk} = 1.$$

Ogni punto che soddisfa i vincoli di assegnamento e di non negatività soddisfa già $x_{jb} \leq 1$.

3. Con $m = 2$ il modello ILP_{BPP} è inammissibile (Gurobi): ogni oggetto ha peso $6 > \frac{c}{2} = 5$, quindi due oggetti non condividono mai un contenitore e servono 3 contenitori.

I rilassamenti sono ammissibili, con valore $\frac{9}{5}$ e $\tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = \frac{18}{2 \cdot 10} = \frac{9}{10} \leq 1$. Un valore $m < z(\text{ILP}_{\text{BPP}})$ rende sbagliato il modello, e il rilassamento non lo rivela.

4. Con $m = 1$, LP-0_{BPP} è ancora ammissibile, con $\tilde{y}_1 = \frac{9}{5}$ e valore $\frac{9}{5}$. Invece LP_{BPP} è inammissibile (Gurobi): il vincolo di capacità e i vincoli di assegnamento danno $10 y_1 \geq 18$, cioè $y_1 \geq \frac{9}{5} > 1$, contro $y_1 \leq 1$. Qui i limiti $y_b \leq 1$ fanno la differenza: rilevano che un solo contenitore non può contenere tutti gli oggetti.

Esercizio 10.5 — Gap di integralità del modello del BPP (1)

Dato $\vartheta \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, il capitolo considera le istanze del BPP con capacità $c = 2\vartheta$ e n oggetti di peso $w_j = \vartheta + 1$. Prendiamo $\vartheta = 4$ e $n = 4$, cioè $c = 8$ e i pesi:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
w_j	5	5	5	5

Domande

- Usare $m = 4$ e Gurobi per calcolare $z(\text{LP}_{\text{BPP}})$ e $z(\text{ILP}_{\text{BPP}})$, e spiegare il valore di $z(\text{ILP}_{\text{BPP}})$.
- Calcolare il gap assoluto $z(\text{ILP}_{\text{BPP}}) - z(\text{LP}_{\text{BPP}})$ e i rapporti $\frac{z(\text{LP}_{\text{BPP}})}{z(\text{ILP}_{\text{BPP}})}$ e $\frac{\lceil z(\text{LP}_{\text{BPP}}) \rceil}{z(\text{ILP}_{\text{BPP}})}$, e confrontarli con il valore $\frac{1}{2}$ del capitolo.
- Trovare il più piccolo ϑ per cui il rapporto $\frac{z(\text{LP}_{\text{BPP}})}{z(\text{ILP}_{\text{BPP}})}$ è al più $\frac{11}{20}$.
- Considerare la seconda famiglia del capitolo con $n = 6$: capacità $c = 6$ e 6 oggetti di peso $\frac{c}{2} + 1 = 4$. Calcolare il rapporto $\frac{\lceil z(\text{LP}_{\text{BPP}}) \rceil}{z(\text{ILP}_{\text{BPP}})}$ con Gurobi.

Soluzione

Usiamo il valore (B5) dei rilassamenti e le soluzioni primale e duale date con esso nel box all'inizio del capitolo.

- Gurobi dà $z(\text{LP}_{\text{BPP}}) = \frac{4 \cdot 5}{8} = \frac{5}{2}$ e $z(\text{ILP}_{\text{BPP}}) = 4$. Ogni oggetto ha peso $5 > \frac{c}{2} = 4$, quindi due oggetti non entrano mai nello stesso contenitore, e ogni oggetto ha bisogno del proprio contenitore.
- Il gap assoluto è $4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$. I rapporti sono

$$\frac{z(\text{LP}_{\text{BPP}})}{z(\text{ILP}_{\text{BPP}})} = \frac{\frac{5}{2}}{4} = \frac{5}{8} \quad \text{e} \quad \frac{\lceil z(\text{LP}_{\text{BPP}}) \rceil}{z(\text{ILP}_{\text{BPP}})} = \frac{3}{4} = \frac{3}{4}.$$

Entrambi sono almeno $\frac{1}{2}$, come il capitolo dimostra per ogni istanza.

- Per questa famiglia il rapporto è

$$\frac{z(\text{LP}_{\text{BPP}})}{z(\text{ILP}_{\text{BPP}})} = \frac{\frac{n(\vartheta+1)}{2\vartheta}}{n} = \frac{\vartheta+1}{2\vartheta}.$$

La condizione $\frac{\vartheta+1}{2\vartheta} \leq \frac{11}{20}$ è $20\vartheta + 20 \leq 22\vartheta$, cioè $\vartheta \geq 10$. Il valore più piccolo è $\vartheta = 10$, con $c = 20$ e oggetti di peso 11.

4. Gurobi dà $z(\text{LP}_{\text{BPP}}) = \frac{6 \cdot 4}{6} = 4$ e $z(\text{ILP}_{\text{BPP}}) = 6$, poiché di nuovo due oggetti non condividono mai un contenitore. Il rapporto è $4/6 = \frac{2}{3}$. In generale è $\frac{n/2+1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$, che tende a $\frac{1}{2}$.

Esercizio 10.6 — Modello PLI del problema del cutting stock (CSP)

Consideriamo un problema del cutting stock con contenitori di capacità $c = 10$ e un insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, 3\}$ di 3 oggetti, con i seguenti pesi w_j e copie richieste d_j :

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
w_j	6	5	3
d_j	3	1	2

Usiamo il modello ILP_{CSP} del capitolo, con variabili intere x_{jb} per il numero di copie dell'oggetto j inserite nel contenitore b e variabili binarie y_b per i contenitori usati.

Domande

1. Trovare una soluzione ammissibile con 4 contenitori, e contare le variabili e i vincoli (oltre ai domini) del modello ILP_{CSP} con $m = 4$.
2. Scrivere il modello ILP_{CSP} con $m = 4$ per questa istanza.
3. Risolvere il modello con Gurobi: dare il valore ottimo e il contenuto dei contenitori usati.
4. Calcolare il bound sul peso $\lceil \sum_j d_j w_j / c \rceil$ e il valore ottimo del rilassamento lineare (Gurobi), e spiegare il gap con il valore ottimo.
5. Determinare quante variabili binarie servirebbero al modello ILP_{BPP} sull'insieme esteso degli oggetti, con lo stesso m .

Soluzione

1. Ogni copia dell'oggetto 1 nel proprio contenitore, con una copia dell'oggetto 3 in due di essi, e l'oggetto 2 da solo: i contenitori $\{1, 3\}$, $\{1, 3\}$, $\{1\}$, $\{2\}$ hanno pesi 9, 9, 6, 5, tutti al più 10. Quindi $m = 4$ è un upper bound valido. Il modello ha $mn = 4 \cdot 3 = 12$ variabili intere x_{jb} e $m = 4$ variabili binarie y_b , quindi 16 variabili, e $n + m = 3 + 4 = 7$ vincoli lineari.
2. Il modello ILP_{CSP} è:

$$\begin{array}{llll}
 \min & y_1 + y_2 + y_3 + y_4 & & \\
 \text{soggetto a} & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} & = & 3 \\
 & x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} & = & 1 \\
 & x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} & = & 2 \\
 & -6x_{11} - 5x_{21} - 3x_{31} + 10y_1 & \geq & 0 \\
 & -6x_{12} - 5x_{22} - 3x_{32} + 10y_2 & \geq & 0 \\
 & -6x_{13} - 5x_{23} - 3x_{33} + 10y_3 & \geq & 0 \\
 & -6x_{14} - 5x_{24} - 3x_{34} + 10y_4 & \geq & 0 \\
 & x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots, x_{34} & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} \\
 & y_1, y_2, y_3, y_4 & \in & \{0, 1\}
 \end{array}$$

3. Gurobi restituisce $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) = 4$. I contenitori usati della soluzione trovata contengono le copie $\{2\}$ (peso 5); $\{1\}$ (peso 6); $\{1, 3\}$ (peso 9); $\{1, 3\}$ (peso 9).
4. Il peso totale è $\sum_j d_j w_j = 3 \cdot 6 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 29$, quindi il bound sul peso è $\lceil \frac{29}{10} \rceil = 3$, e Gurobi dà il valore ottimo $\frac{29}{10}$ per il rilassamento lineare, con $x_{jb} \geq 0$ e $0 \leq y_b \leq 1$. Entrambi sono minori del valore ottimo 4: due copie dell'oggetto 1 non condividono mai un contenitore ($6 + 6 > 10$), e l'oggetto 2 non entra con una copia dell'oggetto 1 ($6 + 5 > 10$), quindi le tre copie dell'oggetto 1 e l'oggetto 2 richiedono quattro contenitori diversi.
5. L'insieme esteso degli oggetti ha $\sum_j d_j = 6$ copie, quindi il modello ILP_{BPP} avrebbe $4 \cdot 6 = 24$ variabili binarie x_{jb} e 4 variabili y_b , contro le 12 variabili intere del modello ILP_{CSP} ; avrebbe anche molte soluzioni equivalenti, ottenute scambiando copie dello stesso oggetto.

Formulazioni dei problemi di colorazione

Formulazioni usate in questi esercizi. Il modello ILP_{VCP} del capitolo [Formulazioni dei problemi di colorazione](#), con l'insieme dei colori $\mathcal{C} = \{1, \dots, k\}$:

$$\min \sum_{c \in \mathcal{C}} y_c \quad (C0)$$

$$\text{soggetto a } \sum_{c \in \mathcal{C}} x_{vc} = 1, \quad \forall v \in V, \quad (C1)$$

$$-x_{uc} - x_{vc} + y_c \geq 0, \quad \forall c \in \mathcal{C}, \forall \{u, v\} \in E, \quad (C2)$$

$$x_{vc} \in \{0, 1\}, \quad \forall v \in V, \forall c \in \mathcal{C}, \quad (C3)$$

$$y_c \in \{0, 1\}, \quad \forall c \in \mathcal{C}. \quad (C4)$$

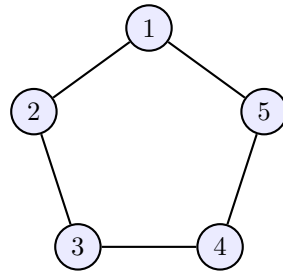
I rilassamenti $LP-0_{VCP}$ e LP_{VCP} del capitolo rilassano (C3) e (C4) in $x_{vc} \geq 0$ e $y_c \geq 0$, con anche $y_c \leq 1$ in LP_{VCP} . Per ogni grafo con almeno uno spigolo e ogni k valido, una soluzione ottima di entrambi i rilassamenti è

$$\tilde{x}_{v1} = \tilde{x}_{v2} = \frac{1}{2} \quad (v \in V), \quad \tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = 1, \quad (C5)$$

con tutte le altre variabili pari a 0, e $z(LP-0_{VCP}) = z(LP_{VCP}) = 2$. Una soluzione duale ottima sceglie uno spigolo $\{u, v\} \in E$ e pone $\tilde{\mu}_u = \tilde{\mu}_v = 1$, $\tilde{\pi}_{c\{u,v\}} = 1$ per ogni colore c , e tutte le altre variabili duali pari a 0.

Esercizio 11.1 — Modello PLI del problema della colorazione dei vertici (1)

Consideriamo il seguente grafo $G = (V, E)$ con 5 vertici ($n = 5$) e 5 spigoli ($m = 5$):



$$V = \{1, \dots, 5\},$$

$$E = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{4,5\}, \{1,5\}\}.$$

Le classi di colore $\{1,3\}$, $\{2,4\}$ e $\{5\}$ formano una colorazione ammissibile.

Domande

1. Spiegare perché $k = 3$ è un upper bound valido sul numero di colori di una soluzione ottima.
2. Contare le variabili e i vincoli (oltre ai domini) del modello ILP_{VCP} con $k = 3$.
3. Scrivere il modello ILP_{VCP} con $k = 3$ per questo grafo (scrivere i vincoli sugli spigoli per tutti i colori c insieme).
4. Risolvere il modello con Gurobi. Dare il valore ottimo e una colorazione ottima, e contare le partizioni ottime dei vertici in classi di colore.

Soluzione

1. Le classi date non contengono spigoli: formano una colorazione ammissibile con 3 colori. Quindi $z(\text{ILP}_{\text{VCP}}) \leq 3$ e $k = 3$ è valido.
2. Ci sono $k n = 3 \cdot 5 = 15$ variabili x_{vc} e $k = 3$ variabili y_c , quindi 18 variabili binarie. Ci sono $n = 5$ vincoli di assegnamento e $k m = 3 \cdot 5 = 15$ vincoli sugli spigoli, quindi 20 vincoli lineari.
3. Con $\mathcal{C} = \{1, 2, 3\}$ il modello ILP_{VCP} è:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & y_1 + y_2 + y_3 \\
 \text{soggetto a} \quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1 \\
 & x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1 \\
 & x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1 \\
 & x_{41} + x_{42} + x_{43} = 1 \\
 & x_{51} + x_{52} + x_{53} = 1 \\
 & -x_{11} - x_{21} + y_1 \geq 0 \\
 & -x_{21} - x_{31} + y_1 \geq 0 \\
 & -x_{31} - x_{41} + y_1 \geq 0 \\
 & -x_{41} - x_{51} + y_1 \geq 0 \\
 & -x_{11} - x_{51} + y_1 \geq 0 \\
 & -x_{12} - x_{22} + y_2 \geq 0 \\
 & -x_{22} - x_{32} + y_2 \geq 0 \\
 & -x_{32} - x_{42} + y_2 \geq 0 \\
 & -x_{42} - x_{52} + y_2 \geq 0 \\
 & -x_{12} - x_{52} + y_2 \geq 0 \\
 & -x_{13} - x_{23} + y_3 \geq 0 \\
 & -x_{23} - x_{33} + y_3 \geq 0 \\
 & -x_{33} - x_{43} + y_3 \geq 0 \\
 & -x_{43} - x_{53} + y_3 \geq 0 \\
 & -x_{13} - x_{53} + y_3 \geq 0 \\
 & x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots, x_{53} \in \{0, 1\} \\
 & y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

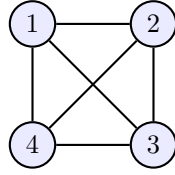
4. Gurobi restituisce $z(\text{ILP}_{\text{VCP}}) = 3$. Due colori non bastano: il ciclo ha un numero dispari di vertici, e colori alternati lungo il ciclo darebbero lo stesso colore ai vertici 1 e 5. Una colorazione ottima è $\tilde{Q}_1 = \{1, 3\}$, $\tilde{Q}_2 = \{2, 4\}$, $\tilde{Q}_3 = \{5\}$, cioè

$$\tilde{x}_{11} = 1, \tilde{x}_{31} = 1, \tilde{x}_{22} = 1, \tilde{x}_{42} = 1, \tilde{x}_{53} = 1, \tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = \tilde{y}_3 = 1.$$

Per enumerazione ci sono 5 partizioni ottime: una classe è un solo vertice, e gli altri quattro vertici formano in modo unico due coppie di vertici non adiacenti. Con le $3! = 6$ permutazioni dei colori, il modello ha 30 soluzioni ottime.

Esercizio 11.2 — Rilassamenti lineari del modello del VCP (1)

Consideriamo il seguente grafo $G = (V, E)$ con 4 vertici ($n = 4$) e 6 spigoli ($m = 6$):



$$V = \{1, \dots, 4\},$$

$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}.$$

Il grafo è completo, e usiamo $k = 4$ colori.

Domande

1. Risolvere LP-0_{VCP} , LP_{VCP} e ILP_{VCP} con Gurobi.
2. Scrivere la soluzione primale (C5) per questo grafo e verificare che è ammissibile per LP_{VCP} .
3. Scrivere la soluzione duale del capitolo costruita sullo spigolo $\{1, 2\}$ e verificare che è ammissibile per $D(\text{LP-0}_{\text{VCP}})$, con lo stesso valore obiettivo.
4. Calcolare il gap assoluto e il rapporto fra il bound del rilassamento e il valore ottimo. Descrivere che cosa succede sul grafo completo con n vertici.

Soluzione

Usiamo la soluzione primale (C5) e la soluzione duale costruita su uno spigolo, date nel box all'inizio del capitolo.

1. Gurobi dà $z(\text{LP-0}_{\text{VCP}}) = z(\text{LP}_{\text{VCP}}) = 2$ e $z(\text{ILP}_{\text{VCP}}) = 4$: tutti i vertici sono a due a due adiacenti, quindi richiedono 4 colori diversi.
2. La soluzione è $\tilde{x}_{v1} = \tilde{x}_{v2} = \frac{1}{2}$ per $v = 1, \dots, 4$, $\tilde{x}_{v3} = \tilde{x}_{v4} = 0$, $\tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = 1$ e $\tilde{y}_3 = \tilde{y}_4 = 0$.
 - Assegnamento: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ per ogni vertice.
 - Spigoli, colori 1 e 2: $\tilde{y}_c - \tilde{x}_{uc} - \tilde{x}_{vc} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$. Colori 3 e 4: $0 - 0 - 0 = 0$.
 - Limiti: $0 \leq \tilde{y}_c \leq 1$ per ogni colore.

Il suo valore è $\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 = 2$.

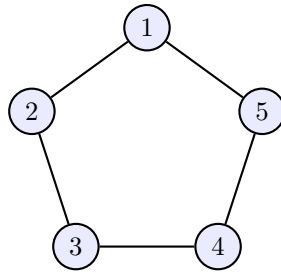
3. La soluzione duale è $\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2 = 1$, $\tilde{\mu}_3 = \tilde{\mu}_4 = 0$, $\tilde{\pi}_{c\{1,2\}} = 1$ per $c = 1, \dots, 4$, e tutti gli altri $\tilde{\pi}_{ce} = 0$.
 - Vertici 1 e 2: lo spigolo $\{1, 2\}$ è incidente in entrambi, quindi $\tilde{\mu}_v - \sum_{e \in \delta(v)} \tilde{\pi}_{ce} = 1 - 1 = 0$ per ogni colore.
 - Vertici 3 e 4: $0 - 0 = 0$, poiché nessuno spigolo incidente in essi ha valore diverso da zero.
 - Colori: $\sum_{e \in E} \tilde{\pi}_{ce} = 1 \leq 1$ per ogni colore.

Il suo valore è $\tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2 = 2$, pari al valore primale: per la dualità debole della PL entrambe le soluzioni sono ottime.

4. Il gap assoluto è $4 - 2 = 2$ e il rapporto è $\frac{z(\text{LP}_{\text{VCP}})}{z(\text{ILP}_{\text{VCP}})} = \frac{1}{2}$. Sul grafo completo con n vertici il valore ottimo è n e il bound del rilassamento è ancora 2: il gap $n - 2$ cresce senza limite e il rapporto $\frac{2}{n}$ tende a 0.

Esercizio 11.3 — Soluzioni ammissibili del modello del VCP (1)

Consideriamo il seguente grafo $G = (V, E)$ con 5 vertici ($n = 5$) e 5 spigoli ($m = 5$):



$$V = \{1, \dots, 5\},$$

$$E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{1, 5\}\}.$$

Usiamo il modello ILP_{VCP} con $k = 3$ colori. Le soluzioni candidate sono (le variabili non elencate valgono 0):

- (a) colore 1: $\{1, 3\}$, colore 2: $\{2, 4\}$, colore 3: $\{5\}$, e $y_1 = y_2 = y_3 = 1$;
- (b) colore 1: $\{1, 3\}$, colore 2: $\{2, 4, 5\}$, e $y_1 = y_2 = 1, y_3 = 0$;
- (c) colore 1: $\{1, 3\}$, colore 2: $\{2, 4\}$, colore 3: $\{5\}$, e $y_1 = y_2 = 1, y_3 = 0$;
- (d) $x_{v1} = x_{v2} = \frac{1}{2}$ per ogni vertice v , e $y_1 = y_2 = 1, y_3 = 0$;
- (e) $x_{vc} = \frac{1}{3}$ per ogni vertice v e colore c , e $y_1 = y_2 = y_3 = \frac{2}{3}$.

Domande

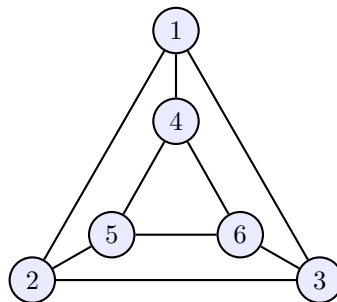
1. Per ogni candidata, verificare i vincoli di assegnamento e i vincoli sugli spigoli, e indicare un vincolo violato quando c'è.
2. Stabilire quali candidate sono ammissibili per ILP_{VCP} e quali per LP_{VCP} , e dare il valore di quelle ammissibili.
3. Stabilire quali candidate sono ottime per LP_{VCP} . Usare Gurobi per confermare il valore ottimo del rilassamento.

Soluzione

1. (a) Ogni vertice ha un colore, e nessuno spigolo ha entrambi gli estremi nella stessa classe: tutti i vincoli valgono.
 - (b) Lo spigolo $\{4, 5\}$ ha entrambi gli estremi con il colore 2: il vincolo $-x_{42} - x_{52} + y_2 \geq 0$ diventa $-1 - 1 + 1 = -1 < 0$.
 - (c) Il vertice 5 prende il colore 3 ma $y_3 = 0$: il vincolo $-x_{43} - x_{53} + y_3 \geq 0$ diventa $0 - 1 + 0 = -1 < 0$.
 - (d) Ogni vertice ha $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$; per i colori 1 e 2 ogni spigolo dà $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$, per il colore 3 dà 0: tutti i vincoli valgono.
 - (e) Ogni vertice ha $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$; ogni spigolo e colore danno $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$: tutti i vincoli valgono.
2. (a) Ammissibile per ILP_{VCP} e per LP_{VCP} , di valore 3.
 - (b) Inammissibile per entrambi i modelli.
 - (c) Inammissibile per entrambi i modelli.
 - (d) Ammissibile solo per LP_{VCP} (variabili frazionarie), di valore 2.
 - (e) Ammissibile solo per LP_{VCP} , di valore $3 \cdot \frac{2}{3} = 2$.
3. Il valore di ogni soluzione ammissibile di LP_{VCP} è almeno 2, e Gurobi dà $z(\text{LP}_{\text{VCP}}) = 2$: le candidate (d) ed (e) sono entrambe ottime per il rilassamento. La candidata (d) è la soluzione del capitolo; la (e) mostra che la soluzione ottima del rilassamento non è unica. La candidata (a) è ottima per ILP_{VCP} , il cui valore è 3.

Esercizio 11.4 — Soluzioni duali dei rilassamenti del VCP (1)

Consideriamo il seguente grafo $G = (V, E)$ con 6 vertici ($n = 6$) e 9 spigoli ($m = 9$):



$$V = \{1, \dots, 6\},$$

$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \\ \{5, 6\}, \{1, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}\}.$$

Usiamo $k = 3$ colori. Ogni vertice ha grado 3.

Domande

1. Scrivere i vincoli del duale $D(\text{LP-0}_{\text{VCP}})$ associati alla variabile x_{1c} e alla variabile y_c , per un colore c .

2. Verificare che le soluzioni duali del capitolo costruite sullo spigolo $\{1, 4\}$ e sullo spigolo $\{2, 3\}$ sono ammissibili, e darne il valore.
3. Verificare che anche $\tilde{\mu}_v = \frac{1}{3} = \frac{\deg(v)}{|E|}$ per ogni vertice e $\tilde{\pi}_{ce} = \frac{1}{9}$ per ogni colore e spigolo è una soluzione duale ottima.
4. Aggiungere i limiti $y_c \leq 1$, con variabili duali $\lambda_c \leq 0$. Dare una soluzione ottima di $D(LP_{VCP})$, e confrontare i due rilassamenti con il valore ottimo (usare Gurobi).

Soluzione

Usiamo la soluzione primale (C5) e la soluzione duale costruita su uno spigolo, date nel box all'inizio del capitolo.

1. Gli spigoli incidenti nel vertice 1 sono $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ e $\{1, 4\}$. Il vincolo di x_{1c} e il vincolo di y_c sono

$$\mu_1 - \pi_{c\{1,2\}} - \pi_{c\{1,3\}} - \pi_{c\{1,4\}} \leq 0, \quad \sum_{e \in E} \pi_{ce} \leq 1.$$

2. Per lo spigolo $\{1, 4\}$: $\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_4 = 1$ e $\tilde{\pi}_{c\{1,4\}} = 1$ per $c = 1, 2, 3$. I vertici 1 e 4 danno $1 - 1 = 0$, gli altri vertici danno $0 - 0 = 0$, e ogni colore dà $\sum_e \tilde{\pi}_{ce} = 1$. Il valore è 2. Per lo spigolo $\{2, 3\}$ la verifica è la stessa con i vertici 2 e 3: anche questa soluzione è ammissibile, di valore 2. Entrambe sono ottime, poiché $z(LP-0_{VCP}) = 2$.

3. Ogni vertice ha 3 spigoli incidenti, quindi $\tilde{\mu}_v - \sum_{e \in \delta(v)} \tilde{\pi}_{ce} = \frac{1}{3} - 3 \cdot \frac{1}{9} = 0$. Ogni colore dà $\sum_{e \in E} \tilde{\pi}_{ce} = 9 \cdot \frac{1}{9} = 1$. Il valore è

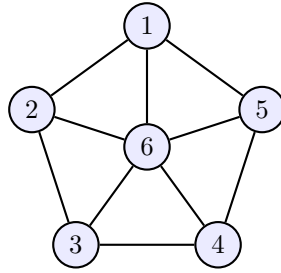
$$\sum_{v \in V} \tilde{\mu}_v = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2,$$

il valore ottimo: questa soluzione duale distribuisce il peso su tutti gli spigoli, invece di sceglierne uno.

4. Le soluzioni duali precedenti con $\tilde{\lambda}_c = 0$ per ogni colore soddisfano $\sum_e \tilde{\pi}_{ce} + \tilde{\lambda}_c \leq 1$ e hanno valore 2. Gurobi dà $z(LP-0_{VCP}) = z(LP_{VCP}) = 2$ e $z(ILP_{VCP}) = 3$: i limiti $y_c \leq 1$ non rafforzano il rilassamento, che resta a 2 mentre il grafo richiede 3 colori (contiene il triangolo $\{1, 2, 3\}$).

Esercizio 11.5 — Gap di integralità del modello del VCP (1)

Consideriamo il seguente grafo $G = (V, E)$ con 6 vertici ($n = 6$) e 10 spigoli ($m = 10$):



$$V = \{1, \dots, 6\},$$

$$E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{1, 5\}, \\ \{1, 6\}, \{2, 6\}, \{3, 6\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}\}.$$

Il grafo è un ciclo sui vertici $1, \dots, 5$ con il vertice 6 adiacente a tutti. Le classi $\{1, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$ formano una colorazione ammissibile, quindi usiamo $k = 4$.

Domande

1. Calcolare $z(\text{LP}_{\text{VCP}})$ e $z(\text{ILP}_{\text{VCP}})$ con Gurobi, e spiegare il valore ottimo.
2. Calcolare il gap assoluto e il rapporto $\frac{z(\text{LP}_{\text{VCP}})}{z(\text{ILP}_{\text{VCP}})}$.
3. Risolvere di nuovo il rilassamento con $k = 6$. Stabilire se un k più grande cambia il bound.
4. Sul grafo completo con n vertici, trovare il più piccolo n per cui il rapporto è al più $\frac{1}{5}$.

Soluzione

Usiamo la soluzione primale (C5) e la soluzione duale costruita su uno spigolo, date nel box all'inizio del capitolo.

1. Gurobi dà $z(\text{LP}_{\text{VCP}}) = 2$ e $z(\text{ILP}_{\text{VCP}}) = 4$. Il ciclo $1, \dots, 5$ richiede 3 colori, e il vertice 6, adiacente a tutti i suoi vertici, ne richiede un quarto.
2. Il gap assoluto è $4 - 2 = 2$ e il rapporto è $\frac{z(\text{LP}_{\text{VCP}})}{z(\text{ILP}_{\text{VCP}})} = \frac{1}{2}$.
3. Con $k = 6$ Gurobi dà di nuovo $z(\text{LP}_{\text{VCP}}) = 2$. Il valore 2 non dipende da k : la soluzione del capitolo usa solo i colori 1 e 2, qualunque sia il numero di colori.
4. Sul grafo completo il rapporto è $\frac{2}{n}$, e $\frac{2}{n} \leq \frac{1}{5}$ significa $n \geq 10$. Il valore più piccolo è $n = 10$.

Formulazioni dei problemi di clique

Formulazioni usate in questi esercizi. I modelli del capitolo [Formulazioni dei problemi di clique](#), dove $\bar{E}$ è l'insieme dei non-spigoli di G e $\mathcal{Q}$ l'insieme degli insiemi stabili massimali di G (le clique massimali del grafo complementare). La formulazione sugli spigoli ILP_{MCP} :

$$\max \sum_{v \in V} x_v \quad (\text{M0})$$

$$\text{soggetto a } x_u + x_v \leq 1, \quad \forall \{u, v\} \in \bar{E}, \quad (\text{M1})$$

$$x_v \in \{0, 1\}, \quad \forall v \in V. \quad (\text{M2})$$

La formulazione a clique $\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}$:

$$\max \sum_{v \in V} x_v \quad (\text{M3})$$

$$\text{soggetto a } \sum_{v \in Q} x_v \leq 1, \quad \forall Q \in \mathcal{Q}, \quad (\text{M4})$$

$$x_v \in \{0, 1\}, \quad \forall v \in V. \quad (\text{M5})$$

Il rilassamento LP_{MCP} rilassa (M2) in $0 \leq x_v \leq 1$; il rilassamento $\text{LP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}$ rilassa (M5) in $x_v \geq 0$, perché (M4) dà $x_v \leq 1$. I modelli ILP_{MSSP} e $\text{ILP}_{\text{MSSP}}^{\text{CL}}$ del MSSP sono (M0)–(M2) con (M1) scritto sugli spigoli di G , e (M3)–(M5) con (M4) scritto sulle clique massimali di G . Il modello $\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{VW}}$ del VWMCP è (M0)–(M2) con la funzione obiettivo $\max \sum_{v \in V} w_v x_v$. Il modello $\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{EW}}$ dell'EWMCP aggiunge una variabile binaria y_{uv} per ogni spigolo $\{u, v\} \in E$:

$$\max \sum_{\{u, v\} \in E} r_{uv} y_{uv} \quad (\text{M6})$$

$$\text{soggetto a } y_{uv} \leq x_u, \quad \forall \{u, v\} \in E, \quad (\text{M7})$$

$$y_{uv} \leq x_v, \quad \forall \{u, v\} \in E, \quad (\text{M8})$$

$$x_u + x_v \leq 1, \quad \forall \{u, v\} \in \bar{E}, \quad (\text{M9})$$

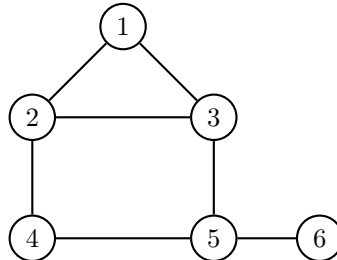
$$x_v \in \{0, 1\}, \quad \forall v \in V, \quad (\text{M10})$$

$$y_{uv} \in \{0, 1\}, \quad \forall \{u, v\} \in E. \quad (\text{M11})$$

Esercizio 12.1 — Modello PLI del problema della clique massima (MCP)

Consideriamo il grafo $G = (V, E)$ con $V = \{1, \dots, 6\}$ e i 7 spigoli

$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}.$$



Domande

1. Scrivere i non-spigoli di G . Quante variabili e quanti vincoli ha il modello ILP_{MCP} ?
2. Scrivere il modello ILP_{MCP} di G .
3. Risolvere il modello con Gurobi: dare $z(\text{ILP}_{\text{MCP}})$ e la soluzione ottima. È unica?
4. Quale modello PLI del problema dell'insieme stabile massimo su $\overline{G}$ si ottiene? Motivare la risposta.

Soluzione

1. G ha $\binom{6}{2} - 7 = 8$ non-spigoli:

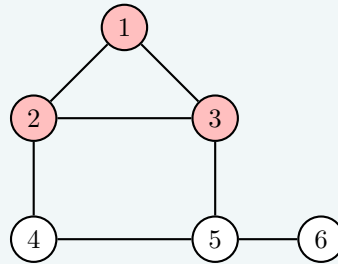
$$\overline{E} = \{\{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 6\}\}.$$

Il modello ha $n = 6$ variabili binarie e un vincolo per ogni non-spigolo: 8 vincoli lineari.

2. Il modello ILP_{MCP} è:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\ \text{soggetto a} \quad & x_1 + x_4 \leq 1 \\ & x_1 + x_5 \leq 1 \\ & x_1 + x_6 \leq 1 \\ & x_2 + x_5 \leq 1 \\ & x_2 + x_6 \leq 1 \\ & x_3 + x_4 \leq 1 \\ & x_3 + x_6 \leq 1 \\ & x_4 + x_6 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

3. Gurobi restituisce $z(\text{ILP}_{\text{MCP}}) = 3$ con $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = \tilde{x}_3 = 1$ e $\tilde{x}_4 = \tilde{x}_5 = \tilde{x}_6 = 0$: la clique $\{1, 2, 3\}$. L'enumerazione delle clique mostra che è l'unico triangolo, e nessuna clique ha 4 vertici (solo i vertici 2, 3 e 5 hanno grado 3). La soluzione ottima è unica.

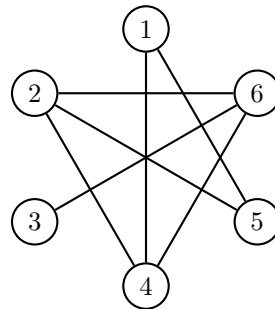


4. Lo stesso modello: i suoi vincoli sono scritti sugli spigoli di $\overline{G}$, il cui insieme degli spigoli è $\overline{E}$, e $x_u + x_v \leq 1$ dice che di ogni spigolo di $\overline{G}$ si seleziona al più un estremo. È la formulazione sugli spigoli del MSSP su $\overline{G}$, e $\alpha(\overline{G}) = \omega(G) = 3$.

Esercizio 12.2 — Il grafo complementare e la formulazione a clique (MCP)

Consideriamo il grafo $G = (V, E)$ con $V = \{1, \dots, 6\}$ e i 7 spigoli

$$E = \{\{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 6\}, \{4, 6\}\}.$$



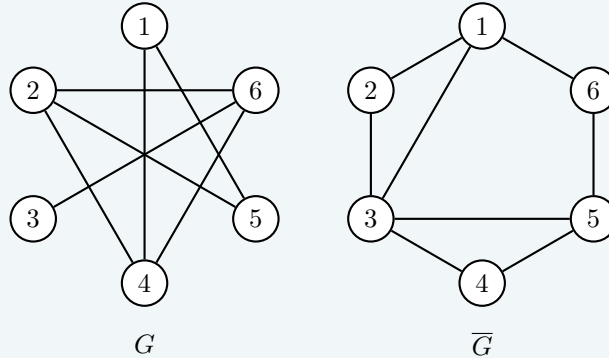
Domande

1. Scrivere gli spigoli del grafo complementare $\overline{G}$ e disegnarlo accanto a G .
2. Elencare le clique massimali di $\overline{G}$.
3. Scrivere la formulazione a clique $\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}$ e confrontare il suo numero di vincoli con quello del modello ILP_{MCP} .
4. Mostrare che ogni vincolo di ILP_{MCP} è implicato da un vincolo di $\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}$.
5. Risolvere entrambi i modelli con Gurobi e dare una clique massima di G .

Soluzione

1. $\overline{G}$ ha gli $\binom{6}{2} - 7 = 8$ non-spigoli di G :

$$\overline{E} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}.$$



2. Le clique massimali di $\overline{G}$ sono i due triangoli $\{1, 2, 3\}$ e $\{3, 4, 5\}$, che hanno in comune il vertice 3, e i due spigoli $\{1, 6\}$ e $\{5, 6\}$: il vertice 6 è adiacente in $\overline{G}$ solo a 1 e 5, che lì non sono adiacenti.
3. La formulazione a clique ha un vincolo per ogni clique massimale di $\overline{G}$:

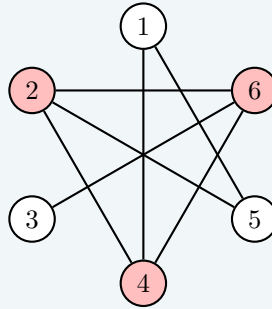
$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\ \text{soggetto a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\ & x_3 + x_4 + x_5 \leq 1 \\ & x_1 + x_6 \leq 1 \\ & x_5 + x_6 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Ha 4 vincoli, contro gli 8 vincoli di ILP_{MCP} (uno per ogni spigolo di $\overline{G}$).

4. Ogni spigolo di $\overline{G}$ sta in una clique massimale, e le variabili sono non negative:

vincolo di ILP _{MCP}	implicato da
$x_1 + x_2 \leq 1$	$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$
$x_1 + x_3 \leq 1$	$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$
$x_1 + x_6 \leq 1$	$x_1 + x_6 \leq 1$
$x_2 + x_3 \leq 1$	$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$
$x_3 + x_4 \leq 1$	$x_3 + x_4 + x_5 \leq 1$
$x_3 + x_5 \leq 1$	$x_3 + x_4 + x_5 \leq 1$
$x_4 + x_5 \leq 1$	$x_3 + x_4 + x_5 \leq 1$
$x_5 + x_6 \leq 1$	$x_5 + x_6 \leq 1$

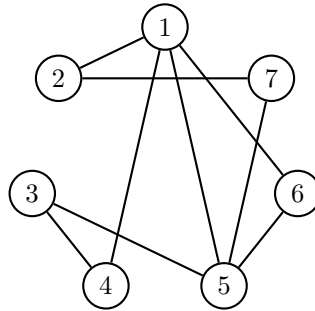
5. Entrambi i modelli danno il valore ottimo 3, con la clique $\{2, 4, 6\}$ di G : è un insieme stabile di $\overline{G}$, ed è l'unica clique massima (enumerazione).



Esercizio 12.3 — Bound LP: formulazione sugli spigoli e formulazione a clique (MCP)

Consideriamo il grafo $G = (V, E)$ con $V = \{1, \dots, 7\}$ e i 9 spigoli

$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 7\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}\}.$$



Domande

1. Scrivere il modello LP_{MCP} (formulazione sugli spigoli con $0 \leq x_v \leq 1$). Mostrare che $\bar{x}_v = \frac{1}{2}$ per ogni vertice è ammissibile, e calcolare $z(LP_{MCP})$ con Gurobi.
2. Elencare le clique massimali di $\bar{G}$ e scrivere il modello LP_{MCP}^{CL} .
3. Il punto $\bar{x}_v = \frac{1}{2}$ è ammissibile per LP_{MCP}^{CL} ? Calcolare $z(LP_{MCP}^{CL})$ con Gurobi, e dimostrare il valore sommando alcuni vincoli.
4. Trovare $\omega(G)$ e confrontare i due bound LP.

Soluzione

1. I 12 non-spigoli danno il modello

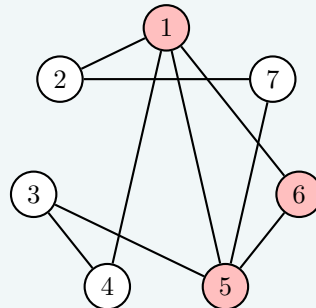
$$\begin{aligned}
 & \max \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \\
 & \text{soggetto a} \quad x_1 + x_3 \leq 1 \\
 & \quad x_1 + x_7 \leq 1 \\
 & \quad x_2 + x_3 \leq 1 \\
 & \quad x_2 + x_4 \leq 1 \\
 & \quad x_2 + x_5 \leq 1 \\
 & \quad x_2 + x_6 \leq 1 \\
 & \quad x_3 + x_6 \leq 1 \\
 & \quad x_3 + x_7 \leq 1 \\
 & \quad x_4 + x_5 \leq 1 \\
 & \quad x_4 + x_6 \leq 1 \\
 & \quad x_4 + x_7 \leq 1 \\
 & \quad x_6 + x_7 \leq 1 \\
 & \quad x_1 \leq 1 \\
 & \quad x_2 \leq 1 \\
 & \quad x_3 \leq 1 \\
 & \quad x_4 \leq 1 \\
 & \quad x_5 \leq 1 \\
 & \quad x_6 \leq 1 \\
 & \quad x_7 \leq 1 \\
 & \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5, \quad x_6, \quad x_7 \geq 0
 \end{aligned}$$

Con $\bar{x}_v = \frac{1}{2}$ ogni vincolo diventa $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \leq 1$, e il valore è $\frac{7}{2}$. Gurobi restituisce $z(\text{LP}_{\text{MCP}}) = \frac{7}{2}$: il punto è ottimo.

2. Le 6 clique massimali di $\overline{G}$ (insiemi stabili massimali di G) sono $\{1, 3, 7\}$, $\{2, 3, 6\}$, $\{2, 4, 5\}$, $\{2, 4, 6\}$, $\{3, 6, 7\}$, $\{4, 6, 7\}$, e il modello è

$$\begin{aligned}
 & \max \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \\
 & \text{soggetto a} \quad x_1 + x_3 + x_7 \leq 1 \\
 & \quad x_2 + x_3 + x_6 \leq 1 \\
 & \quad x_2 + x_4 + x_5 \leq 1 \\
 & \quad x_2 + x_4 + x_6 \leq 1 \\
 & \quad x_3 + x_6 + x_7 \leq 1 \\
 & \quad x_4 + x_6 + x_7 \leq 1 \\
 & \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5, \quad x_6, \quad x_7 \geq 0
 \end{aligned}$$

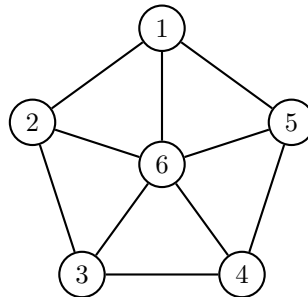
3. No: $\bar{x}_1 + \bar{x}_3 + \bar{x}_7 = \frac{3}{2} > 1$. Gurobi restituisce $z(\text{LP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}) = 3$. I tre vincoli di $\{1, 3, 7\}$, $\{2, 3, 6\}$, $\{2, 4, 5\}$ coprono ogni vertice almeno una volta; sommandoli, ogni variabile compare con coefficiente almeno 1, quindi $\sum_{v=1}^7 x_v \leq 3$ per ogni punto ammissibile.
4. Il triangolo $\{1, 5, 6\}$ è l'unica clique massima (enumerazione), quindi $\omega(G) = 3$.



La formulazione sugli spigoli dà $\frac{7}{2}$ (e $\lfloor \frac{7}{2} \rfloor = 3$ arrotondando per difetto, perché $\omega(G)$ è intero); la formulazione a clique dà direttamente 3, senza gap.

Esercizio 12.4 — Numero di clique, bound LP e numero cromatico (MCP)

La ruota W_5 ha i vertici $V = \{1, \dots, 6\}$: i vertici $1, \dots, 5$ formano un ciclo, e il vertice 6 è adiacente a tutti loro.



Domande

1. Elencare gli insiemi stabili massimali di W_5 , cioè le clique massimali di $\overline{W_5}$.
2. Scrivere il modello $\text{LP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}$ e il suo duale $D(\text{LP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}})$, e dire quale formulazione di colorazione rilassa il duale.
3. Trovare una soluzione primale e una soluzione duale di valore $\frac{7}{2}$. Che cosa si può concludere?
4. Dedurre $\omega(W_5)$ e $\chi(W_5)$ dall'integralità dei due numeri, e scrivere la catena del capitolo.

Soluzione

1. Un insieme stabile contiene al più 2 vertici del ciclo, mai due consecutivi, e il vertice 6 è adiacente a tutti gli altri. Gli insiemi stabili massimali sono $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 5\}$, $\{6\}$.
2. Con un vincolo per ogni insieme stabile massimale:

$$\begin{array}{llllll}
 \max & x_1 & + x_2 & + x_3 & + x_4 & + x_5 & + x_6 \\
 \text{soggetto a} & x_1 & & & + x_3 & & \leq 1 \\
 & x_1 & & & + x_4 & & \leq 1 \\
 & & x_2 & & + x_4 & & \leq 1 \\
 & & x_2 & & & + x_5 & \leq 1 \\
 & & & x_3 & & + x_5 & \leq 1 \\
 & & & & & & x_6 \leq 1 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 \geq 0
 \end{array}$$

Con una variabile duale non negativa π_Q per vincolo (l'indice Q scritto con i suoi vertici), il duale $D(\text{LP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}})$ è

$$\begin{array}{llllll}
 \min & \pi_{13} & + \pi_{14} & + \pi_{24} & + \pi_{25} & + \pi_{35} & + \pi_6 \\
 \text{soggetto a} & \pi_{13} & + \pi_{14} & & & & \geq 1 \\
 & & & \pi_{24} & + \pi_{25} & & \geq 1 \\
 & \pi_{13} & & & & + \pi_{35} & \geq 1 \\
 & & \pi_{14} & + \pi_{24} & & & \geq 1 \\
 & & & & \pi_{25} & + \pi_{35} & \geq 1 \\
 & & & & & & \pi_6 \geq 1 \\
 & \pi_{13}, & \pi_{14}, & \pi_{24}, & \pi_{25}, & \pi_{35}, & \pi_6 \geq 0
 \end{array}$$

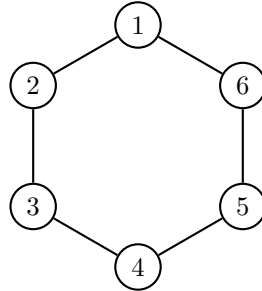
È il rilassamento lineare della formulazione a insiemi stabili $\text{ILP}_{\text{VCP}}^{\text{ST}}$ del VCP, con gli insiemi stabili massimali: ogni vertice deve essere coperto da un insieme stabile scelto.

3. Il punto primale $\bar{x}_1 = \dots = \bar{x}_5 = \frac{1}{2}$, $\bar{x}_6 = 1$ soddisfa tutti i vincoli e ha valore $\frac{5}{2} + 1 = \frac{7}{2}$. Il punto duale $\bar{\pi}_Q = \frac{1}{2}$ per le cinque coppie e $\bar{\pi}_6 = 1$ copre ogni vertice del ciclo con $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ e il vertice 6 con 1, e ha valore $\frac{7}{2}$. Valori uguali: per la dualità debole entrambi sono ottimi, e $z(\text{LP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}) = \frac{7}{2}$ (Gurobi conferma).
4. $\omega(W_5) \leq \frac{7}{2}$ e $\omega(W_5)$ è intero, quindi $\omega(W_5) \leq 3$; il triangolo $\{1, 2, 6\}$ dà $\omega(W_5) = 3$. $\chi(W_5) \geq \frac{7}{2}$, quindi $\chi(W_5) \geq 4$; la colorazione $\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5\}, \{6\}$ dà $\chi(W_5) = 4$. La catena diventa

$$\omega(W_5) = 3 < z(\text{LP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}) = \frac{7}{2} < \chi(W_5) = 4.$$

Esercizio 12.5 — Ammissibilità nelle due formulazioni (MCP)

Consideriamo il ciclo C_6 con i vertici $V = \{1, \dots, 6\}$ e gli spigoli $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{1, 6\}$,



e i cinque punti $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_6)$:

$$\bar{\mathbf{x}}^a = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \bar{\mathbf{x}}^b = (1, 1, 0, 0, 0, 0), \quad \bar{\mathbf{x}}^c = (1, 0, 1, 0, 0, 0),$$

$$\bar{\mathbf{x}}^d = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0\right), \quad \bar{\mathbf{x}}^e = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Domande

1. Scrivere i vincoli di LP_{MCP} e di $\text{LP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}$ per C_6 .
2. Per ogni punto, stabilire se è ammissibile per LP_{MCP} , per $\text{LP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}$ e per ILP_{MCP} .
3. Che cosa dicono i valori dei punti ammissibili sui due bound LP?
4. Calcolare i due bound LP con Gurobi e confrontarli con $\omega(C_6)$.

Soluzione

1. Con i 9 vincoli sui non-spigoli, il modello LP_{MCP} è

$$\begin{aligned}
 & \max \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\
 & \text{soggetto a} \quad x_1 + x_3 \leq 1 \\
 & \quad x_1 + x_4 \leq 1 \\
 & \quad x_1 + x_5 \leq 1 \\
 & \quad x_2 + x_4 \leq 1 \\
 & \quad x_2 + x_5 \leq 1 \\
 & \quad x_2 + x_6 \leq 1 \\
 & \quad x_3 + x_5 \leq 1 \\
 & \quad x_3 + x_6 \leq 1 \\
 & \quad x_4 + x_6 \leq 1 \\
 & \quad x_1 \leq 1 \\
 & \quad x_2 \leq 1 \\
 & \quad x_3 \leq 1 \\
 & \quad x_4 \leq 1 \\
 & \quad x_5 \leq 1 \\
 & \quad x_6 \leq 1 \\
 & \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

Con un vincolo per ogni insieme stabile massimale di C_6 , il modello $\text{LP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}$ è

$$\begin{aligned}
 & \max \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\
 & \text{soggetto a} \quad x_1 + x_3 + x_5 \leq 1 \\
 & \quad x_2 + x_4 + x_6 \leq 1 \\
 & \quad x_1 + x_4 \leq 1 \\
 & \quad x_2 + x_5 \leq 1 \\
 & \quad x_3 + x_6 \leq 1 \\
 & \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

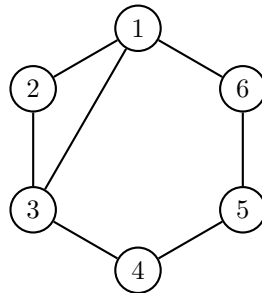
2.
 - $\bar{x}^a$: ammissibile per LP_{MCP} ; la disuguaglianza di clique di $\{1, 3, 5\}$ dà $\frac{3}{2} > 1$, quindi inammissibile per $\text{LP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}$ e ILP_{MCP} .
 - $\bar{x}^b$: ammissibile per tutti e tre i modelli: è la clique $\{1, 2\}$.
 - $\bar{x}^c$: $x_1 + x_3 = 2 > 1$ viola un vincolo su un non-spigolo: inammissibile per tutti e tre i modelli (ogni vincolo di LP_{MCP} è implicato da $\text{LP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}$).
 - $\bar{x}^d$: ammissibile per LP_{MCP} e $\text{LP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}$, non per ILP_{MCP} (frazionario).
 - $\bar{x}^e$: ammissibile per LP_{MCP} e $\text{LP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}$, non per ILP_{MCP} (frazionario).
3. $\bar{x}^a$ ha valore 3, quindi $z(\text{LP}_{\text{MCP}}) \geq 3$. In $\text{LP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}$ il miglior punto ammissibile fra i cinque è $\bar{x}^e$, di valore 2; $\bar{x}^d$ ha valore $\frac{3}{2}$ e $\bar{x}^b$ ha valore 2.

4. Gurobi restituisce $z(\text{LP}_{\text{MCP}}) = 3$ e $z(\text{LP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}) = 2$. Il secondo valore si dimostra sommando i vincoli di $\{1, 3, 5\}$ e $\{2, 4, 6\}$, che danno $\sum_{v=1}^6 x_v \leq 2$. C_6 non ha triangoli, quindi $\omega(C_6) = 2$: la formulazione a clique chiude il gap, la formulazione sugli spigoli lascia 3 contro 2.

Esercizio 12.6 — Modelli PLI del problema dell'insieme stabile massimo (MSSP)

Consideriamo il grafo $G = (V, E)$ con $V = \{1, \dots, 6\}$ e i 7 spigoli

$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}.$$



Cerchiamo un insieme stabile massimo di G .

Domande

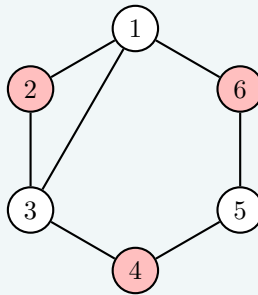
1. Quante variabili e quanti vincoli ha la formulazione sugli spigoli ILP_{MSSP} di G ? Scriverla.
2. Risolvere il modello con Gurobi: dare $z(\text{ILP}_{\text{MSSP}})$ e una soluzione ottima. È unica?
3. Scrivere le clique massimali di G e la formulazione a clique $\text{ILP}_{\text{MSSP}}^{\text{CL}}$.
4. Confrontare i valori ottimi dei rilassamenti lineari delle due formulazioni (Gurobi).

Soluzione

1. Ci sono $n = 6$ variabili binarie e un vincolo $x_u + x_v \leq 1$ per ogni spigolo di G : 7 vincoli lineari. Il modello ILP_{MSSP} è:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\
 \text{soggetto a} \quad & x_1 + x_2 \leq 1 \\
 & x_1 + x_3 \leq 1 \\
 & x_1 + x_6 \leq 1 \\
 & x_2 + x_3 \leq 1 \\
 & x_3 + x_4 \leq 1 \\
 & x_4 + x_5 \leq 1 \\
 & x_5 + x_6 \leq 1 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

2. Gurobi restituisce $z(\text{ILP}_{\text{MSSP}}) = 3$ con l'insieme stabile $\{2, 4, 6\}$. La soluzione ottima è unica.



3. Le clique massimali di G sono il triangolo $\{1, 2, 3\}$ e gli spigoli $\{1, 6\}$, $\{3, 4\}$, $\{4, 5\}$, $\{5, 6\}$: 5 clique invece di 7 spigoli, perché i tre spigoli del triangolo sono sostituiti da $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$. Il modello $\text{ILP}_{\text{MSSP}}^{\text{CL}}$ è:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\
 \text{soggetto a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\
 & x_1 + x_6 \leq 1 \\
 & x_3 + x_4 \leq 1 \\
 & x_4 + x_5 \leq 1 \\
 & x_5 + x_6 \leq 1 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

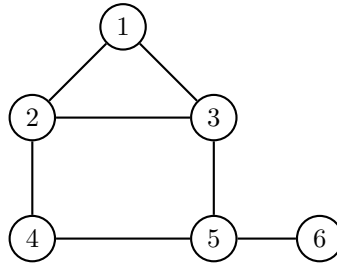
Il suo valore ottimo è ancora 3.

4. Il rilassamento lineare della formulazione sugli spigoli, con $0 \leq x_v \leq 1$, ha valore ottimo 3; il rilassamento lineare della formulazione a clique ha valore ottimo 3. Su questo grafo entrambi i bound sono pari ad $\alpha(G) = 3$: il punto $x_v = \frac{1}{2}$, di valore 3, è ammissibile per la formulazione sugli spigoli ma viola $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$, e il bound non cambia perché anche l'ottimo intero ha valore 3.

Esercizio 12.7 — Modello PLI del problema della clique massima pesata sui vertici

Consideriamo il grafo $G = (V, E)$ con $V = \{1, \dots, 6\}$ e i 7 spigoli

$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}.$$



e i pesi dei vertici

	$v = 1$	$v = 2$	$v = 3$	$v = 4$	$v = 5$	$v = 6$
w_v	2	3	4	6	5	7

Domande

1. Scrivere il modello $\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{VW}}$ del problema della clique massima pesata sui vertici su questa istanza.
2. Risolvere il modello con Gurobi: dare il valore ottimo e la clique ottima. È unica?
3. Confrontare la clique ottima con la clique massima di G , e spiegare la differenza.

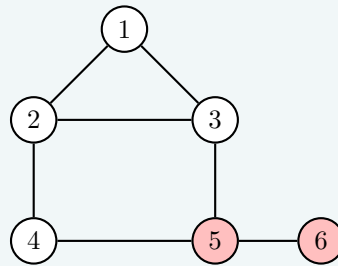
Soluzione

1. G ha $\binom{6}{2} - 7 = 8$ non-spigoli, con un vincolo ciascuno:

$$\begin{array}{llllll}
 \max & 2x_1 & + 3x_2 & + 4x_3 & + 6x_4 & + 5x_5 & + 7x_6 \\
 \text{soggetto a} & x_1 & & & + x_4 & & \leq 1 \\
 & x_1 & & & & + x_5 & \leq 1 \\
 & x_1 & & & & & + x_6 \leq 1 \\
 & & x_2 & & & + x_5 & \leq 1 \\
 & & x_2 & & & & + x_6 \leq 1 \\
 & & & x_3 & + x_4 & & \leq 1 \\
 & & & x_3 & & & + x_6 \leq 1 \\
 & & & & x_4 & & + x_6 \leq 1 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 \in \{0, 1\}
 \end{array}$$

2. Gurobi restituisce il valore ottimo 12 con $\tilde{x}_5 = \tilde{x}_6 = 1$: la clique $\{5, 6\}$, di peso

$5 + 7 = 12$. L'enumerazione delle clique dà come secondo miglior valore 11 (clique $\{4, 5\}$): la soluzione ottima è unica.

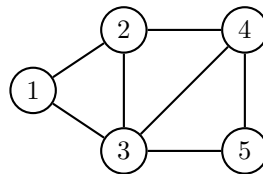


3. La clique massima di G è il triangolo $\{1, 2, 3\}$, con 3 vertici ma peso solo $2 + 3 + 4 = 9$. I due modelli hanno gli stessi vincoli, quindi le stesse soluzioni ammissibili (le clique di G); cambia solo la funzione obiettivo, e i vertici leggeri del triangolo perdono contro lo spigolo pesante $\{5, 6\}$.

Esercizio 12.8 — Modello PLI del problema della clique massima pesata sugli spigoli

Consideriamo il grafo $G = (V, E)$ con $V = \{1, \dots, 5\}$ e i 7 spigoli

$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}.$$



e i pesi degli spigoli

spigolo	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$	$\{2, 4\}$	$\{3, 4\}$	$\{3, 5\}$	$\{4, 5\}$
r_{uv}	2	3	1	4	2	5	6

Domande

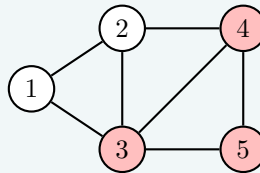
1. Contare le variabili e i vincoli del modello $\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{EW}}$ del problema della clique massima pesata sugli spigoli su questa istanza, e scriverlo.
2. Risolvere il modello con Gurobi: dare il valore ottimo, la clique ottima e le variabili y_{uv} pari a 1.
3. Verificare il risultato elencando le clique massimali di G con il peso totale dei loro spigoli.
4. Spiegare perché i vincoli $y_{uv} \geq x_u + x_v - 1$ non servono nel modello.

Soluzione

1. Ci sono $n = 5$ variabili x_v e $m = 7$ variabili y_{uv} , quindi 12 variabili binarie. Ci sono $2m = 14$ vincoli $y_{uv} \leq x_u$, $y_{uv} \leq x_v$ e un vincolo per ogni non-spigolo, 3 in tutto: 17 vincoli lineari. Il modello è:

$$\begin{array}{ll}
 \max & 2y_{12} + 3y_{13} + y_{23} + 4y_{24} + 2y_{34} + 5y_{35} + 6y_{45} \\
 \text{soggetto a} & y_{12} - x_1 \leq 0 \\
 & y_{12} - x_2 \leq 0 \\
 & y_{13} - x_1 \leq 0 \\
 & y_{13} - x_3 \leq 0 \\
 & y_{23} - x_2 \leq 0 \\
 & y_{23} - x_3 \leq 0 \\
 & y_{24} - x_2 \leq 0 \\
 & y_{24} - x_4 \leq 0 \\
 & y_{34} - x_3 \leq 0 \\
 & y_{34} - x_4 \leq 0 \\
 & y_{35} - x_3 \leq 0 \\
 & y_{35} - x_5 \leq 0 \\
 & y_{45} - x_4 \leq 0 \\
 & y_{45} - x_5 \leq 0 \\
 & x_1 + x_4 \leq 1 \\
 & x_1 + x_5 \leq 1 \\
 & x_2 + x_5 \leq 1 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1\} \\
 & y_{12}, y_{13}, y_{23}, y_{24}, y_{34}, y_{35}, y_{45} \in \{0, 1\}
 \end{array}$$

2. Gurobi restituisce il valore ottimo 13 con $\tilde{x}_3 = \tilde{x}_4 = \tilde{x}_5 = 1$ e $\tilde{y}_{34} = \tilde{y}_{35} = \tilde{y}_{45} = 1$, con tutte le altre variabili pari a 0: la clique $\{3, 4, 5\}$, di peso $2 + 5 + 6 = 13$.



3. Le clique massimali di G e i loro pesi sono:

- $\{1, 2, 3\}$: $2 + 3 + 1 = 6$;
- $\{2, 3, 4\}$: $1 + 4 + 2 = 7$;
- $\{3, 4, 5\}$: $2 + 5 + 6 = 13$;

Ogni clique è contenuta in una di esse e i pesi sono positivi, quindi il valore ottimo è 13, raggiunto solo da $\{3, 4, 5\}$.

4. Se entrambi gli estremi di $\{u, v\}$ sono selezionati, i vincoli permettono $y_{uv} = 1$, e poiché $r_{uv} > 0$ la funzione obiettivo preferisce $y_{uv} = 1$ a $y_{uv} = 0$: ogni soluzione ottima ha $y_{uv} = \min\{x_u, x_v\}$. Il vincolo $y_{uv} \geq x_u + x_v - 1$ servirebbe solo con pesi negativi.

Formulazioni dei problemi di routing

Formulazioni usate in questi esercizi. I modelli del [Capitolo 13 «Formulazioni dei problemi di routing»](#), sugli archi $A = \{(i, j) : i, j \in \mathcal{V}, i \neq j\}$. Il modello $\text{ILP}_{\text{TSP}}^{\text{MTZ}}$:

$$\min \sum_{(i,j) \in A} d_{ij} x_{ij} \quad (\text{T0})$$

$$\text{soggetto a } \sum_{j \in \mathcal{V}, j \neq i} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in \mathcal{V}, \quad (\text{T1})$$

$$\sum_{i \in \mathcal{V}, i \neq j} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in \mathcal{V}, \quad (\text{T2})$$

$$u_i - u_j + (n - 1) x_{ij} \leq n - 2, \quad \forall i, j \in \mathcal{V} \setminus \{1\}, i \neq j, \quad (\text{MTZ})$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in A, \quad (\text{T3})$$

$$1 \leq u_i \leq n - 1, \quad \forall i \in \mathcal{V} \setminus \{1\}. \quad (\text{T4})$$

Il modello $\text{ILP}_{\text{TSP}}^{\text{DFJ}}$:

$$\min \sum_{(i,j) \in A} d_{ij} x_{ij} \quad (\text{T0})$$

$$\text{soggetto a } \sum_{j \in \mathcal{V}, j \neq i} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in \mathcal{V}, \quad (\text{T1})$$

$$\sum_{i \in \mathcal{V}, i \neq j} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in \mathcal{V}, \quad (\text{T2})$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S, j \neq i} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad \forall S \subseteq \mathcal{V} \setminus \{1\}, |S| \geq 2, \quad (\text{SEC})$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in A. \quad (\text{T3})$$

Il rilassamento di assegnamento LP-0_{TSP} mantiene solo (T0), (T1), (T2) e $x_{ij} \geq 0$. I rilassamenti $\text{LP}_{\text{TSP}}^{\text{MTZ}}$ e $\text{LP}_{\text{TSP}}^{\text{DFJ}}$ rilassano (T3) in $x_{ij} \geq 0$ (i bound $x_{ij} \leq 1$ sono implicati da (T1)). Il modello ILP_{ATSP} del TSP asimmetrico è il modello $\text{ILP}_{\text{TSP}}^{\text{DFJ}}$ con distanze d_{ij} che possono differire da d_{ji} .

Esercizio 13.1 — Il modello MTZ del TSP (1)

Consideriamo un'istanza del TSP con $\mathcal{V} = \{1, \dots, 4\}$ ($n = 4$ città) e la matrice delle distanze simmetrica

d_{ij}	1	2	3	4
1	—	3	5	4
2	3	—	4	6
3	5	4	—	2
4	4	6	2	—

Domande

1. Contare le variabili e i vincoli (oltre ai domini) del modello $\text{ILP}_{\text{TSP}}^{\text{MTZ}}$ per $n = 4$.
2. Scrivere il modello $\text{ILP}_{\text{TSP}}^{\text{MTZ}}$ per questa istanza.
3. Elencare i giri distinti con le loro lunghezze e indicare il giro ottimo σ .
4. Scrivere i valori delle variabili x_{ij} e u_i che rappresentano σ e verificare uno per uno i vincoli (MTZ).
5. Risolvere con Gurobi il rilassamento lineare $\text{LP}_{\text{TSP}}^{\text{MTZ}}$ e confrontarne il valore con il valore ottimo.

Soluzione

1. Ci sono $n(n-1) = 12$ variabili binarie x_{ij} e $n-1 = 3$ variabili continue u_i . Ci sono $2n = 8$ vincoli di grado e $(n-1)(n-2) = 6$ vincoli (MTZ), quindi 14 vincoli lineari.
2. Con $A = \{(i, j) : i, j \in \mathcal{V}, i \neq j\}$ il modello è:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 3x_{12} + 5x_{13} + 4x_{14} + 3x_{21} + 4x_{23} + 6x_{24} + 5x_{31} \\
 & + 4x_{32} + 2x_{34} + 4x_{41} + 6x_{42} + 2x_{43} \\
 \text{soggetto a} \quad & x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \\
 & x_{21} + x_{23} + x_{24} = 1 \\
 & x_{31} + x_{32} + x_{34} = 1 \\
 & x_{41} + x_{42} + x_{43} = 1 \\
 & x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1 \\
 & x_{12} + x_{32} + x_{42} = 1 \\
 & x_{13} + x_{23} + x_{43} = 1 \\
 & x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1 \\
 & u_2 - u_3 + 3x_{23} \leq 2 \\
 & u_2 - u_4 + 3x_{24} \leq 2 \\
 & u_3 - u_2 + 3x_{32} \leq 2 \\
 & u_3 - u_4 + 3x_{34} \leq 2 \\
 & u_4 - u_2 + 3x_{42} \leq 2 \\
 & u_4 - u_3 + 3x_{43} \leq 2 \\
 & x_{12}, x_{13}, x_{14}, \dots, x_{43} \in \{0, 1\} \\
 & u_2, u_3, u_4 \geq 1 \\
 & u_2, u_3, u_4 \leq 3
 \end{aligned}$$

3. Partendo dalla città 1, e contando ogni giro una sola volta (in un solo verso), i giri distinti sono $\frac{(n-1)!}{2} = 3$:

giro	lunghezza
(1, 2, 3, 4)	$3 + 4 + 2 + 4 = 13$
(1, 2, 4, 3)	$3 + 6 + 2 + 5 = 16$
(1, 3, 2, 4)	$5 + 4 + 6 + 4 = 19$

Il giro ottimo è $\sigma = (1, 2, 3, 4)$, di lunghezza $L(\sigma) = 13$.

4. Il giro usa gli archi

$$x_{12} = 1, \quad x_{23} = 1, \quad x_{34} = 1, \quad x_{41} = 1$$

e tutte le altre x_{ij} valgono 0. Le posizioni dopo la città 1 sono $u_2 = 1, u_3 = 2, u_4 = 3$. I vincoli (MTZ) danno:

- $(i, j) = (2, 3)$: $1 - 2 + 3 \cdot 1 = 2 \leq 2$
- $(i, j) = (2, 4)$: $1 - 3 + 3 \cdot 0 = -2 \leq 2$
- $(i, j) = (3, 2)$: $2 - 1 + 3 \cdot 0 = 1 \leq 2$
- $(i, j) = (3, 4)$: $2 - 3 + 3 \cdot 1 = 2 \leq 2$

- $(i, j) = (4, 2)$: $3 - 1 + 3 \cdot 0 = 2 \leq 2$
- $(i, j) = (4, 3)$: $3 - 2 + 3 \cdot 0 = 1 \leq 2$

Valgono tutti; quelli degli archi selezionati (i, j) con $i, j \neq 1$ valgono all'uguaglianza.

5. Gurobi dà $z(\text{LP}_{\text{TSP}}^{\text{MTZ}}) = 12$, contro il valore ottimo 13: il rilassamento lascia un gap di 1.

Esercizio 13.2 — Il modello DFJ del TSP (1)

Consideriamo un'istanza del TSP con $\mathcal{V} = \{1, \dots, 4\}$ ($n = 4$ città) e la matrice delle distanze simmetrica

d_{ij}	1	2	3	4
1	—	3	5	4
2	3	—	4	6
3	5	4	—	2
4	4	6	2	—

Domande

1. Contare i vincoli di eliminazione dei sottogiri del modello $\text{ILP}_{\text{TSP}}^{\text{DFJ}}$ per $n = 4$ e scriverli.
2. Gli archi $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$ soddisfano i vincoli di grado. Trovare il vincolo di eliminazione dei sottogiri che violano.
3. Fare lo stesso per gli archi $(1, 3)$, $(3, 1)$, $(2, 4)$, $(4, 2)$, che formano due sottogiri, entrambi di lunghezza 22.
4. Risolvere con Gurobi il rilassamento di assegnamento LP-0_{TSP} (solo vincoli di grado), il rilassamento $\text{LP}_{\text{TSP}}^{\text{DFJ}}$ e il modello $\text{ILP}_{\text{TSP}}^{\text{DFJ}}$, e confrontare i valori.

Soluzione

1. Gli insiemi sono i sottoinsiemi $S \subseteq \{2, 3, 4\}$ con $|S| \geq 2$: sono $2^{n-1} - n = 4$. I vincoli sono

$$S = \{2, 3\} : x_{23} + x_{32} \leq 1$$

$$S = \{2, 4\} : x_{24} + x_{42} \leq 1$$

$$S = \{3, 4\} : x_{34} + x_{43} \leq 1$$

$$S = \{2, 3, 4\} : x_{23} + x_{24} + x_{32} + x_{34} + x_{42} + x_{43} \leq 2$$

2. Gli archi formano i sottogiri $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ e $3 \rightarrow 4 \rightarrow 3$, di lunghezza totale 10. Il sottogiro su $\{3, 4\}$ non contiene la città 1: per $S = \{3, 4\}$ il vincolo dà $x_{34} + x_{43} = 2 > 1$. Gli altri tre vincoli valgono, per esempio $S = \{2, 3, 4\}$ dà $0+0+1+0+1+0 = 2 \leq 2$.
3. Gli archi formano $1 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ e $2 \rightarrow 4 \rightarrow 2$. Il sottogiro senza la città 1 è su $\{2, 4\}$: $x_{24} + x_{42} = 2 > 1$. Basta un insieme S per ogni soluzione con sottogiri, perché uno dei sottogiri non contiene mai la città 1.

4. Gurobi dà $z(\text{LP-0}_{\text{TSP}}) = 10$ per il rilassamento di assegnamento, $z(\text{LP}_{\text{TSP}}^{\text{DFJ}}) = 13$ e $z(\text{ILP}_{\text{TSP}}^{\text{DFJ}}) = 13$, raggiunto dal giro $(1, 2, 3, 4)$. I vincoli di eliminazione dei sottogiri alzano il bound da 10 a 13, che è il valore ottimo.

Esercizio 13.3 — Soluzioni ammissibili dei modelli del TSP (1)

Consideriamo un'istanza del TSP con $\mathcal{V} = \{1, \dots, 5\}$ ($n = 5$ città) e la matrice delle distanze simmetrica

d_{ij}	1	2	3	4	5
1	—	2	3	3	7
2	2	—	4	12	6
3	3	4	—	6	11
4	3	12	6	—	5
5	7	6	11	5	—

Consideriamo le seguenti soluzioni candidate (gli archi non elencati hanno $x_{ij} = 0$):

- (a) gli archi del giro $(1, 3, 2, 5, 4)$, con $u_2 = 2, u_3 = 1, u_4 = 4, u_5 = 3$;
- (b) gli archi dello stesso giro, con $u_2 = 1, u_3 = 2, u_4 = 3, u_5 = 4$;
- (c) gli archi $(1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 5), (5, 4)$, con $u_2 = 1, u_3 = 2, u_4 = 3, u_5 = 4$;
- (d) $x_{ij} = \frac{1}{4}$ per ogni arco (i, j) , con $u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = 1$.

Domande

1. Verificare i vincoli di grado per ogni candidata.
2. Per ogni candidata, stabilire se soddisfa i vincoli (MTZ) con le posizioni date e se le sue variabili di arco soddisfano i vincoli di eliminazione dei sottogiri. Indicare un vincolo violato, quando c'è.
3. Quali candidate rappresentano una soluzione ammissibile dei modelli interi? Per la candidata (c), mostrare che nessuna scelta delle posizioni u_i soddisfa i vincoli (MTZ).
4. Calcolare il valore obiettivo della candidata (d) e confrontarlo con il valore ottimo e con $z(\text{LP}_{\text{TSP}}^{\text{MTZ}})$ (usare Gurobi).

Soluzione

1. In (a), (b) e (c) ogni città ha un arco uscente e un arco entrante. In (d) ogni città ha 4 archi uscenti e 4 archi entranti di valore $\frac{1}{4}$: entrambe le somme valgono 1. Tutti i vincoli di grado valgono.
2. (a) Gli archi formano un giro, e le posizioni sono quelle del giro: ogni arco selezionato (i, j) con $i, j \neq 1$ dà $u_j = u_i + 1$, e ogni vincolo vale. Valgono anche i vincoli di eliminazione dei sottogiri.
(b) Gli archi formano lo stesso giro, quindi i vincoli di eliminazione dei sottogiri

valgono. Le posizioni sono sbagliate: l'arco $(3, 2)$ è selezionato e $u_3 - u_2 + 4x_{32} = 2 - 1 + 4 = 5 > 3$.

(c) Con le posizioni date l'arco $(5, 4)$ dà $u_5 - u_4 + 4x_{54} = 4 - 3 + 4 = 5 > 3$. Il sottogiro su $S = \{4, 5\}$ viola $x_{45} + x_{54} \leq 1$, poiché $x_{45} + x_{54} = 2$.

(d) Ogni arco ha $x_{ij} = \frac{1}{4}$, quindi con $u_i = 1$ ogni vincolo (MTZ) dà $4 \cdot \frac{1}{4} = 1 \leq 3$. Un insieme S contiene $|S|(|S| - 1)$ archi, di valore totale $\frac{|S|(|S|-1)}{4} \leq |S| - 1$ poiché $|S| \leq 4$: tutti i vincoli di eliminazione dei sottogiri valgono.

3. Solo (a) e (b) sono intere e formano un giro. La candidata (a) è ammissibile per entrambi i modelli interi; gli archi di (b) sono ammissibili per $\text{ILP}_{\text{TSP}}^{\text{DFJ}}$, e diventano ammissibili per $\text{ILP}_{\text{TSP}}^{\text{MTZ}}$ con le posizioni di (a). La candidata (d) è ammissibile solo per i due rilassamenti.

Per (c), gli archi selezionati $(4, 5)$ e $(5, 4)$ impongono $u_5 \geq u_4 + 1$ e $u_4 \geq u_5 + 1$. Sommando otteniamo $0 \geq 2$, che è impossibile: nessuna scelta delle posizioni funziona, perché il sottogiro $4 \rightarrow 5 \rightarrow 4$ non contiene la città 1.

4. Il valore di (d) è un quarto della somma delle d_{ij} su tutti gli archi, ossia $\frac{2 \cdot 59}{4} = \frac{59}{2}$. È maggiore del valore ottimo $L((1, 3, 2, 5, 4)) = 21$, quindi non migliora il bound $z(\text{LP}_{\text{TSP}}^{\text{MTZ}}) = 20$ dato da Gurobi; mostra solo che i rilassamenti contengono punti frazionari lontani da ogni giro.

Esercizio 13.4 — Confronto fra i rilassamenti del TSP (1)

Consideriamo un'istanza del TSP con $\mathcal{V} = \{1, \dots, 5\}$ ($n = 5$ città) e la matrice delle distanze simmetrica

d_{ij}	1	2	3	4	5
1	—	5	12	2	9
2	5	—	2	8	12
3	12	2	—	9	9
4	2	8	9	—	5
5	9	12	9	5	—

Domande

1. Contare le variabili e i vincoli (oltre ai domini) dei tre rilassamenti: LP-0_{TSP} (solo vincoli di grado), $\text{LP}_{\text{TSP}}^{\text{MTZ}}$ e $\text{LP}_{\text{TSP}}^{\text{DFJ}}$.
2. Risolvere con Gurobi i tre rilassamenti e riportarne le soluzioni ottime.
3. Trovare il giro ottimo enumerando i 12 giri distinti e calcolare il gap $\frac{z - \text{LB}}{\text{LB}}$ di ogni bound.
4. Mostrare che la soluzione ottima di $\text{LP}_{\text{TSP}}^{\text{MTZ}}$ trovata da Gurobi sta nella regione debole della Proposizione 13.3 del capitolo e che viola vincoli di eliminazione dei sottogiri.

Soluzione

1. Tutti e tre usano le 20 variabili di arco; il rilassamento MTZ aggiunge le 4 posizioni. I vincoli sono:

rilassamento	variabili	vincoli
LP-0 _{TSP} (solo vincoli di grado)	20	10
LP _{TSP} ^{MTZ}	20 + 4	10 + 12
LP _{TSP} ^{DFJ}	20	10 + 11

2. • LP-0_{TSP}: valore 20, con $x_{15} = x_{23} = x_{32} = x_{41} = x_{54} = 1$: i sottogiri $1 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 1$, $2 \rightarrow 3 \rightarrow 2$.
- LP_{TSP}^{MTZ}: valore $\frac{43}{2}$, con $x_{14} = x_{23} = x_{32} = x_{45} = \frac{3}{4}$, $x_{51} = \frac{1}{2}$, $x_{12} = x_{21} = x_{35} = x_{41} = x_{53} = x_{54} = \frac{1}{4}$ e $u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = 1$.
- LP_{TSP}^{DFJ}: valore 23, con $x_{12} = x_{23} = x_{35} = x_{41} = x_{54} = 1$, che è il giro $(1, 2, 3, 5, 4)$.
3. Il giro ottimo è $\sigma = (1, 2, 3, 5, 4)$, di lunghezza $L(\sigma) = 23$. I gap sono:

bound	valore	gap da 23
LP-0 _{TSP} (solo vincoli di grado)	20	15.0%
LP _{TSP} ^{MTZ}	$\frac{43}{2}$	7.0%
LP _{TSP} ^{DFJ}	23	0.0%

Il rilassamento DFJ chiude il gap su questa istanza.

4. Ogni arco (i, j) con $i, j \neq 1$ ha $x_{ij} \leq \frac{3}{4} = \frac{n-2}{n-1}$, e tutte le posizioni valgono 1: è la regione debole della Proposizione 13.3, dove ogni vincolo (MTZ) dà $4x_{ij} \leq 3$. Per $S = \{2, 3\}$ gli archi dentro S hanno valore totale $\frac{3}{2} > 1$: il vincolo di eliminazione dei sottogiri di S è violato, e il rilassamento DFJ taglia questo punto.

Esercizio 13.5 — Aggiunta dei vincoli di eliminazione dei sottogiri (1)

Consideriamo un'istanza del TSP con $\mathcal{V} = \{1, \dots, 5\}$ ($n = 5$ città) e la matrice delle distanze simmetrica

d_{ij}	1	2	3	4	5
1	—	4	10	2	8
2	4	—	11	2	5
3	10	11	—	4	2
4	2	2	4	—	2
5	8	5	2	2	—

Partiamo dai soli vincoli di grado e aggiungiamo i vincoli di eliminazione dei sottogiri uno alla volta, solo quando sono violati.

Domande

1. Risolvere con Gurobi il rilassamento di assegnamento $LP-0_{TSP}$ (solo vincoli di grado) e descriverne la soluzione ottima.
2. Aggiungere il vincolo di eliminazione del sottogiro che non contiene la città 1, risolvere di nuovo e ripetere, finché la soluzione è un giro. Indicare il valore di ogni rilassamento.
3. Calcolare il valore ottimo per enumerazione e il gap $\frac{z-LB}{LB}$ di ogni rilassamento risolto, insieme al rilassamento MTZ.

Soluzione

1. Gurobi dà valore 12 con $x_{14} = 1, x_{21} = 1, x_{35} = 1, x_{42} = 1, x_{53} = 1$. Gli archi formano i sottogiri $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ e $3 \rightarrow 5 \rightarrow 3$. La soluzione soddisfa i vincoli di grado ma non è un giro: le iterazioni seguenti partono da questa soluzione.

2. Iterazione 1

Gurobi dà valore 12 con $x_{14} = 1, x_{21} = 1, x_{35} = 1, x_{42} = 1, x_{53} = 1$. Gli archi formano i sottogiri $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ e $3 \rightarrow 5 \rightarrow 3$. Il sottogiro su $S = \{3, 5\}$ viola il suo vincolo, che aggiungiamo:

$$x_{35} + x_{53} \leq 1.$$

Iterazione 2

Gurobi dà valore 16 con $x_{12} = 1, x_{21} = 1, x_{34} = 1, x_{45} = 1, x_{53} = 1$. Gli archi formano i sottogiri $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ e $3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 3$. Il sottogiro su $S = \{3, 4, 5\}$ viola il suo vincolo, che aggiungiamo:

$$x_{34} + x_{35} + x_{43} + x_{45} + x_{53} + x_{54} \leq 2.$$

Iterazione 3

Gurobi dà valore 17 con $x_{12} = 1, x_{25} = 1, x_{34} = 1, x_{41} = 1, x_{53} = 1$. Gli archi formano il giro $(1, 2, 5, 3, 4)$. Nessun vincolo di eliminazione dei sottogiri è violato, e la procedura termina.

3. L'enumerazione dà il giro ottimo $(1, 2, 5, 3, 4)$, di lunghezza 17, che è il giro trovato all'ultima iterazione. Gurobi dà $z(LP_{TSP}^{MTZ}) = 14$. I gap sono:

rilassamento	valore	gap da 17
$LP-0_{TSP}$ (solo vincoli di grado)	12	41.7%
LP_{TSP}^{MTZ}	14	21.4%
con 1 vincolo di eliminazione dei sottogiri	16	6.2%
con 2 vincoli di eliminazione dei sottogiri	17	0.0%

Due vincoli di eliminazione dei sottogiri, sugli 11 del modello DFJ, bastano a chiudere il gap.

Esercizio 13.6 — Modello PLI del TSP asimmetrico (ATSP)

Consideriamo un'istanza dell'ATSP con $\mathcal{V} = \{1, \dots, 4\}$ ($n = 4$ città) e la matrice delle distanze asimmetrica

d_{ij}	1	2	3	4
1	—	8	7	5
2	8	—	3	6
3	9	8	—	8
4	2	9	9	—

dove d_{ij} è la distanza dalla città i alla città j .

Domande

1. Contare le variabili e i vincoli del modello ILP_{ATSP} del capitolo (il modello DFJ sugli archi, con $d_{ij} \neq d_{ji}$ ammesso) e scriverlo per questa istanza.
2. Risolvere con Gurobi il modello con i soli vincoli di grado. Descrivere la soluzione e trovare il vincolo di eliminazione dei sottogiri che viola.
3. Risolvere con Gurobi il modello ILP_{ATSP} : indicare il giro ottimo e la sua lunghezza.
4. Elencare le lunghezze di tutti i giri, ciascuno nel suo verso, e verificare il risultato. Confrontare il giro ottimo con lo stesso giro percorso al contrario.

Soluzione

1. Ci sono $n(n-1) = 12$ variabili binarie x_{ij} , $2n = 8$ vincoli di grado e $2^{n-1} - n = 4$ vincoli di eliminazione dei sottogiri, uno per ogni $S \subseteq \{2, 3, 4\}$ con $|S| \geq 2$. Il modello è:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 8x_{12} + 7x_{13} + 5x_{14} + 8x_{21} + 3x_{23} + 6x_{24} + 9x_{31} \\
 & + 8x_{32} + 8x_{34} + 2x_{41} + 9x_{42} + 9x_{43} \\
 \text{soggetto a} \quad & x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \\
 & x_{21} + x_{23} + x_{24} = 1 \\
 & x_{31} + x_{32} + x_{34} = 1 \\
 & x_{41} + x_{42} + x_{43} = 1 \\
 & x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1 \\
 & x_{12} + x_{32} + x_{42} = 1 \\
 & x_{13} + x_{23} + x_{43} = 1 \\
 & x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1 \\
 & x_{23} + x_{32} \leq 1 \\
 & x_{24} + x_{42} \leq 1 \\
 & x_{34} + x_{43} \leq 1 \\
 & x_{23} + x_{24} + x_{32} + x_{34} + x_{42} + x_{43} \leq 2 \\
 & x_{12}, x_{13}, x_{14}, \dots, x_{43} \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

2. Gurobi restituisce il valore 18 con $x_{14} = x_{23} = x_{32} = x_{41} = 1$: due sottogiri, $1 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ e $2 \rightarrow 3 \rightarrow 2$. Il sottogiro su $S = \{2, 3\}$ usa $2 > |S| - 1 = 1$ archi dentro S : viola il vincolo $x_{23} + x_{32} \leq 1$.
3. Gurobi restituisce $z(\text{ILP}_{\text{ATSP}}) = 21$ con il giro $\tilde{\sigma} = (1, 2, 3, 4)$, ossia $\tilde{x}_{12} = \tilde{x}_{23} = \tilde{x}_{34} = \tilde{x}_{41} = 1$, di lunghezza $8 + 3 + 8 + 2 = 21$. Il modello MTZ dà lo stesso valore.
4. I $(n - 1)! = 6$ giri che partono dalla città 1 sono:

giro	lunghezza
$(1, 2, 3, 4)$	$8 + 3 + 8 + 2 = 21$
$(1, 2, 4, 3)$	$8 + 6 + 9 + 9 = 32$
$(1, 3, 2, 4)$	$7 + 8 + 6 + 2 = 23$
$(1, 3, 4, 2)$	$7 + 8 + 9 + 8 = 32$
$(1, 4, 2, 3)$	$5 + 9 + 3 + 9 = 26$
$(1, 4, 3, 2)$	$5 + 9 + 8 + 8 = 30$

Il minimo 21 è raggiunto solo da $(1, 2, 3, 4)$: il giro ottimo è unico. Percorso al contrario è il giro $(1, 4, 3, 2)$, di lunghezza 30: nell'ATSP i due versi sono soluzioni diverse.

Formulazioni dei problemi di scheduling

Formulazioni usate in questi esercizi. Il modello $ILP_{P||C_{\max}}$ del capitolo [Formulazioni dei problemi di scheduling](#), con l'insieme delle macchine $\mathcal{H} = \{1, \dots, m\}$:

$$\begin{aligned} \min \quad & C_{\max} & (P0) \\ \text{soggetto a} \quad & \sum_{h \in \mathcal{H}} x_{jh} = 1, & \forall j \in \mathcal{J}, \quad (P1) \\ & - \sum_{j \in \mathcal{J}} t_j x_{jh} + C_{\max} \geq 0, & \forall h \in \mathcal{H}, \quad (P2) \\ & x_{jh} \in \{0, 1\}, & \forall j \in \mathcal{J}, \forall h \in \mathcal{H}, \quad (P3) \\ & C_{\max} \geq 0. & (P4) \end{aligned}$$

Il rilassamento $LP-0_{P||C_{\max}}$ rilassa (P3) in $x_{jh} \geq 0$; il rilassamento $LP_{P||C_{\max}}$ ha anche $x_{jh} \leq 1$. Per ogni istanza

$$z(LP-0_{P||C_{\max}}) = z(LP_{P||C_{\max}}) = \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} t_j}{m}, \quad (P5)$$

raggiunto da $\tilde{x}_{jh} = \frac{1}{m}$; una soluzione duale ottima è $\tilde{\pi}_h = \frac{1}{m}$ e $\tilde{\mu}_j = \frac{t_j}{m}$. Le disuguaglianze

$$C_{\max} \geq t_j \quad (j \in \mathcal{J}), \quad C_{\max} \geq \left\lceil \frac{\sum_j t_j}{m} \right\rceil \quad (P6)$$

sono valide per il modello $ILP_{P||C_{\max}}$.

Esercizio 14.1 — Modello PLI di $P||C_{\max}$ (1)

Consideriamo $m = 2$ macchine identiche e un insieme $\mathcal{J} = \{1, \dots, 5\}$ di 5 lavori ($n = 5$) con i seguenti tempi di processamento:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$
t_j	7	5	4	3	3

Domande

1. Contare le variabili e i vincoli (oltre ai domini) del modello $\text{ILP}_{P\|C_{\max}}$ per questa istanza.
2. Scrivere il modello $\text{ILP}_{P\|C_{\max}}$ per questa istanza.
3. Calcolare il lower bound $\max \left\{ \max_j t_j, \left\lceil \frac{\sum_j t_j}{m} \right\rceil \right\}$ sul makespan.
4. Risolvere il modello con Gurobi, indicare una schedula ottima e dire quante soluzioni ottime ha il modello.

Soluzione

1. Ci sono $nm = 5 \cdot 2 = 10$ variabili binarie x_{jh} e la variabile continua $C_{\max}$, quindi 11 variabili. Ci sono $n = 5$ vincoli di assegnamento e $m = 2$ vincoli di carico, quindi 7 vincoli lineari.
2. Con $\mathcal{H} = \{1, 2\}$ il modello è:

$$\begin{array}{llll}
 \min & C_{\max} & & \\
 \text{soggetto a} & x_{11} + x_{12} & = & 1 \\
 & x_{21} + x_{22} & = & 1 \\
 & x_{31} + x_{32} & = & 1 \\
 & x_{41} + x_{42} & = & 1 \\
 & x_{51} + x_{52} & = & 1 \\
 & -7x_{11} - 5x_{21} - 4x_{31} - 3x_{41} - 3x_{51} + C_{\max} & \geq & 0 \\
 & -7x_{12} - 5x_{22} - 4x_{32} - 3x_{42} - 3x_{52} + C_{\max} & \geq & 0 \\
 & x_{11}, x_{12}, x_{21}, \dots, x_{52} & \in & \{0, 1\} \\
 & C_{\max} & \geq & 0
 \end{array}$$

3. Il tempo di processamento totale è $7 + 5 + 4 + 3 + 3 = 22$, quindi

$$\max \{7, \lceil 22/2 \rceil\} = \max \{7, 11\} = 11.$$

4. Gurobi dà $z(\text{ILP}_{P\|C_{\max}}) = 11$, uguale al lower bound. Una schedula ottima è $J_1 = \{1, 3\}$ e $J_2 = \{2, 4, 5\}$, con carichi 11 e 11: $\tilde{x}_{11} = 1, \tilde{x}_{31} = 1, \tilde{x}_{22} = 1, \tilde{x}_{42} = 1, \tilde{x}_{52} = 1, C_{\max} = 11$.

Enumerando i $2^5 = 32$ assegnamenti, la partizione dei lavori è unica: il lavoro 1 può condividere una macchina solo con il lavoro 3. Scambiando le due macchine otteniamo la seconda soluzione ottima del modello, quindi le soluzioni ottime sono 2.

Esercizio 14.2 — Rilassamento lineare del modello di $P\|C_{\max}$ (1)

Consideriamo $m = 3$ macchine identiche e un insieme $\mathcal{J} = \{1, \dots, 6\}$ di 6 lavori ($n = 6$) con i seguenti tempi di processamento:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$
t_j	8	6	5	4	4	2

Domande

1. Risolvere $\text{LP-0}_{P\|C_{\max}}$ con Gurobi e confrontarne il valore con la formula (P5).
2. Scrivere le soluzioni primale e duale del capitolo per questa istanza e verificarne l'ammissibilità e l'uguaglianza dei valori obiettivo.
3. Risolvere con Gurobi il modello $\text{ILP}_{P\|C_{\max}}$ e calcolare il rapporto $\frac{z(\text{LP}_{P\|C_{\max}})}{z(\text{ILP}_{P\|C_{\max}})}$. Confrontarlo con $\frac{1}{m}$.

Soluzione

Usiamo il valore (P5) dei rilassamenti, le soluzioni primale e duale date con esso e le disuguaglianze valide (P6) del riquadro all'inizio del capitolo.

1. Gurobi dà $z(\text{LP-0}_{P\|C_{\max}}) = \frac{29}{3}$, e la formula dà $\frac{\sum_j t_j}{m} = \frac{29}{3}$, lo stesso valore. Aggiungere i bound $x_{jh} \leq 1$ non lo cambia.
2. Primale: $\tilde{x}_{jh} = \frac{1}{3}$ per ogni lavoro e macchina, e $\tilde{C}_{\max} = \frac{29}{3}$. Ogni lavoro ha $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$, e ogni macchina ha carico $\frac{1}{3} \sum_j t_j = \frac{29}{3} = \tilde{C}_{\max}$: tutti i vincoli valgono all'uguaglianza.
Duale: $\tilde{\pi}_h = \frac{1}{3}$ per ogni macchina e $\tilde{\mu}_j = \frac{t_j}{3}$, ossia

$$\tilde{\mu}_1 = \frac{8}{3}, \quad \tilde{\mu}_2 = 2, \quad \tilde{\mu}_3 = \frac{5}{3}, \quad \tilde{\mu}_4 = \frac{4}{3}, \quad \tilde{\mu}_5 = \frac{4}{3}, \quad \tilde{\mu}_6 = \frac{2}{3}.$$

Ogni vincolo $\mu_j - t_j \pi_h \leq 0$ vale all'uguaglianza, e $\sum_h \tilde{\pi}_h = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$. Il valore duale è $\sum_j \tilde{\mu}_j = \frac{29}{3}$, uguale al valore primale: entrambe le soluzioni sono ottime.

3. Gurobi dà $z(\text{ILP}_{P\|C_{\max}}) = 10$ (per esempio $J_1 = \{1, 6\}$, $J_2 = \{2, 4\}$, $J_3 = \{3, 5\}$, con carichi 10, 10, 9). Il rapporto è $\frac{\frac{29}{3}}{10} = \frac{29}{30}$, molto maggiore di $\frac{1}{3}$: il caso peggiore del capitolo richiede un lavoro molto lungo.

Esercizio 14.3 — Soluzioni ammissibili del modello di $P\|C_{\max}$ (1)

Consideriamo $m = 2$ macchine identiche e un insieme $\mathcal{J} = \{1, \dots, 5\}$ di 5 lavori ($n = 5$) con i seguenti tempi di processamento:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$
t_j	6	5	4	3	2

Consideriamo le seguenti soluzioni candidate del modello $\text{ILP}_{P\|C_{\max}}$, date dai lavori su ciascuna macchina:

- (a) macchina 1: $\{1, 3\}$, macchina 2: $\{2, 4, 5\}$, e $C_{\max} = 10$;

- (b) macchina 1: $\{1, 2\}$, macchina 2: $\{3, 4, 5\}$, e $C_{\max} = 10$;
- (c) macchina 1: $\{1, 2\}$, macchina 2: $\{3, 4, 5\}$, e $C_{\max} = 12$;
- (d) $x_{j1} = x_{j2} = \frac{1}{2}$ per ogni lavoro j , e $C_{\max} = 10$;
- (e) macchina 1: $\{1, 3, 5\}$, macchina 2: $\{2, 4, 5\}$, e $C_{\max} = 12$.

Domande

1. Per ogni candidata, verificare i vincoli di assegnamento e i vincoli di carico.
2. Stabilire quali candidate sono ammissibili per $\text{ILP}_{P||C_{\max}}$ e quali per $\text{LP}_{P||C_{\max}}$. Per quelle ammissibili, indicare il valore e il più piccolo valore di $C_{\max}$ che mantiene ammissibile lo stesso assegnamento.
3. Trovare il valore ottimo dell'istanza e stabilire quali candidate sono ottime per $\text{ILP}_{P||C_{\max}}$ o per $\text{LP}_{P||C_{\max}}$ (usare Gurobi).

Soluzione

1. (a) Ogni lavoro è su una macchina. I carichi sono 10 e 10, e $C_{\max} = 10$: i vincoli di carico valgono.
- (b) Ogni lavoro è su una macchina. I carichi sono 11 e 9, e $C_{\max} = 10$: il vincolo di carico della macchina 1 è violato, poiché $11 > 10$.
- (c) Ogni lavoro è su una macchina. I carichi sono 11 e 9, e $C_{\max} = 12$: i vincoli di carico valgono.
- (d) I vincoli di assegnamento valgono. I carichi sono 10 e 10, e $C_{\max} = 10$: i vincoli di carico valgono.
- (e) Il lavoro 5 è su entrambe le macchine: il suo vincolo di assegnamento dà $2 \neq 1$. I carichi sono 12 e 10, e $C_{\max} = 12$: i vincoli di carico valgono.
2. (a) Ammissibile per entrambi i modelli, di valore 10, che è anche il carico massimo.
- (b) Inammissibile per entrambi i modelli.
- (c) Ammissibile per entrambi i modelli, di valore 12; il carico massimo è 11, quindi $C_{\max} = 11$ mantiene ammissibile l'assegnamento ed è migliore.
- (d) Ammissibile solo per $\text{LP}_{P||C_{\max}}$, di valore 10: l'assegnamento frazionario bilancia esattamente i carichi.
- (e) Inammissibile per entrambi i modelli.
3. Il lower bound è $\lceil 20/2 \rceil = 10$ e la candidata (a) lo raggiunge: $z(\text{ILP}_{P||C_{\max}}) = 10$, e (a) è ottima. Gurobi dà $z(\text{LP}_{P||C_{\max}}) = 10$, quindi (a) e (d) sono entrambe ottime per il rilassamento: su questa istanza non c'è gap di integralità.

Esercizio 14.4 — Disuguaglianze valide e simmetria per $P\|C_{\max}$ (1)

Consideriamo $m = 3$ macchine identiche e un insieme $\mathcal{J} = \{1, \dots, 6\}$ di 6 lavori ($n = 6$) con i seguenti tempi di processamento:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$
t_j	12	3	3	2	2	2

Domande

1. Calcolare $z(LP_{P\|C_{\max}})$ con Gurobi.
2. Aggiungere la disuguaglianza valida $C_{\max} \geq \lceil \frac{\sum_j t_j}{m} \rceil$ e risolvere di nuovo il rilassamento. Poi aggiungere invece le disuguaglianze valide $C_{\max} \geq t_j$ e risolvere di nuovo.
3. Calcolare con Gurobi il valore ottimo e confrontarlo con i tre bound.
4. Contare, per enumerazione, le soluzioni ottime del modello senza e con i vincoli di rottura delle simmetrie $\sum_j t_j x_{jh} \geq \sum_j t_j x_{j,h+1}$ ($h = 1, 2$).

Soluzione

Usiamo il valore (P5) dei rilassamenti, le soluzioni primale e duale date con esso e le disuguaglianze valide (P6) del riquadro all'inizio del capitolo.

1. Gurobi dà $z(LP_{P\|C_{\max}}) = 24/3 = 8$.
2. La disuguaglianza $C_{\max} \geq \lceil 24/3 \rceil = 8$ non cambia il bound: Gurobi dà di nuovo 8, poiché 24/3 è già intero. Le disuguaglianze $C_{\max} \geq t_j$ comprendono $C_{\max} \geq 12$, e Gurobi dà 12: il lavoro lungo da solo fissa il bound.
3. Gurobi dà $z(ILP_{P\|C_{\max}}) = 12$: il lavoro 1 da solo su una macchina, gli altri lavori sulle altre due macchine. Il bound LP 8 ha gap $\frac{12-8}{8} = 50.0\%$; con le disuguaglianze $C_{\max} \geq t_j$ il bound è 12, uguale al valore ottimo.
4. Senza i vincoli di rottura delle simmetrie: il lavoro 1 deve stare da solo (qualunque altro lavoro darebbe un carico maggiore di 12), può stare su una qualunque delle 3 macchine, e gli altri 5 lavori si possono dividere in qualunque modo fra le altre due macchine, i cui carichi restano al più 12. Si ottengono così $3 \cdot 2^5 = 96$ soluzioni ottime. Con i vincoli i carichi devono essere non crescenti. L'enumerazione dà 18 soluzioni ottime: il lavoro 1 sulla macchina 1 con gli altri lavori divisi in modo che la macchina 2 abbia carico almeno pari a quello della macchina 3, più la soluzione con tutti i lavori corti sulla macchina 1 e il lavoro 1 sulla macchina 2 (carichi 12, 12, 0). I vincoli eliminano la maggior parte, ma non tutte, delle soluzioni equivalenti.

Esercizio 14.5 — Gap di integralità del modello di $P\|C_{\max}$ (1)

Consideriamo $m = 2$ macchine identiche e un insieme $\mathcal{J} = \{1, \dots, 3\}$ di 3 lavori ($n = 3$) con i seguenti tempi di processamento:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
t_j	5	5	3

Domande

1. Calcolare con Gurobi $z(\text{LP}_{P\|C_{\max}})$ e $z(\text{ILP}_{P\|C_{\max}})$, e spiegare il valore ottimo.
2. Calcolare il gap assoluto e il rapporto $\frac{z(\text{LP}_{P\|C_{\max}})}{z(\text{ILP}_{P\|C_{\max}})}$.
3. Aggiungere entrambe le disuguaglianze valide (P6) e risolvere di nuovo il rilassamento. Quanta parte del gap viene chiusa?
4. Consideriamo la famiglia del capitolo con $m = 3$ macchine, un lavoro di tempo $M = 10$ e 3 lavori di tempo 1. Calcolare il rapporto con Gurobi e il suo limite per $M \rightarrow +\infty$.

Soluzione

Usiamo il valore (P5) dei rilassamenti, le soluzioni primale e duale date con esso e le disuguaglianze valide (P6) del riquadro all'inizio del capitolo.

1. Gurobi dà $z(\text{LP}_{P\|C_{\max}}) = \frac{13}{2} = \frac{13}{2}$ e $z(\text{ILP}_{P\|C_{\max}}) = 8$. I due lavori di tempo 5 sulla stessa macchina danno carico 10; altrimenti il lavoro di tempo 3 condivide una macchina con un lavoro di tempo 5, con carico 8.
2. Il gap assoluto è $8 - \frac{13}{2} = \frac{3}{2}$, e il rapporto è $\frac{\frac{13}{2}}{8} = \frac{13}{16}$, che è maggiore di $\frac{1}{m} = \frac{1}{2}$.
3. Le disuguaglianze danno $C_{\max} \geq \max\{5, \lceil \frac{13}{2} \rceil\} = 7$, e Gurobi dà 7. Il gap passa da $\frac{3}{2}$ a 1: l'arrotondamento ne chiude un terzo, e l'unità residua viene dall'assegnamento intero.
4. Gurobi dà $z(\text{LP}_{P\|C_{\max}}) = \frac{10+3}{3} = \frac{13}{3}$ e $z(\text{ILP}_{P\|C_{\max}}) = 10$, il lavoro lungo. Il rapporto è $\frac{\frac{13}{3}}{10} = \frac{13}{30}$. In generale vale $\frac{M+m}{mM} = \frac{1}{m} + \frac{1}{M}$, che tende a $\frac{1}{3}$ per $M \rightarrow +\infty$.

Formulazioni dei problemi di lot sizing

Formulazioni usate in questi esercizi. I modelli del [Capitolo 15 «Formulazioni dei problemi di lot sizing»](#), sui periodi $T = \{1, \dots, m\}$, con $D_{t,k} = \sum_{s=t}^k d_s$. La formulazione big-M ILP_{CLSP}:

$$\min \sum_{t \in T} (sc_t y_t + vc_t x_t + hc_t s_t) \quad (\text{L0})$$

$$\text{soggetto a } s_{t-1} + x_t = d_t + s_t, \quad \forall t \in T, \quad (\text{L1})$$

$$x_t \leq M_t y_t, \quad \forall t \in T, \quad (\text{L2})$$

$$x_t \leq cap_t, \quad \forall t \in T, \quad (\text{L3})$$

$$s_0 = s_m = 0, \quad (\text{L4})$$

$$x_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall t \in T, \quad (\text{L5})$$

$$s_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall t \in T, \quad (\text{L6})$$

$$y_t \in \{0, 1\}, \quad \forall t \in T. \quad (\text{L7})$$

Valori di big-M in (L2): $M_t^{\text{dem}} = D_{t,m}$, $M_t^{\text{cap}} = cap_t$ e il valore forte $M_t = \min\{cap_t, D_{t,m}\}$. La formulazione a cammino minimo MIP_{CLSP}^{SP}, dove zv_{tk} è la frazione delle domande dei periodi $t, \dots, k$ prodotta nel periodo t :

$$\min \sum_{t \in T} sc_t y_t + \sum_{t \in T} \sum_{k=t}^m cv_{tk} zv_{tk} \quad (\text{S0})$$

$$\text{soggetto a } \sum_{k=1}^m zv_{1k} = 1, \quad (\text{S1})$$

$$\sum_{u=1}^{t-1} zv_{u,t-1} - \sum_{k=t}^m zv_{tk} = 0, \quad \forall t \in T \setminus \{1\}, \quad (\text{S2})$$

$$\sum_{k=t}^m zv_{tk} \leq y_t, \quad \forall t \in T, \quad (\text{S3})$$

$$\sum_{k=t}^m D_{t,k} zv_{tk} \leq cap_t, \quad \forall t \in T, \quad (\text{S4})$$

$$zv_{tk} \geq 0, \quad \forall t, k \in T, \ k \geq t, \quad (\text{S5})$$

$$y_t \in \{0, 1\}, \quad \forall t \in T, \quad (\text{S6})$$

con i costi

$$cv_{tk} = vc_t D_{t,k} + \sum_{s=t+1}^k \sum_{u=t}^{s-1} hc_u d_s. \quad (S7)$$

I rilassamenti lineari rilassano i domini in $x_t, s_t \geq 0$ e $0 \leq y_t \leq 1$: sono i modelli LP_{CLSP}^{dem} , LP_{CLSP}^{cap} e LP_{CLSP}^{strong} di ILP_{CLSP} con i tre valori di big-M, e il modello LP_{CLSP}^{SP} di MIP_{CLSP}^{SP} . Il modello ILP_{ULS} del problema di lot sizing senza capacità (ULS) è ILP_{CLSP} senza i vincoli di capacità (L3) e con $M_t = D_{t,m}$ in (L2).

Il modello ILP_{CLSP}^P del problema di lot sizing con più prodotti $p \in P$ e tempi di setup (MLS), con $sd_{ptk} = \sum_{u=t}^k d_{pu}$:

$$\min \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} (sc_{pt} y_{pt} + vc_{pt} x_{pt} + hc_{pt} s_{pt}) \quad (P0)$$

$$\text{soggetto a } s_{p,t-1} + x_{pt} = d_{pt} + s_{pt}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T, \quad (P1)$$

$$\sum_{p \in P} (st_{pt} y_{pt} + vt_{pt} x_{pt}) \leq cap_t, \quad \forall t \in T, \quad (P2)$$

$$x_{pt} \leq M_{pt} y_{pt}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T, \quad (P3)$$

$$s_{p0} = s_{pm} = 0, \quad \forall p \in P, \quad (P4)$$

$$x_{pt} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T, \quad (P5)$$

$$s_{pt} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T, \quad (P6)$$

$$y_{pt} \in \{0, 1\}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T, \quad (P7)$$

con i valori forti di big-M $M_{pt} = \min\{[(cap_t - st_{pt})/vt_{pt}], sd_{ptm}\}$.

Il modello ILP_{CLSP}^{OT} con straordinari (LS-OT) aggiunge $\sum_{t \in T} (cw_t \mu_t + co_t \nu_t)$ a (P0), sostituisce cap_t con $\mu_t + \nu_t$ in (P2), usa $cap_t^N + cap_t^O$ al posto di cap_t nei valori di big-M, e aggiunge:

$$\mu_t \leq cap_t^N, \quad \forall t \in T, \quad (O1)$$

$$\nu_t \leq cap_t^O, \quad \forall t \in T, \quad (O2)$$

$$\mu_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall t \in T, \quad (O3)$$

$$\nu_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall t \in T. \quad (O4)$$

Il modello ILP_{CLSP}^{UD} con domanda non soddisfatta (LS-UD) aggiunge $\sum_{p \in P} \sum_{t \in T} cu_{pt} \varepsilon_{pt}$ a (P0), sostituisce d_{pt} con $d_{pt} - \varepsilon_{pt}$ in (P1), e aggiunge:

$$\varepsilon_{pt} \leq d_{pt}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T, \quad (U1)$$

$$\varepsilon_{pt} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T. \quad (U2)$$

Con un solo prodotto l'indice p si omette.

Esercizio 15.1 — La formulazione big-M del lot sizing (1)

Consideriamo un'istanza di lot sizing capacitato con $m = 4$ periodi, $s_0 = s_4 = 0$ e i seguenti dati:

periodo t	1	2	3	4
domanda d_t	1	4	1	3
capacità cap_t	4	4	4	4
costo di setup sc_t	40	40	40	40
costo di produzione vc_t	0	0	0	0
costo di mantenimento hc_t	5	5	5	5

Domande

1. Calcolare per ogni periodo i valori di big-M M_t^{dem} , M_t^{cap} e il valore forte M_t .
2. Scrivere la formulazione big-M ILP_{CLSP} con i valori forti M_t .
3. Contare le variabili e i vincoli (oltre ai domini) della formulazione.
4. Risolvere la formulazione con Gurobi e indicare il piano ottimo, le sue scorte, i suoi setup e il suo costo.

Soluzione

Usiamo i valori di big-M e i costi (S7) del riquadro all'inizio del capitolo.

1. Le domande dei periodi $t, \dots, m$ danno $D_{t,m}$, e il valore forte è il più piccolo dei due:

periodo t	1	2	3	4
$M_t^{\text{dem}} = D_{t,4}$	9	8	4	3
$M_t^{\text{cap}} = cap_t$	4	4	4	4
$M_t = \min\{cap_t, D_{t,m}\}$	4	4	4	3

2. Con i valori forti la formulazione è:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 40 y_1 + 40 y_2 + 40 y_3 + 40 y_4 + 5 s_1 + 5 s_2 + 5 s_3 \\
 & + 5 s_4 \\
 \text{soggetto a} \quad & x_1 - s_1 = 1 \\
 & s_1 + x_2 - s_2 = 4 \\
 & s_2 + x_3 - s_3 = 1 \\
 & s_3 + x_4 - s_4 = 3 \\
 & x_1 - 4 y_1 \leq 0 \\
 & x_2 - 4 y_2 \leq 0 \\
 & x_3 - 4 y_3 \leq 0 \\
 & x_4 - 3 y_4 \leq 0 \\
 & x_1 \leq 4 \\
 & x_2 \leq 4 \\
 & x_3 \leq 4 \\
 & x_4 \leq 4 \\
 & s_4 = 0 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\
 & s_1, s_2, s_3, s_4 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\
 & y_1, y_2, y_3, y_4 \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

3. Ci sono $m = 4$ variabili x_t , 4 variabili $s_1, \dots, s_4$ e 4 variabili y_t , quindi 12 variabili ($s_0 = 0$ è una costante). Ci sono 4 vincoli di bilanciamento, 4 vincoli big-M, 4 vincoli di capacità e il vincolo $s_4 = 0$, quindi 13 vincoli lineari.
4. Gurobi dà $z(\text{ILP}_{\text{CLSP}}) = 130$, con il piano $\tilde{x} = (2, 4, 0, 3)$, le scorte $(s_1, \dots, s_4) = (1, 1, 0, 0)$ e i setup $\tilde{y} = (1, 1, 0, 1)$. Il costo è $3 \cdot 40$ per i setup più $5 \cdot (1 + 1) = 10$ per il mantenimento a scorta, ossia 130. Enumerando i piani, il piano ottimo risulta unico.

Esercizio 15.2 — Valori di big-M e bound LP per il lot sizing (1)

Consideriamo un'istanza di lot sizing capacitato con $m = 4$ periodi, $s_0 = s_4 = 0$ e i seguenti dati:

periodo t	1	2	3	4
domanda d_t	1	4	1	3
capacità cap_t	4	4	4	4
costo di setup sc_t	40	40	40	40
costo di produzione vc_t	0	0	0	0
costo di mantenimento hc_t	5	5	5	5

Domande

1. Calcolare il costo del piano migliore quando si ignorano i setup.

2. Risolvere con Gurobi i rilassamenti lineari LP_{CLSP}^{dem} , LP_{CLSP}^{cap} e LP_{CLSP}^{strong} della formulazione big-M e indicare i valori di y_t nelle loro soluzioni ottime.
3. Spiegare i valori di y_t usando i vincoli big-M.
4. Calcolare con Gurobi il valore ottimo e il gap $\frac{z-LB}{LB}$ di ogni bound.

Soluzione

Usiamo i valori di big-M e i costi (S7) del riquadro all'inizio del capitolo.

1. Senza i setup il piano migliore produce in ogni periodo la sua domanda, $\mathbf{x} = (1, 4, 1, 3)$: non ci sono scorte e il costo di produzione è nullo, quindi il bound è 0.
2. Gurobi dà:

rilassamento	valore	$\tilde{\mathbf{y}}$
$LP_{CLSP}^{dem} (M_t = D_{t,m})$	$\frac{670}{9}$	$(\frac{1}{9}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1)$
$LP_{CLSP}^{cap} (M_t = cap_t)$	90	$(\frac{1}{4}, 1, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$
$LP_{CLSP}^{strong} (M_t = \min\{cap_t, D_{t,m}\})$	100	$(\frac{1}{4}, 1, \frac{1}{4}, 1)$

3. In tutte e tre le soluzioni il piano è il piano lot-for-lot $\mathbf{x} = (1, 4, 1, 3)$, che non ha costi di mantenimento. Le variabili di setup assumono il valore più piccolo ammesso dai vincoli big-M, $y_t = \frac{x_t}{M_t}$: per esempio, nel periodo 1 otteniamo $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{4}$. Più piccolo è M_t , più grande è y_t e più alto è il bound.
4. Gurobi dà $z(ILP_{CLSP}) = 130$. I gap sono:

bound	valore	gap da 130
senza setup	0	non definito
LP_{CLSP}^{dem}	$\frac{670}{9}$	74.6%
LP_{CLSP}^{cap}	90	44.4%
LP_{CLSP}^{strong}	100	30.0%

Esercizio 15.3 — Soluzioni ammissibili della formulazione di lot sizing (1)

Consideriamo un'istanza di lot sizing capacitato con $m = 4$ periodi, $s_0 = s_4 = 0$ e i seguenti dati:

periodo t	1	2	3	4
domanda d_t	1	4	1	3
capacità cap_t	4	4	4	4
costo di setup sc_t	40	40	40	40
costo di produzione vc_t	0	0	0	0
costo di mantenimento hc_t	5	5	5	5

Usiamo la formulazione big-M con i valori forti $M_t = \min\{cap_t, D_{t,m}\} = (4, 4, 4, 3)$. Consideriamo le seguenti candidate $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, con le scorte date dai vincoli di bilanciamento:

- (a) $\mathbf{x} = (2, 4, 0, 3)$, $\mathbf{y} = (1, 1, 0, 1)$;
- (b) $\mathbf{x} = (1, 4, 1, 3)$, $\mathbf{y} = (1, 1, 1, 1)$;
- (c) $\mathbf{x} = (5, 0, 1, 3)$, $\mathbf{y} = (1, 0, 1, 1)$;
- (d) $\mathbf{x} = (2, 4, 0, 3)$, $\mathbf{y} = (1, 1, 0, 0)$;
- (e) $\mathbf{x} = (2, 4, 0, 2)$, $\mathbf{y} = (1, 1, 0, 1)$;
- (f) $\mathbf{x} = (1, 4, 1, 3)$, $\mathbf{y} = (\frac{1}{4}, 1, \frac{1}{4}, 1)$;

Domande

- Calcolare le scorte $s_1, \dots, s_4$ di ogni candidata e verificare i vincoli di bilanciamento con $s_0 = s_4 = 0$.
- Verificare i vincoli big-M e i vincoli di capacità, e stabilire quali candidate sono ammissibili per ILP_{CLSP} e quali per il suo rilassamento lineare.
- Calcolare il costo delle candidate ammissibili e confrontarlo con $z(LP_{CLSP}^{strong})$ calcolato con Gurobi.

Soluzione

- $(s_1, \dots, s_4) = (1, 1, 0, 0)$: tutte le scorte sono non negative e $s_4 = 0$.
 - $(s_1, \dots, s_4) = (0, 0, 0, 0)$: tutte le scorte sono non negative e $s_4 = 0$.
 - $(s_1, \dots, s_4) = (4, 0, 0, 0)$: tutte le scorte sono non negative e $s_4 = 0$.
 - $(s_1, \dots, s_4) = (1, 1, 0, 0)$: tutte le scorte sono non negative e $s_4 = 0$.
 - $(s_1, \dots, s_4) = (1, 1, 0, -1)$: $s_4 < 0$, la domanda non è soddisfatta.
 - $(s_1, \dots, s_4) = (0, 0, 0, 0)$: tutte le scorte sono non negative e $s_4 = 0$.
- Tutti i vincoli valgono: ammissibile per entrambi i modelli.
 - Tutti i vincoli valgono: ammissibile per entrambi i modelli.
 - $x_1 = 5 > cap_1 = 4$: inammissibile.
 - $x_4 = 3 > M_4 y_4 = 3 \cdot 0$: inammissibile.
 - Inammissibile, a causa dei vincoli di bilanciamento.
 - Tutti i vincoli valgono: ammissibile solo per il rilassamento lineare, poiché y_1 e y_3 sono frazionarie.
- La candidata (a) costa $3 \cdot 40 + 5 \cdot (1 + 1) = 130$ e (b), il piano lot-for-lot con quattro setup, costa $4 \cdot 40 = 160$. La candidata (f) costa $40 \cdot (\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} + 1) = 100$. Gurobi dà $z(LP_{CLSP}^{strong}) = 100$: la candidata (f) è una soluzione ottima del rilassamento, e (a) è il piano ottimo dell'istanza.

Esercizio 15.4 — La formulazione a cammino minimo del lot sizing (1)

Consideriamo un'istanza di lot sizing capacitato con $m = 4$ periodi, $s_0 = s_4 = 0$ e i seguenti dati:

periodo t	1	2	3	4
domanda d_t	1	4	1	3
capacità cap_t	4	4	4	4
costo di setup sc_t	40	40	40	40
costo di produzione vc_t	0	0	0	0
costo di mantenimento hc_t	5	5	5	5

Domande

1. Calcolare le domande $D_{t,k}$ e i costi cv_{tk} della formulazione a cammino minimo.
2. Scrivere la formulazione a cammino minimo per questa istanza.
3. Risolvere con Gurobi il suo rilassamento lineare LP_{CLSP}^{SP} e confrontare il bound con $z(LP_{CLSP}^{strong})$ della formulazione big-M.
4. Il piano ottimo è $\tilde{x} = (2, 4, 0, 3)$. Scriverlo come combinazione di cammini della rete e verificarne le quantità e il costo.

Soluzione

Usiamo i valori di big-M e i costi (S7) del riquadro all'inizio del capitolo.

1. Il costo di produzione è nullo, quindi cv_{tk} è solo costo di mantenimento a scorta:

$t \backslash k$	$D_{t,k}$				cv_{tk}			
	1	2	3	4	1	2	3	4
1	1	5	6	9	0	20	30	75
2		4	5	8		0	5	35
3			1	4			0	15
4				3				0

2. La variabile $z_{v_{tk}}$ è l'arco dal nodo $t - 1$ al nodo k , con costo cv_{tk} . La formulazione è:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 40 y_1 + 40 y_2 + 40 y_3 + 40 y_4 + 20 z v_{12} + 30 z v_{13} + 75 z v_{14} \\
 & + 5 z v_{23} + 35 z v_{24} + 15 z v_{34} \\
 \text{soggetto a} \quad & z v_{11} + z v_{12} + z v_{13} + z v_{14} = 1 \\
 & z v_{11} - z v_{22} - z v_{23} - z v_{24} = 0 \\
 & z v_{12} + z v_{22} - z v_{33} - z v_{34} = 0 \\
 & z v_{13} + z v_{23} + z v_{33} - z v_{44} = 0 \\
 & z v_{11} + z v_{12} + z v_{13} + z v_{14} - y_1 \leq 0 \\
 & z v_{22} + z v_{23} + z v_{24} - y_2 \leq 0 \\
 & z v_{33} + z v_{34} - y_3 \leq 0 \\
 & z v_{44} - y_4 \leq 0 \\
 & z v_{11} + 5 z v_{12} + 6 z v_{13} + 9 z v_{14} \leq 4 \\
 & 4 z v_{22} + 5 z v_{23} + 8 z v_{24} \leq 4 \\
 & z v_{33} + 4 z v_{34} \leq 4 \\
 & 3 z v_{44} \leq 4 \\
 & z v_{11}, z v_{12}, z v_{13}, \dots, z v_{44} \geq 0 \\
 & y_1, y_2, y_3, y_4 \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

3. Gurobi dà $z(\text{LP}_{\text{CLSP}}^{\text{SP}}) = 112$, con $z v_{11} = \frac{2}{5}$, $z v_{13} = \frac{3}{5}$, $z v_{24} = \frac{2}{5}$, $z v_{44} = \frac{3}{5}$. Il bound è migliore di $z(\text{LP}_{\text{CLSP}}^{\text{strong}}) = 100$, e il valore ottimo è 130.

4. Con le quantità fissate a $\tilde{x}$, Gurobi dà $z v_{11} = \frac{4}{5}$, $z v_{13} = \frac{1}{5}$, $z v_{23} = \frac{4}{5}$, $z v_{44} = 1$, tutte le altre 0. Questi archi si decompongono nei cammini

- $0 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ con peso $\frac{4}{5}$, che è il piano $(1, 5, 0, 3)$;
- $0 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ con peso $\frac{1}{5}$, che è il piano $(6, 0, 0, 3)$;

La combinazione dà $x_1 = \frac{4}{5} \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot 6 = 2$, $x_2 = \frac{4}{5} \cdot 5 = 4$, $x_4 = \frac{4}{5} \cdot 3 + \frac{1}{5} \cdot 3 = 3$. I singoli cammini possono superare la capacità: solo le quantità combinate devono rispettarla. Il costo è $3 \cdot 40 + 0 \cdot \frac{4}{5} + 30 \cdot \frac{1}{5} + 5 \cdot \frac{4}{5} + 0 \cdot 1 = 130$.

Esercizio 15.5 — Confronto fra le formulazioni di lot sizing (1)

Consideriamo un'istanza di lot sizing capacitato con $m = 5$ periodi, $s_0 = s_5 = 0$ e i seguenti dati:

periodo t	1	2	3	4	5
domanda d_t	2	1	3	3	3
capacità cap_t	4	4	4	4	4
costo di setup sc_t	40	40	40	40	40
costo di produzione vc_t	0	0	0	0	0
costo di mantenimento hc_t	10	10	10	10	10

Domande

1. Calcolare i tre valori di big-M di ogni periodo.
2. Calcolare con Gurobi il bound senza setup, i tre bound LP della formulazione big-M e il bound LP della formulazione a cammino minimo.
3. Calcolare con Gurobi il valore ottimo, usando entrambe le formulazioni con setup interi, e il gap $\frac{z-LB}{LB}$ di ogni bound.
4. Confrontare il numero di variabili delle due formulazioni e commentare il prezzo del bound più forte.

Soluzione

Usiamo i valori di big-M e i costi (S7) del riquadro all'inizio del capitolo.

periodo t	1	2	3	4	5
1. $M_t^{\text{dem}} = D_{t,5}$	12	10	9	6	3
$M_t^{\text{cap}} = \text{cap}_t$	4	4	4	4	4
$M_t = \min\{\text{cap}_t, D_{t,m}\}$	4	4	4	4	3

2. Gurobi dà:

bound	valore
senza setup	0
$LP_{\text{CLSP}}^{\text{dem}}$	84
$LP_{\text{CLSP}}^{\text{cap}}$	120
$LP_{\text{CLSP}}^{\text{strong}}$	130
$LP_{\text{CLSP}}^{\text{SP}}$	160

Ogni bound migliora il precedente.

3. Entrambe le formulazioni danno $z(\text{ILP}_{\text{CLSP}}) = 170$, con l'unico piano ottimo $\tilde{x} = (3, 0, 3, 3, 3)$. I gap sono:

bound	valore	gap da 170
senza setup	0	non definito
$LP_{\text{CLSP}}^{\text{dem}}$	84	102.4%
$LP_{\text{CLSP}}^{\text{cap}}$	120	41.7%
$LP_{\text{CLSP}}^{\text{strong}}$	130	30.8%
$LP_{\text{CLSP}}^{\text{SP}}$	160	6.2%

4. La formulazione big-M ha 16 variabili (x_t , s_t e y_t); la formulazione a cammino minimo ha $\frac{m(m+1)}{2} + m = 20$ variabili (zv_{tk} e y_t). Il numero di variabili zv_{tk} cresce come m^2 : il bound più forte si paga con un modello più grande.

Esercizio 15.6 — Modello PLI del problema di lot sizing senza capacità

Consideriamo un'istanza di lot sizing senza capacità (ULS) con $m = 4$ periodi, $s_0 = s_4 = 0$ e i seguenti dati:

periodo t	1	2	3	4
domanda d_t	1	4	1	3
costo di setup sc_t	40	40	40	40
costo di produzione vc_t	0	0	0	0
costo di mantenimento hc_t	5	5	5	5

Domande

1. Calcolare i valori di big-M $D_{t,m}$ e scrivere il modello ILP_{ULS} per questa istanza.
2. Contare le variabili e i vincoli (oltre ai domini) del modello.
3. Risolvere il modello con Gurobi e indicare il piano ottimo, le sue scorte e il suo costo.
4. Aggiungere la capacità $cap_t = 4$ in ogni periodo: Gurobi dà il valore ottimo 130. Spiegare perché è maggiore.

Soluzione

1. I valori di big-M sono $D_{t,4} = (9, 8, 4, 3)$. Il modello ILP_{ULS} è:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 40 y_1 + 40 y_2 + 40 y_3 + 40 y_4 + 5 s_1 + 5 s_2 \\
 & + 5 s_3 + 5 s_4 \\
 \text{soggetto a} \quad & x_1 - s_1 = 1 \\
 & s_1 + x_2 - s_2 = 4 \\
 & s_2 + x_3 - s_3 = 1 \\
 & s_3 + x_4 - s_4 = 3 \\
 & x_1 - 9 y_1 \leq 0 \\
 & x_2 - 8 y_2 \leq 0 \\
 & x_3 - 4 y_3 \leq 0 \\
 & x_4 - 3 y_4 \leq 0 \\
 & s_4 = 0 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\
 & s_1, s_2, s_3, s_4 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\
 & y_1, y_2, y_3, y_4 \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

2. Ci sono $3m = 12$ variabili x_t, s_t, y_t ($s_0 = 0$ è una costante), 4 vincoli di bilanciamento, 4 vincoli big-M e il vincolo $s_4 = 0$: 9 vincoli lineari.

3. Gurobi dà $z(\text{ILP}_{\text{ULS}}) = 110$ con il piano $\tilde{x} = (6, 0, 0, 3)$, le scorte $(5, 1, 0, 0)$ e i setup nei periodi 1 e 4: il costo è $2 \cdot 40 + 5 \cdot (5 + 1) = 110$. Enumerando i piani, il piano ottimo risulta unico.
4. Il piano $(6, 0, 0, 3)$ produce $6 > 4$ unità nel periodo 1, quindi non è ammissibile con le capacità. Il problema capacitato ha meno piani ammissibili, quindi un valore ottimo maggiore: l'ULS è un rilassamento del CLS.

Esercizio 15.7 — Modello PLI del lot sizing con più prodotti e tempi di setup

Consideriamo un problema di lot sizing con $|P| = 2$ prodotti, $m = 3$ periodi, la capacità $cap_t = 10$ in ogni periodo, $vc_{pt} = 0$, $s_{p0} = s_{p3} = 0$ e i seguenti dati:

periodo t	prodotto 1			prodotto 2		
	1	2	3	1	2	3
d_{pt}	2	3	1	3	1	3
vt_{pt}	1	1	1	2	2	2
st_{pt}	1	1	1	1	1	1
sc_{pt}	20	20	20	30	30	30
hc_{pt}	4	4	4	3	3	3

Domande

1. Calcolare i valori forti di big-M M_{pt} .
2. Scrivere il modello $\text{ILP}_{\text{CLSP}}^P$ con i valori forti di big-M per questa istanza.
3. Risolvere il modello con Gurobi: indicare il piano ottimo di ogni prodotto, il suo costo e il tempo usato in ogni periodo.

Soluzione

1. Con $M_{pt} = \min\{[(cap_t - st_{pt})/vt_{pt}], sd_{ptm}\}$: per il prodotto 1, $\lfloor 9/1 \rfloor = 9$ e $sd_{1t3} = (6, 4, 1)$, quindi $M_{1t} = (6, 4, 1)$; per il prodotto 2, $\lfloor 9/2 \rfloor = 4$ e $sd_{2t3} = (7, 4, 3)$, quindi $M_{2t} = (4, 4, 3)$.
2. Il modello $\text{ILP}_{\text{CLSP}}^P$ è:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 20 y_{11} + 20 y_{12} + 20 y_{13} + 30 y_{21} + 30 y_{22} + 30 y_{23} \\
 & + 4 s_{11} + 4 s_{12} + 4 s_{13} + 3 s_{21} + 3 s_{22} + 3 s_{23} \\
 \text{soggetto a} \quad & x_{11} - s_{11} = 2 \\
 & s_{11} + x_{12} - s_{12} = 3 \\
 & s_{12} + x_{13} - s_{13} = 1 \\
 & x_{21} - s_{21} = 3 \\
 & s_{21} + x_{22} - s_{22} = 1 \\
 & s_{22} + x_{23} - s_{23} = 3 \\
 & x_{11} + 2 x_{21} + y_{11} + y_{21} \leq 10 \\
 & x_{12} + 2 x_{22} + y_{12} + y_{22} \leq 10 \\
 & x_{13} + 2 x_{23} + y_{13} + y_{23} \leq 10 \\
 & x_{11} - 6 y_{11} \leq 0 \\
 & x_{12} - 4 y_{12} \leq 0 \\
 & x_{13} - y_{13} \leq 0 \\
 & x_{21} - 4 y_{21} \leq 0 \\
 & x_{22} - 4 y_{22} \leq 0 \\
 & x_{23} - 3 y_{23} \leq 0 \\
 & s_{13} = 0 \\
 & s_{23} = 0 \\
 & x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\
 & s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{21}, s_{22}, s_{23} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\
 & y_{11}, y_{12}, y_{13}, y_{21}, y_{22}, y_{23} \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

3. Gurobi dà $z(\text{ILP}_{\text{CLSP}}^P) = 134$, e la soluzione ottima è unica. Il prodotto 1 segue il piano $(2, 4, 0)$ con le scorte $(0, 1, 0)$, il prodotto 2 il piano $(3, 1, 3)$ con le scorte $(0, 0, 0)$. I tempi usati nei periodi, setup compresi, sono $(10, 8, 7)$, tutti al più 10: nel periodo 1 la capacità è satura, quindi il prodotto 2 richiede un setup in ogni periodo.

Esercizio 15.8 — Modello PLI del lot sizing con straordinari

Consideriamo un problema di lot sizing con straordinari, un solo prodotto, $m = 5$ periodi, $s_0 = s_5 = 0$, tempo di produzione $vt_t = 1$, tempo di setup $st_t = 0$, $vc_t = 0$ e i dati

periodo t	1	2	3	4	5
domanda d_t	2	1	3	3	3
costo di setup sc_t	40	40	40	40	40
costo di mantenimento hc_t	10	10	10	10	10

In ogni periodo l'orario normale è $cap_t^N = 2$, al costo $cw_t = 1$ per unità, e lo straordinario è $cap_t^O = 2$, al costo $co_t = 5$ per unità.

Domande

1. Mostrare che l'istanza non ha piani ammissibili senza straordinari.
2. Calcolare i valori forti di big-M e scrivere il modello ILP_{CLSP}^{OT} per questa istanza.
3. Risolvere il modello con Gurobi: indicare il piano ottimo, i tempi di lavoro e il costo.

Soluzione

1. La domanda totale è 12, mentre l'orario normale dei 5 periodi dà al più $5 \cdot 2 = 10$ unità: serve qualche straordinario.
2. Con $M_t = \min\{cap_t^N + cap_t^O, D_{t,5}\}$ e $D_{t,5} = (12, 10, 9, 6, 3)$ otteniamo $M_t = (4, 4, 4, 4, 3)$. Il modello è:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 40 y_1 + 40 y_2 + 40 y_3 + 40 y_4 + 40 y_5 + 10 s_1 \\
 & + 10 s_2 + 10 s_3 + 10 s_4 + 10 s_5 + \mu_1 + \mu_2 \\
 & + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5 + 5 \nu_1 + 5 \nu_2 + 5 \nu_3 \\
 & + 5 \nu_4 + 5 \nu_5 \\
 \text{soggetto a} \quad & x_1 - s_1 = 2 \\
 & s_1 + x_2 - s_2 = 1 \\
 & s_2 + x_3 - s_3 = 3 \\
 & s_3 + x_4 - s_4 = 3 \\
 & s_4 + x_5 - s_5 = 3 \\
 & x_1 - \mu_1 - \nu_1 \leq 0 \\
 & x_2 - \mu_2 - \nu_2 \leq 0 \\
 & x_3 - \mu_3 - \nu_3 \leq 0 \\
 & x_4 - \mu_4 - \nu_4 \leq 0 \\
 & x_5 - \mu_5 - \nu_5 \leq 0 \\
 & x_1 - 4 y_1 \leq 0 \\
 & x_2 - 4 y_2 \leq 0 \\
 & x_3 - 4 y_3 \leq 0 \\
 & x_4 - 4 y_4 \leq 0 \\
 & x_5 - 3 y_5 \leq 0 \\
 & \mu_1 \leq 2 \\
 & \mu_2 \leq 2 \\
 & \mu_3 \leq 2 \\
 & \mu_4 \leq 2 \\
 & \mu_5 \leq 2 \\
 & \nu_1 \leq 2 \\
 & \nu_2 \leq 2 \\
 & \nu_3 \leq 2 \\
 & \nu_4 \leq 2 \\
 & \nu_5 \leq 2 \\
 & s_5 = 0 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\
 & s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\
 & \mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \nu_5 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\
 & y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

3. Gurobi dà $z(\text{ILP}_{\text{CLSP}}^{\text{OT}}) = 198$, e la soluzione ottima è unica: il piano $\tilde{x} = (3, 0, 3, 3, 3)$,

le scorte $(1, 0, 0, 0, 0)$, l'orario normale $(2, 0, 2, 2, 2)$ e lo straordinario $(1, 0, 1, 1, 1)$. Il costo è $4 \cdot 40$ per i setup, $10 \cdot 1$ per il mantenimento a scorta, $1 \cdot 8$ per l'orario normale e $5 \cdot 4$ per lo straordinario: 198.

Esercizio 15.9 — Modello PLI del lot sizing con domanda non soddisfatta

Consideriamo un'istanza di lot sizing capacitato con $m = 4$ periodi, $s_0 = s_4 = 0$ e i seguenti dati:

periodo t	1	2	3	4
domanda d_t	1	4	1	3
capacità cap_t	4	4	4	4
costo di setup sc_t	40	40	40	40
costo di produzione vc_t	0	0	0	0
costo di mantenimento hc_t	5	5	5	5

Un'unità di domanda può restare non soddisfatta, con la penalità $cu_t = 18$ per unità.

Domande

1. Scrivere il modello ILP_{CLSP}^{UD} con i valori forti di big-M per questa istanza.
2. Risolvere il modello con Gurobi: indicare il piano ottimo, la domanda non soddisfatta e il costo.
3. Senza domanda non soddisfatta il valore ottimo è 130 (Gurobi). Spiegare il risparmio.

Soluzione

1. I valori forti di big-M sono $M_t = \min\{cap_t, D_{t,4}\} = (4, 4, 4, 3)$. Il modello è:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 40 y_1 + 40 y_2 + 40 y_3 + 40 y_4 + 5 s_1 + 5 s_2 \\
 & + 5 s_3 + 5 s_4 + 18 \varepsilon_1 + 18 \varepsilon_2 + 18 \varepsilon_3 + 18 \varepsilon_4 \\
 \text{soggetto a} \quad & x_1 - s_1 + \varepsilon_1 = 1 \\
 & s_1 + x_2 - s_2 + \varepsilon_2 = 4 \\
 & s_2 + x_3 - s_3 + \varepsilon_3 = 1 \\
 & s_3 + x_4 - s_4 + \varepsilon_4 = 3 \\
 & x_1 \leq 4 \\
 & x_2 \leq 4 \\
 & x_3 \leq 4 \\
 & x_4 \leq 4 \\
 & x_1 - 4 y_1 \leq 0 \\
 & x_2 - 4 y_2 \leq 0 \\
 & x_3 - 4 y_3 \leq 0 \\
 & x_4 - 3 y_4 \leq 0 \\
 & \varepsilon_1 \leq 1 \\
 & \varepsilon_2 \leq 4 \\
 & \varepsilon_3 \leq 1 \\
 & \varepsilon_4 \leq 3 \\
 & s_4 = 0 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\
 & s_1, s_2, s_3, s_4 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\
 & \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\
 & y_1, y_2, y_3, y_4 \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

2. Gurobi dà $z(\text{ILP}_{\text{CLSP}}^{\text{UD}}) = 113$, e la soluzione ottima è unica: il piano $\tilde{x} = (0, 4, 4, 0)$, le scorte $(0, 0, 3, 0)$ e la domanda non soddisfatta $\tilde{\varepsilon} = (1, 0, 0, 0)$. Il costo è $2 \cdot 40 + 5 \cdot 3 + 18 \cdot 1 = 113$.
3. Lasciare non soddisfatta la domanda $d_1 = 1$ elimina il setup del periodo 1: la penalità 18 è minore di quanto costa il primo periodo nel piano ottimo del CLS, e il valore scende da 130 a 113.