



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Ottimizzazione combinatoria

Esercizi 1 — Problemi di ottimizzazione combinatoria

Esercizi svolti sui capitoli del volume 1, problemi di ottimizzazione combinatoria:
ogni esercizio è seguito dalla sua soluzione completa.

Fabio Furini

fabiofurini.github.io

Dipartimento di Ingegneria informatica, automatica e gestionale — Sapienza Università di Roma

Versione online e materiale scaricabile:
fabiofurini.github.io/ottimizzazione-combinatoria/
github.com/fabiofurini/ottimizzazione-combinatoria

Anno accademico 2026–2027

Indice

1	Problemi di ottimizzazione combinatoria	2
2	Problemi di zaino	10
3	Problemi di packing	18
4	Problemi di colorazione	26
5	Problemi di clique	33
6	Problemi di routing	41
7	Problemi di scheduling	52
8	Problemi di lot sizing	58



Problemi di ottimizzazione combinatoria

Esercizio 1.1 — Insieme base, soluzioni ammissibili e obiettivo

Consideriamo l'insieme base $\mathcal{U} = \{1, \dots, 6\}$ con i pesi

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$
c_j	5	8	6	3	7	4

Un sottoinsieme $S \subseteq \mathcal{U}$ è ammissibile se non contiene due elementi consecutivi (j e $j + 1$), e l'obiettivo $f(S) = \sum_{j \in S} c_j$ è da massimizzare.

Domande

1. Calcolare il numero di soluzioni candidate. Stabilire se $\{1, 3, 4\}$ è ammissibile, e se lo è $\{2, 4, 6\}$.
2. Contare i sottoinsiemi ammissibili, raggruppati per numero di elementi.
3. Trovare la soluzione ottima e $z(I)$.
4. Applicare la regola greedy: prendere l'elemento di peso massimo, scartare i suoi vicini e ripetere sugli elementi rimasti. Dare il bound primale e il suo gap relativo rispetto a $z(I)$.

Soluzione

1. Le candidate sono i $2^6 = 64$ sottoinsiemi di $\mathcal{U}$. Il sottoinsieme $\{1, 3, 4\}$ non è ammissibile, poiché contiene 3 e 4; il sottoinsieme $\{2, 4, 6\}$ è ammissibile.
2. Un sottoinsieme ammissibile di 6 elementi ha al più 3 elementi. Per enumerazione:

elementi	sottoinsiemi ammissibili
0	1
1	6
2	10
3	4
totale	21

I sottoinsiemi con 2 elementi sono le $\binom{6}{2} = 15$ coppie meno le 5 coppie consecutive: 10. Solo 21 delle 64 candidate sono ammissibili.

3. I sottoinsiemi ammissibili con 3 elementi sono $\{1, 3, 5\}$ ($f = 18$), $\{1, 3, 6\}$ ($f = 15$), $\{1, 4, 6\}$ ($f = 12$), $\{2, 4, 6\}$ ($f = 15$). Un sottoinsieme con al più 2 elementi ha valore al più $7 + 8 = 15$. Quindi la soluzione ottima è $\tilde{S} = \{1, 3, 5\}$, con $z(I) = 18$; è l'unica soluzione ottima.

4. La regola greedy procede così:

- prendiamo l'elemento 2 (peso 8) e scartiamo i suoi vicini 1, 3;
- prendiamo l'elemento 5 (peso 7) e scartiamo i suoi vicini 4, 6;

Restituisce $\bar{S} = \{2, 5\}$, di valore 15: un bound primale $LB = 15$. Il gap relativo rispetto a $z(I)$ è $\frac{18-15}{15} = \frac{1}{3} \approx 20.0\%$: prendere per primo l'elemento più pesante vieta due suoi vicini, i cui pesi insieme sono maggiori.

Solo 21 dei 64 sottoinsiemi sono ammissibili; l'ottimo è $\tilde{S} = \{1, 3, 5\}$ con $z(I) = 18$, mentre la regola greedy dà 15.

Esercizio 1.2 — Contare le soluzioni

Contiamo gli oggetti combinatori di piccoli insiemi finiti.

- I sottoinsiemi di un insieme con 6 elementi.
- Gli ordinamenti e gli ordinamenti ciclici di 6 elementi.
- Le partizioni dell'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Gli assegnamenti di 4 elementi a 2 etichette.

Domande

- Calcolare quanti sottoinsiemi ha l'insieme (a) e quanti di essi hanno esattamente 2 elementi.
- Calcolare quanti sono gli ordinamenti dei 6 elementi di (b), quanti di essi descrivono lo stesso ordinamento ciclico e quanti sono gli ordinamenti ciclici distinti.

3. Calcolare i numeri di Bell $B(1), \dots, B(5)$ con la ricorsione del capitolo e dedurre quante partizioni ha l'insieme (c).
4. Contare, per enumerazione, le partizioni dell'insieme (c), raggruppate per numero di blocchi.
5. Calcolare quanti assegnamenti ha (d) e quante soluzioni distinte restano se le due etichette sono intercambiabili.

Soluzione

1. I sottoinsiemi sono $2^6 = 64$; quelli con 2 elementi sono $\binom{6}{2} = 15$.
2. Gli ordinamenti sono $6! = 720$. Un ordinamento ciclico è descritto da 6 ordinamenti, uno per ogni elemento di partenza, e da altri 6 letti nel verso opposto: $2 \cdot 6 = 12$ ordinamenti ciascuno. Gli ordinamenti ciclici distinti sono $\frac{720}{12} = 60 = \frac{(6-1)!}{2}$.
3. Con $B(0) = 1$ e $B(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B(k)$, ogni termine è un coefficiente binomiale per un numero di Bell già calcolato:

$$B(1) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$B(2) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$$

$$B(3) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 5$$

$$B(4) = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 5 = 15$$

$$B(5) = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 15 = 52.$$

L'insieme (c) ha $B(5) = 52$ partizioni.

4. Per enumerazione:

blocchi	partizioni
1	1
2	15
3	25
4	10
5	1
totale	52

Per esempio, le 10 partizioni in 4 blocchi mettono insieme due elementi, e le coppie sono $\binom{5}{2} = 10$.

5. Ogni elemento va a una delle 2 etichette: $2^4 = 16$ assegnamenti. Se le etichette sono intercambiabili, un assegnamento e quello con le due etichette scambiate sono la stessa soluzione. Gli assegnamenti con tutti gli elementi su un'etichetta danno 1 soluzione (contata due volte fra i 16), gli altri 14 danno $\frac{14}{2} = 7$ soluzioni con due blocchi non vuoti: 8 soluzioni distinte, le partizioni dei 4 elementi in al più 2 blocchi.

Le candidate sono 2^n sottoinsiemi, $n!$ ordinamenti, $(n-1)!/2$ ordinamenti ciclici, $B(n)$ partizioni e m^n assegnamenti; con etichette intercambiabili, gli assegnamenti diventano partizioni in al più m blocchi.

Esercizio 1.3 — Forza bruta e tempo di calcolo

Un calcolatore valuta 10^9 soluzioni candidate al secondo, e concediamo un giorno di calcolo (86 400 secondi).

Domande

1. Calcolare quante candidate si possono valutare in un giorno.
2. Determinare il massimo numero n di elementi per cui si possono enumerare in un giorno tutti i sottoinsiemi, tutti gli ordinamenti ciclici e tutte le partizioni.
3. Rispondere alla stessa domanda per un calcolatore 1000 volte più veloce. Calcolare quanti elementi guadagna in ciascun caso.

Soluzione

1. $86\,400 \cdot 10^9 \approx 8.64 \cdot 10^{13}$ candidate.
2. Cerchiamo il massimo n il cui numero di candidate non supera il budget:
 - sottoinsiemi: $2^{46} \approx 7.04 \cdot 10^{13} \leq 8.64 \cdot 10^{13} < 2^{47} \approx 1.41 \cdot 10^{14}$, quindi $n = 46$;
 - ordinamenti ciclici: $16!/2 \approx 1.05 \cdot 10^{13} \leq 8.64 \cdot 10^{13} < 17!/2 \approx 1.78 \cdot 10^{14}$, quindi $n = 17$;
 - partizioni: $B(20) \approx 5.17 \cdot 10^{13} \leq 8.64 \cdot 10^{13} < B(21) \approx 4.75 \cdot 10^{14}$, quindi $n = 20$;
3. Il budget diventa $\approx 8.64 \cdot 10^{16}$:
 - sottoinsiemi: $2^{56} \approx 7.21 \cdot 10^{16} \leq 8.64 \cdot 10^{16} < 2^{57} \approx 1.44 \cdot 10^{17}$, quindi $n = 56$;
 - ordinamenti ciclici: $19!/2 \approx 6.08 \cdot 10^{16} \leq 8.64 \cdot 10^{16} < 20!/2 \approx 1.22 \cdot 10^{18}$, quindi $n = 20$;
 - partizioni: $B(23) \approx 4.42 \cdot 10^{16} \leq 8.64 \cdot 10^{16} < B(24) \approx 4.46 \cdot 10^{17}$, quindi $n = 23$;

Il calcolatore più veloce guadagna 10 elementi per i sottoinsiemi, 3 per le partizioni e 3 per gli ordinamenti ciclici: un fattore 1000 in velocità sposta il limite solo di pochi elementi.

In un giorno la forza bruta tratta circa 46 elementi per i sottoinsiemi, 20 per le partizioni e 17 per gli ordinamenti ciclici; un calcolatore 1000 volte più veloce aggiunge solo pochi elementi.

Esercizio 1.4 — Bound primale, bound duale e gap

Consideriamo l'insieme base $\mathcal{U} = \{1, \dots, 5\}$, i pesi $\mathbf{c} = (4, 6, 3, 5, 2)$, l'obiettivo $f(S) = \sum_{j \in S} c_j$ da **minimizzare** e le soluzioni ammissibili

$$\mathcal{F} = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}.$$

Domande

1. Calcolare quante sono le soluzioni candidate e quante quelle ammissibili.
2. La soluzione $\{1, 2\}$ è ammissibile: stabilire quale bound fornisce.
3. Ogni sottoinsieme ammissibile ha almeno 2 elementi: ricavarne un bound duale. Calcolare il gap assoluto e il gap relativo.
4. Migliorare il bound duale esaminando separatamente i sottoinsiemi ammissibili con 2 elementi e quelli con almeno 3 elementi. Trovare una soluzione ottima e spiegare perché è ottima.

Soluzione

1. Le candidate sono i $2^5 = 32$ sottoinsiemi di $\mathcal{U}$; 7 di essi sono ammissibili.
2. $f(\{1, 2\}) = 4 + 6 = 10$ è il valore di una soluzione ammissibile di un problema di minimo, quindi un bound primale: $UB = 10$.
3. Un sottoinsieme con almeno 2 elementi pesa almeno quanto i due pesi più piccoli: $f(S) \geq 2 + 3 = 5$ per ogni $S \in \mathcal{F}$, quindi $LB = 5$. Il gap assoluto è $10 - 5 = 5$ e il gap relativo, diviso per il lower bound, è $\frac{5}{5} \approx 100.0\%$.
4. I sottoinsiemi ammissibili con 2 elementi sono $\{1, 2\}$ ($f = 10$), $\{1, 4\}$ ($f = 9$), $\{3, 4\}$ ($f = 8$): il loro minimo è 8. Un sottoinsieme con almeno 3 elementi pesa almeno $2 + 3 + 4 = 9$. Quindi $LB = 8$. La soluzione ammissibile $\{3, 4\}$ ha valore $3 + 5 = 8 = LB$: il gap è nullo, quindi è ottima e $z(I) = 8$.

$\{1, 2\}$ dà $UB = 10$, l'argomento sulla cardinalità dà $LB = 5$ e l'argomento per casi dà $LB = 8$, raggiunto da $\{3, 4\}$: $z(I) = 8$.

Esercizio 1.5 — Riconoscere l'oggetto combinatorio

Per ogni situazione, indicare l'oggetto combinatorio di una soluzione (sottoinsieme, ordinamento, ordinamento ciclico, partizione, assegnamento) e il numero di soluzioni candidate.

Domande

1. Un fondo di ricerca deve scegliere quali fra 12 proposte finanziare con un budget fissato.

2. Una tecnica deve visitare 8 sedi (compreso il suo ufficio) e tornare in ufficio.
3. 8 scatole devono essere caricate su furgoni identici della stessa capacità (contare i modi di raggruppare le scatole).
4. 8 lavori devono essere assegnati a 3 macchine (contare gli assegnamenti).
5. Una fabbrica deve decidere in quali delle prossime 12 settimane attrezzare la sua linea.

Soluzione

1. Un sottoinsieme delle proposte: $2^{12} = 4096$ sottoinsiemi.
2. Un ordinamento ciclico delle 8 sedi: $(8 - 1)!/2 = 5040/2 = 2520$ ordinamenti ciclici.
3. Una partizione delle scatole: $B(8) = 4140$ partizioni.
4. Un assegnamento dei lavori alle macchine: $3^8 = 6561$ assegnamenti.
5. Un sottoinsieme delle settimane: $2^{12} = 4096$ scelte.

Esercizio 1.6 — Forza bruta, bound e gap

Consideriamo l'insieme base $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4\}$, i pesi $\mathbf{c} = (8, 5, 4, 3)$, l'obiettivo $f(S) = \sum_{j \in S} c_j$ da massimizzare e le soluzioni ammissibili

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}.$$

Domande

1. Calcolare quante sono le soluzioni candidate e quante quelle ammissibili.
2. La soluzione $\{1, 4\}$ è ammissibile: stabilire quale bound fornisce.
3. Trovare un bound duale distinguendo i sottoinsiemi ammissibili che contengono l'elemento 1 da quelli che non lo contengono, e calcolare il gap assoluto e il gap relativo.
4. Trovare una soluzione ottima e spiegare perché è ottima.

Soluzione

1. Le candidate sono i $2^4 = 16$ sottoinsiemi di $\mathcal{U}$; 10 di essi sono ammissibili.
2. $f(\{1, 4\}) = 8 + 3 = 11$ è il valore di una soluzione ammissibile di un problema di massimo, quindi un bound primale: $LB = 11$.
3. I sottoinsiemi ammissibili che contengono 1 sono $\{1\}$ e $\{1, 4\}$, di valore al più $8 + 3 = 11$. Un sottoinsieme ammissibile senza 1 ha valore al più $5 + 4 + 3 = 12$. Quindi $f(S) \leq 12$ per ogni $S \in \mathcal{F}$, e $UB = 12$. Il gap assoluto è $12 - 11 = 1$ e il gap relativo è $\frac{1}{11} \approx 9.1\%$.

4. La soluzione ammissibile $\{2, 3, 4\}$ ha valore $5 + 4 + 3 = 12 = \text{UB}$. Il gap è nullo, quindi è ottima e $z(I) = 12$: l'elemento di peso massimo non è nella soluzione ottima.

Esercizio 1.7 — Quanto può essere grande n ?

Un calcolatore valuta 10^9 soluzioni candidate al secondo, e concediamo un'ora di calcolo.

Domande

1. Determinare il massimo numero n di elementi per cui si possono enumerare tutti i sottoinsiemi.
2. Determinare il massimo numero n di elementi per cui si possono enumerare tutti gli ordinamenti ciclici.
3. Rispondere alle stesse domande per un calcolatore 1000 volte più veloce.

Soluzione

In un'ora il calcolatore valuta $3600 \cdot 10^9 = 3.6 \cdot 10^{12}$ candidate.

1. $2^{41} \approx 2.20 \cdot 10^{12} \leq 3.6 \cdot 10^{12} < 2^{42} \approx 4.40 \cdot 10^{12}$, quindi $n = 41$ elementi.
2. Per 16 elementi $15!/2 \approx 6.54 \cdot 10^{11} \leq 3.6 \cdot 10^{12}$, mentre per 17 elementi $16!/2 \approx 1.05 \cdot 10^{13} > 3.6 \cdot 10^{12}$; quindi $n = 16$ elementi.
3. Il budget diventa $3.6 \cdot 10^{15}$. Per i sottoinsiemi, $2^{51} \approx 2.25 \cdot 10^{15} \leq 3.6 \cdot 10^{15} < 2^{52} \approx 4.50 \cdot 10^{15}$, quindi $n = 51$ elementi: 10 in più. Per gli ordinamenti ciclici, $18!/2 \approx 3.20 \cdot 10^{15} \leq 3.6 \cdot 10^{15} < 19!/2 \approx 6.08 \cdot 10^{16}$, quindi $n = 19$ elementi: solo 3 in più.

Esercizio 1.8 — Arrotondare i bound duali

In due istanze tutte le soluzioni ammissibili hanno valore intero.

Domande

1. In un'istanza di massimo, un'euristica trova una soluzione di valore 11 e un rilassamento dà il bound duale 12.6. Dare LB, UB e il gap relativo, prima e dopo l'arrotondamento del bound duale.
2. Si trova poi una soluzione di valore 12: stabilire che cosa si può concludere.
3. In un'istanza di minimo, un'euristica trova una soluzione di valore 15 e un argomento dà il bound duale 13.2. Dare LB, UB e il gap relativo dopo l'arrotondamento.

Soluzione

1. LB = 11 (primale) e UB = 12.6 (duale): il gap relativo è $\frac{1.6}{11} \approx 14.5\%$. Poiché i valori sono interi, anche $\lfloor 12.6 \rfloor = 12$ è un bound duale, e il gap diventa $\frac{1}{11} \approx 9.1\%$.
2. Ora LB = 12 = UB: il gap è nullo e la soluzione di valore 12 è ottima.

3. Nella forma di minimo il bound primale è $UB = 15$ e il bound duale è $LB = \lceil 13.2 \rceil = 14$. Il gap relativo, diviso per il lower bound, è $\frac{15-14}{14} = \frac{1}{14} \approx 7.1\%$.

Problemi di zaino

Esercizio 2.1 — Ammissibilità, valore e bound (KP)

Consideriamo l'istanza di zaino con capacità $c = 12$ e $n = 5$ oggetti, $\mathcal{J} = \{1, \dots, 5\}$, con i seguenti profitti e pesi:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$
p_j	6	12	5	13	8
w_j	3	4	5	6	8

Domande

1. Verificare le due ipotesi sui dati del KP.
2. Per ciascuno dei sottoinsiemi $S_1 = \{1, 2, 5\}$, $S_2 = \{2, 4\}$, $S_3 = \{1, 2, 3\}$, calcolare il peso totale, stabilire se è ammissibile e, in caso affermativo, darne il profitto.
3. Calcolare il bound di cardinalità $\bar{k}$ e il bound duale che ne deriva.
4. Calcolare il bound duale del rilassamento continuo (gli oggetti si possono prendere in modo frazionario, in ordine di efficienza non crescente) e arrotondarlo.
5. Trovare una soluzione ottima elencando i sottoinsiemi ammissibili, e calcolare il gap fra il miglior bound duale e $z(I)$.

Soluzione

1. Il peso totale è $3 + 4 + 5 + 6 + 8 = 26 > 12$, quindi non tutti gli oggetti entrano; l'oggetto più pesante pesa $8 \leq 12$, quindi ogni oggetto entra da solo. Entrambe le ipotesi valgono.
2.
 - S_1 : peso $3 + 4 + 8 = 15 > 12$, non ammissibile;
 - S_2 : peso $4 + 6 = 10 \leq 12$, ammissibile, profitto $12 + 13 = 25$;
 - S_3 : peso $3 + 4 + 5 = 12 \leq 12$, ammissibile, profitto $6 + 12 + 5 = 23$;

3. I pesi in ordine non decrescente sono 3, 4, 5, 6, 8: i 3 oggetti più leggeri pesano $3 + 4 + 5 = 12 \leq 12$, i 4 più leggeri pesano $18 > 12$. Quindi $\bar{k} = 3$: un sottoinsieme ammissibile ha al più 3 oggetti, e i 3 profitti più grandi danno

$$UB = 13 + 12 + 8 = 33.$$

4. Le efficienze sono $\frac{6}{3} = 2$, $\frac{12}{4} = 3$, $\frac{5}{5} = 1$, $\frac{13}{6} = 2$, $\frac{8}{8} = 1$, quindi l'ordine è 2, 4, 1, 3, 5. Gli oggetti 2, 4 pesano 10, e la frazione $\frac{2}{3}$ dell'oggetto 1 riempie la capacità residua 2:

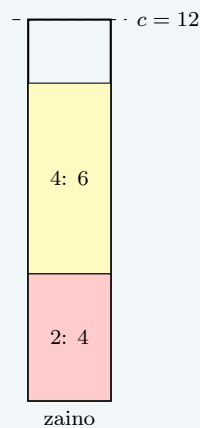
$$UB = 12 + 13 + \frac{2}{3} \cdot 6 = 29.$$

I profitti sono interi, quindi $UB = \lfloor 29 \rfloor = 29$; è più forte del bound di cardinalità.

5. I sottoinsiemi ammissibili sono 15:

S	peso	profitto	S	peso	profitto
$\emptyset$	0	0	$\{1, 4\}$	9	19
$\{1\}$	3	6	$\{1, 5\}$	11	14
$\{2\}$	4	12	$\{2, 3\}$	9	17
$\{3\}$	5	5	$\{2, 4\}$	10	25
$\{4\}$	6	13	$\{2, 5\}$	12	20
$\{5\}$	8	8	$\{3, 4\}$	11	18
$\{1, 2\}$	7	18	$\{1, 2, 3\}$	12	23
$\{1, 3\}$	8	11			

La soluzione ottima è $\tilde{S} = \{2, 4\}$, l'unica con profitto $z(I) = 25$:



Il gap fra il bound continuo e l'ottimo è $29 - 25 = 4$: il bound da solo non certifica l'ottimo, l'enumerazione sì.

La soluzione ottima è $\tilde{S} = \{2, 4\}$ con $z(I) = 25$; i bound duali sono 33 (cardinalità) e 29 (rilassamento continuo).

Esercizio 2.2 — Il subset sum e la sua soluzione come KP (SSP)

Consideriamo l'istanza di subset sum con $n = 6$ oggetti e i pesi

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$
w_j	5	14	3	6	15	4

con il valore obiettivo $c = 15$.

Domande

1. Verificare le due ipotesi del SSP.
2. Stabilire se il sottoinsieme $\{1, 4, 6\}$ è ammissibile, e se lo è il sottoinsieme $\{3, 4, 6\}$.
3. Trovare tutti i sottoinsiemi ammissibili per il valore obiettivo $c = 15$, con una breve giustificazione.
4. Ora il valore obiettivo è $c = 16$. Risolvere l'istanza come un KP con $p_j = w_j$ e dare la risposta al SSP.

Soluzione

1. Il peso totale è $47 \geq 15$ e l'oggetto più pesante pesa $15 \leq 15$: entrambe le ipotesi valgono.
2. $w_1 + w_4 + w_6 = 5 + 6 + 4 = 15 = 15$: ammissibile. $w_3 + w_4 + w_6 = 3 + 6 + 4 = 13 \neq 15$: non ammissibile.
3. Esaminiamo i sottoinsiemi in base al loro oggetto più pesante, nell'ordine 5, 2, 4, 1, 6, 3 di peso non crescente.

- L'oggetto 5 (peso 15) raggiunge da solo il valore obiettivo: $\{5\}$.
- L'oggetto 2 (peso 14) lascia 1, e nessun oggetto pesa 1.
- Senza gli oggetti 5 e 2 i pesi restanti 6, 5, 4, 3 sommano a 18: un loro sottoinsieme pesa 15 esattamente quando gli oggetti esclusi pesano 3, e l'unica scelta di questo tipo è escludere l'oggetto 3. Si ottiene $\{1, 4, 6\}$: $5 + 6 + 4 = 15$.

I sottoinsiemi ammissibili sono $\{5\}$ e $\{1, 4, 6\}$: la risposta è sì.

4. Con $p_j = w_j$ il KP massimizza il peso totale di un sottoinsieme di peso al più 16. Nessun sottoinsieme pesa 16:
 - con l'oggetto 5 o l'oggetto 2 servono ancora 1 o 2, e nessun oggetto ha questo peso;
 - senza di essi, gli oggetti esclusi dovrebbero pesare $18 - 16 = 2$, meno del peso minimo 3.

I sottoinsiemi migliori pesano $z = 15$, per esempio $\{5\}$. Poiché $z = 15 < 16$, la risposta al SSP con valore obiettivo 16 è no.

Valore obiettivo 15: sì, con $\{5\}$ e $\{1, 4, 6\}$. Valore obiettivo 16: no, il KP con $p_j = w_j$ raggiunge al più 15.

Esercizio 2.3 — Copie degli oggetti (BKP e UKP)

Consideriamo $n = 3$ oggetti con i seguenti profitti, pesi e copie disponibili, e uno zaino di capacità $c = 10$:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
p_j	4	13	13
w_j	3	5	2
b_j	1	2	2

Domande

1. Verificare le ipotesi del BKP e scrivere l'insieme esteso degli oggetti $\hat{\mathcal{J}}$.
2. Una soluzione del BKP è il vettore (x_1, x_2, x_3) dei numeri di copie, con $0 \leq x_j \leq b_j$. Calcolare quanti sono questi vettori. Stabilire se $(1, 1, 1)$ è ammissibile, e se lo è $(0, 2, 1)$.
3. Trovare una soluzione ottima del BKP per enumerazione, con una breve giustificazione.
4. Ora gli oggetti sono disponibili in un numero illimitato di copie (UKP). Calcolare i massimi numeri ammissibili di copie $\hat{b}_j$, il numero di vettori candidati e una soluzione ottima.

Soluzione

1. $\sum_j b_j w_j = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 17 > 10$; ogni oggetto entra ($w_j \leq 10$) e così tutte le sue copie: $b_j w_j = 3, 10, 4 \leq 10$. L'insieme esteso ha $\sum_j b_j = 5$ copie:

$$\hat{\mathcal{J}} = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}.$$

2. I vettori sono $\prod_j (b_j + 1) = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$, di cui 12 ammissibili. Il vettore $(1, 1, 1)$ pesa $10 \leq 10$, ammissibile, profitto 30; il vettore $(0, 2, 1)$ pesa 12, non ammissibile.
3. L'oggetto 3 ha l'efficienza massima, $\frac{13}{2}$, e l'oggetto 2 la seconda, $\frac{13}{5}$. Prendere tutte le copie degli oggetti 3 e 2 peserebbe $14 > 10$. Con $x_3 = 2$ (peso 4) la capacità residua 6 contiene una copia dell'oggetto 2, e l'ultima 1 unità non contiene nulla. L'enumerazione dei 12 vettori ammissibili conferma che $\tilde{x} = (0, 1, 2)$, di peso 9, è l'unica soluzione ottima, con $z(I) = 39$.
4. $\hat{b}_j = \lfloor c/w_j \rfloor$ dà $\hat{b} = (3, 2, 5)$, e i vettori candidati sono $\prod_j (\hat{b}_j + 1) = 4 \cdot 3 \cdot 6 = 72$, di cui 20 ammissibili. L'oggetto 3 è il più efficiente e il suo peso 2 divide $c = 10$: la soluzione

$\tilde{x} = (0, 0, 5)$ riempie lo zaino con l'oggetto più efficiente, quindi nessuna soluzione ha un profitto maggiore di $\frac{13}{2} \cdot 10 = 65$. È l'unica soluzione ottima, $z(I) = 65$.

BKP: $\tilde{x} = (0, 1, 2)$, $z(I) = 39$. UKP: $\tilde{x} = (0, 0, 5)$, $z(I) = 65$. Più copie possono solo aumentare il valore ottimo.

Esercizio 2.4 — Due zaini (MKP)

Consideriamo l'istanza di zaini multipli con $m = 2$ zaini di capacità $c_1 = 10$ e $c_2 = 6$, e $n = 5$ oggetti con i seguenti profitti e pesi:

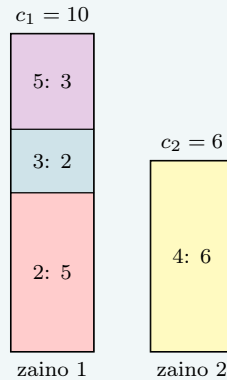
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$
p_j	4	8	9	10	13
w_j	2	5	2	6	3

Domande

1. Stabilire se si possono inserire tutti gli oggetti. Calcolare quante sono le soluzioni candidate, se ogni oggetto va in uno degli zaini o in nessuno.
2. Stabilire se la soluzione $S_1 = \{1, 2, 3\}$, $S_2 = \{4, 5\}$ è ammissibile e calcolarne il profitto.
3. Ogni soluzione ammissibile dell'MKP è anche una soluzione ammissibile di un KP con capacità $c_1 + c_2 = 16$. Usare questo fatto per calcolare un bound duale.
4. Trovare una soluzione ottima dell'MKP.

Soluzione

1. Il peso totale è $18 > c_1 + c_2 = 16$: non si possono inserire tutti gli oggetti. Ogni oggetto ha $m + 1 = 3$ scelte, quindi le soluzioni candidate sono $3^5 = 243$; 100 di esse sono ammissibili.
2. S_1 pesa $2 + 5 + 2 = 9 \leq 10$ e S_2 pesa $6 + 3 = 9 > 6$: la soluzione non è ammissibile.
3. Se S_1, S_2 è ammissibile per l'MKP, l'unione $S_1 \cup S_2$ pesa al più $c_1 + c_2 = 16$, quindi il suo profitto è al più il valore ottimo del KP con capacità 16. Il KP ha la soluzione ottima $\{2, 3, 4, 5\}$, di peso 16 e profitto 40: UB = 40.
4. Gli oggetti $\{2, 3, 4, 5\}$ della soluzione del KP si possono dividere fra i due zaini: $S_1 = \{2, 3, 5\}$ pesa $10 \leq 10$ e $S_2 = \{4\}$ pesa $6 \leq 6$. Il suo profitto 40 raggiunge il bound duale, quindi è ottima: $z(I) = 40$. L'enumerazione delle 100 soluzioni ammissibili mostra che è l'unica ottima.



La soluzione ottima mette $\{2, 3, 5\}$ nello zaino 1 e $\{4\}$ nello zaino 2, con $z(I) = 40$, uguale al bound duale del KP con capacità $c_1 + c_2$.

Esercizio 2.5 — Un oggetto per classe (MCKP)

Consideriamo l'istanza di zaino a scelta multipla con capacità $c = 16$ e $n = 7$ oggetti, partizionati nelle classi $\mathcal{J}_1 = \{1, 2\}$, $\mathcal{J}_2 = \{3, 4, 5\}$, $\mathcal{J}_3 = \{6, 7\}$, con i seguenti profitti e pesi:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$	$j = 7$
p_j	5	8	14	13	11	12	6
w_j	6	9	4	6	7	8	2

Domande

1. Verificare la condizione di ammissibilità $\sum_h \min_{j \in \mathcal{J}_h} w_j \leq c$ delle ipotesi.
2. Calcolare quante sono le soluzioni candidate. Stabilire se la scelta dell'oggetto più redditizio di ogni classe è ammissibile.
3. Trovare la soluzione ottima per enumerazione.

Soluzione

1. Gli oggetti più leggeri delle classi pesano 6, 4, 2, e $6 + 4 + 2 = 12 \leq 16$: l'istanza ha una soluzione ammissibile.
2. Una soluzione candidata prende un oggetto per classe: $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ candidate. Gli oggetti più redditizi sono 2, 3, 6, di peso totale $9 + 4 + 8 = 21 > 16$: questa scelta non è ammissibile.
3. Le candidate sono:

S	peso	profitto	ammissibile	S	peso	profitto	ammissibile
$\{1, 3, 6\}$	18	31	no	$\{2, 3, 6\}$	21	34	no
$\{1, 3, 7\}$	12	25	sì	$\{2, 3, 7\}$	15	28	sì
$\{1, 4, 6\}$	20	30	no	$\{2, 4, 6\}$	23	33	no
$\{1, 4, 7\}$	14	24	sì	$\{2, 4, 7\}$	17	27	no
$\{1, 5, 6\}$	21	28	no	$\{2, 5, 6\}$	24	31	no
$\{1, 5, 7\}$	15	22	sì	$\{2, 5, 7\}$	18	25	no

Solo 4 candidate sono ammissibili, e la migliore è $\tilde{S} = \{2, 3, 7\}$, di peso 15, con $z(I) = 28$; è l'unica soluzione ottima.

La soluzione ottima prende gli oggetti 2, 3, 7, uno per classe, con $z(I) = 28$: scegliere l'oggetto più redditizio di ogni classe non è ammissibile.

Esercizio 2.6 — Una scelta greedy non ottima (KP)

Un fondo ha un budget $c = 14$ e $n = 5$ progetti candidati, gli oggetti $\mathcal{J} = \{1, \dots, 5\}$ di un'istanza di zaino, con i seguenti profitti e costi (pesi):

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$
p_j	14	9	15	13	11
w_j	7	2	9	6	8

Domande

1. Scrivere l'istanza come problema di ottimizzazione combinatoria: insieme base, soluzioni ammissibili e funzione obiettivo. Calcolare quante sono le soluzioni candidate.
2. Elencare i sottoinsiemi ammissibili, con peso e profitto, e trovare la soluzione ottima per forza bruta.
3. Applicare l'algoritmo greedy per efficienza: ordinare gli oggetti per efficienza p_j/w_j non crescente (a parità, per indice minimo) e inserire ogni oggetto che entra. Stabilire se la soluzione greedy è ottima.
4. Calcolare il bound duale del rilassamento continuo, in cui gli oggetti si possono prendere in modo frazionario, e arrotondarlo. Calcolare i gap relativi della soluzione greedy rispetto a questo bound e rispetto a $z(I)$.

Soluzione

1. L'insieme base è $\mathcal{U} = \mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Un sottoinsieme $S \subseteq \mathcal{U}$ è ammissibile se $\sum_{j \in S} w_j \leq 14$, e l'obiettivo è $f(S) = \sum_{j \in S} p_j$, da massimizzare. Le soluzioni candidate sono i $2^5 = 32$ sottoinsiemi.
2. I tre oggetti più leggeri pesano $2+6+7 = 15 > 14$, quindi un sottoinsieme ammissibile ha al più 2 oggetti. I 12 sottoinsiemi ammissibili sono:

S	peso	profitto	S	peso	profitto
$\emptyset$	0	0	$\{1, 2\}$	9	23
$\{1\}$	7	14	$\{1, 4\}$	13	27
$\{2\}$	2	9	$\{2, 3\}$	11	24
$\{3\}$	9	15	$\{2, 4\}$	8	22
$\{4\}$	6	13	$\{2, 5\}$	10	20
$\{5\}$	8	11	$\{4, 5\}$	14	24

La soluzione ottima è $\tilde{S} = \{1, 4\}$, di peso 13, con $z(I) = 27$; è l'unico sottoinsieme con questo profitto.

3. Le efficienze sono

$$\frac{p_1}{w_1} = \frac{14}{7} = 2, \quad \frac{p_2}{w_2} = \frac{9}{2}, \quad \frac{p_3}{w_3} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}, \quad \frac{p_4}{w_4} = \frac{13}{6}, \quad \frac{p_5}{w_5} = \frac{11}{8},$$

quindi l'ordine è 2, 4, 1, 3, 5. L'algoritmo greedy esamina gli oggetti in questo ordine:

- l'oggetto 2 entra (peso 2): capacità residua 12;
- l'oggetto 4 entra (peso 6): capacità residua 6;
- l'oggetto 1 non entra (peso 7 > 6);
- l'oggetto 3 non entra (peso 9 > 6);
- l'oggetto 5 non entra (peso 8 > 6);

Restituisce $\bar{S} = \{2, 4\}$, di profitto 22: un bound primale $LB = 22$. Non è ottima, poiché $z(I) = 27$. I due oggetti efficienti occupano 8 unità del budget, e la capacità residua 6 è troppo piccola per qualunque altro oggetto; la soluzione ottima rinuncia all'oggetto 2, il più efficiente, e usa 13 delle 14 unità del budget con gli oggetti 1 e 4.

4. Nel rilassamento continuo gli oggetti si prendono nello stesso ordine: gli oggetti 2, 4 occupano 8 unità, e la frazione $\frac{6}{7}$ dell'oggetto 1 riempie la capacità residua 6:

$$UB = 9 + 13 + \frac{6}{7} \cdot 14 = 34.$$

Il bound è intero, non serve arrotondare. Rispetto al bound, il gap relativo della soluzione greedy è $\frac{34-22}{22} = \frac{6}{11} \approx 54.5\%$; rispetto all'ottimo è $\frac{27-22}{22} = \frac{5}{22} \approx 22.7\%$. Senza l'enumerazione, il bound da solo non può certificare l'ottimo.

La scelta greedy per efficienza dà profitto 22, mentre l'ottimo, trovato per forza bruta sui 12 sottoinsiemi ammissibili, è $z(I) = 27$ con $\tilde{S} = \{1, 4\}$: $22 \leq z(I) = 27 \leq 34$.

Problemi di packing

Esercizio 3.1 — Verificare un riempimento (BPP)

Consideriamo l'istanza di bin packing con capacità $c = 12$ e $n = 8$ oggetti di pesi

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$	$j = 7$	$j = 8$
w_j	7	5	4	6	3	8	2	4

e le tre soluzioni proposte

$$\mathcal{P}_a = \{\{1, 2\}, \{3, 6\}, \{4, 5, 7\}, \{8\}\},$$

$$\mathcal{P}_b = \{\{1, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{6, 8\}, \{7\}\},$$

$$\mathcal{P}_c = \{\{1, 2\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{8\}\}.$$

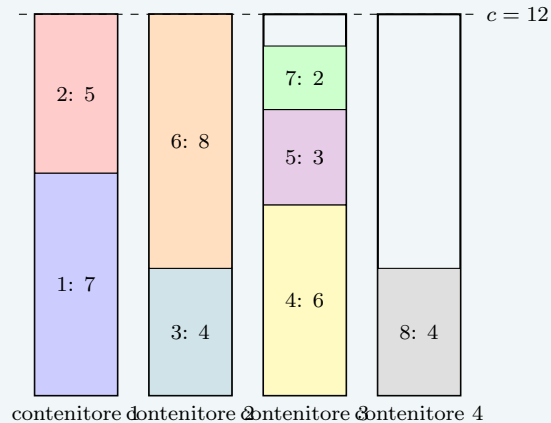
Domande

1. Verificare le ipotesi del BPP.
2. Per ogni soluzione proposta, calcolare il peso di ogni contenitore e stabilire se è ammissibile.
3. Calcolare il bound sul peso. Stabilire se una delle soluzioni proposte è ottima.
4. Disegnare la soluzione ammissibile.

Soluzione

1. Il peso totale è $39 > 12$ e l'oggetto più pesante pesa $8 \leq 12$: entrambe le ipotesi valgono.
2.
 - $\mathcal{P}_a$: i contenitori pesano $7 + 5 = 12$, $4 + 8 = 12$, $6 + 3 + 2 = 11$, $4 = 4$. È una partizione e ogni contenitore pesa al più 12: ammissibile, con 4 contenitori.
 - $\mathcal{P}_b$: i contenitori pesano $7 + 6 = 13$, $5 + 4 + 3 = 12$, $8 + 4 = 12$, $2 = 2$. È una partizione, ma il contenitore $\{1, 4\}$ pesa $13 > 12$. Non ammissibile.

- $\mathcal{P}_c$: i contenitori pesano $7 + 5 = 12$, $4 + 8 = 12$, $6 + 3 = 9$, $4 = 4$. Non è una partizione di $\mathcal{I}$: l'oggetto 7 non è in alcun contenitore. Non ammissibile.
3. $LB = \lceil 39/12 \rceil = 4$. La soluzione ammissibile $\mathcal{P}_a$ usa 4 contenitori, quindi raggiunge il bound: è ottima e $z(I) = 4$.
4. I quattro contenitori di $\mathcal{P}_a$, con la linea tratteggiata alla capacità:



Solo $\mathcal{P}_a$ è ammissibile; usa $4 = \lceil 39/12 \rceil$ contenitori ed è quindi ottima.

Esercizio 3.2 — Quando il bound sul peso non è stretto (BPP)

Consideriamo l'istanza di bin packing con capacità $c = 10$ e $n = 6$ oggetti di pesi

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$
w_j	7	6	6	5	3	3

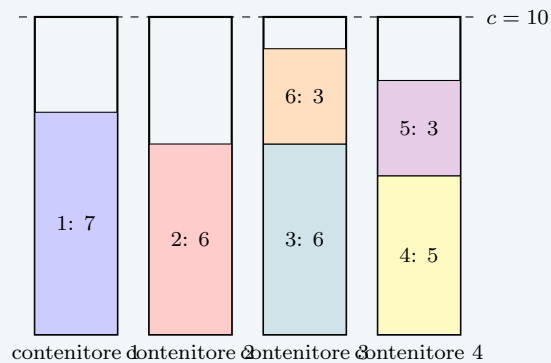
Domande

1. Calcolare il bound sul peso.
2. Mostrare che due qualunque degli oggetti 1, 2, 3, 4 non entrano insieme in un contenitore. Ricavarne un lower bound su $z(I)$.
3. Trovare una soluzione ottima e stabilire se è unica.
4. Calcolare il gap fra il bound sul peso e $z(I)$.

Soluzione

1. $\sum_j w_j = 7 + 6 + 6 + 5 + 3 + 3 = 30$, quindi $\lceil 30/10 \rceil = 3$.

- Le coppie danno $w_1 + w_2 = 13$, $w_1 + w_3 = 13$, $w_1 + w_4 = 12$, $w_2 + w_3 = 12$, $w_2 + w_4 = 11$, $w_3 + w_4 = 11$, tutte maggiori di 10. Quindi gli oggetti 1, 2, 3, 4 stanno in quattro contenitori diversi in ogni soluzione ammissibile, e $z(I) \geq 4$.
- La soluzione $\{\{1\}, \{2\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}\}$ ha contenitori di peso 7, 6, 9, 8, tutti al più 10: usa 4 contenitori e raggiunge il bound della Domanda 2, quindi è ottima, $z(I) = 4$.



Non è unica: l'enumerazione dà 12 partizioni ottime, poiché gli oggetti 5 e 6 possono andare con uno qualunque dei quattro oggetti grandi che ha spazio per essi.

- Il bound sul peso dà 3 e $z(I) = 4$: un gap assoluto di 1. Il bound sul peso non vede che gli oggetti grandi non possono condividere un contenitore.

$z(I) = 4$, mentre il bound sul peso dà solo 3: i quattro oggetti di peso maggiore di $c/2$ sono a due a due in conflitto e richiedono quattro contenitori.

Esercizio 3.3 — Contare i riempimenti (BPP)

Consideriamo l'istanza di bin packing con capacità $c = 12$ e $n = 5$ oggetti di pesi

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$
w_j	7	6	5	4	2

Domande

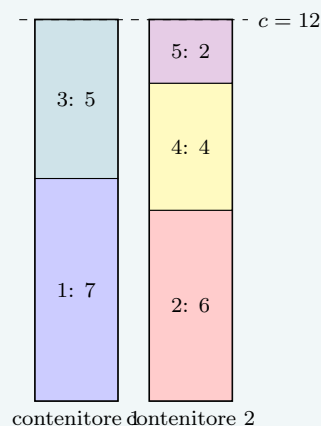
- Calcolare quante soluzioni candidate ha l'istanza.
- Determinare quali coppie di oggetti entrano insieme in un contenitore, e quali terne.
- Contare le soluzioni ammissibili, raggruppate per numero di contenitori.
- Calcolare il bound sul peso ed elencare tutte le soluzioni ottime.

Soluzione

1. Le candidate sono le partizioni dei 5 oggetti: $B(5) = 52$.
2. Le coppie che entrano sono $\{1, 3\}$ (12), $\{1, 4\}$ (11), $\{1, 5\}$ (9), $\{2, 3\}$ (11), $\{2, 4\}$ (10), $\{2, 5\}$ (8), $\{3, 4\}$ (9), $\{3, 5\}$ (7), $\{4, 5\}$ (6); le terne che entrano sono $\{2, 4, 5\}$ (12), $\{3, 4, 5\}$ (11). Quattro oggetti non entrano mai insieme, poiché i quattro più leggeri pesano $17 > 12$.
3. Una partizione ammissibile usa solo singoletti e le coppie e terne precedenti. L'enumerazione dà:

contenitori	partizioni ammissibili
2	1
3	14
4	9
5	1
totale	25

4. $LB = \lceil 24/12 \rceil = 2$, e ci sono partizioni con 2 contenitori: $z(I) = 2$. La soluzione ottima è unica, $\{\{1, 3\}, \{2, 4, 5\}\}$: entrambi i contenitori sono riempiti esattamente.



Delle 52 partizioni, 25 sono ammissibili e una sola è ottima, con $z(I) = 2 = \lceil 24/12 \rceil$.

Esercizio 3.4 — Copie degli oggetti (CSP)

Consideriamo l'istanza di cutting stock con capacità $c = 10$ e $n = 3$ oggetti, con i seguenti pesi e copie richieste:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
w_j	5	4	3
d_j	2	3	2

Domande

1. Scrivere l'insieme esteso degli oggetti $\hat{\mathcal{J}}$ e verificare le ipotesi.
2. Stabilire se la famiglia $\{\{(1, 1), (2, 1)\}, \{(1, 2), (2, 2)\}, \{(3, 1), (3, 2)\}\}$ è una soluzione ammissibile e quanti contenitori usa.
3. Calcolare il bound sul peso, con i pesi di tutte le copie.
4. Trovare una soluzione ottima.

Soluzione

1. L'insieme esteso ha $\sum_j d_j = 7$ copie:

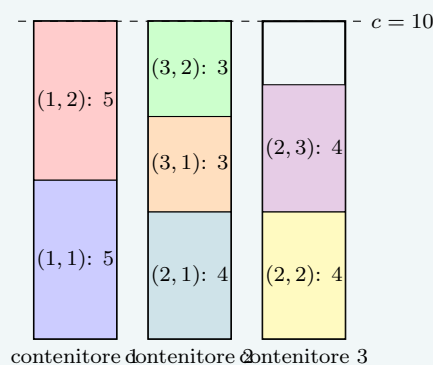
$$\hat{\mathcal{J}} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}.$$

Il peso totale è $\sum_j d_j w_j = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 28 > 10$ e ogni oggetto entra in un contenitore, $w_j \leq 10$: entrambe le ipotesi valgono.

2. I contenitori pesano 9, 9, 6, tutti al più 10, ma la copia (2, 3) non è in alcun contenitore: la famiglia non è una partizione di $\hat{\mathcal{J}}$ e non è ammissibile.
3. $LB = \left\lceil \sum_j d_j w_j / c \right\rceil = \lceil 28/10 \rceil = 3$.
4. Le due copie dell'oggetto 1 riempiono un contenitore (10); una copia dell'oggetto 2 e le due copie dell'oggetto 3 ne riempiono un altro ($4 + 3 + 3 = 10$); le ultime due copie dell'oggetto 2 pesano 8. La soluzione

$$\mathcal{P} = \{\{(1, 1), (1, 2)\}, \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}, \{(2, 2), (2, 3)\}\}$$

usa 3 contenitori e raggiunge il bound: è ottima, $z(I) = 3$.



Con i pesi delle 7 copie il bound sul peso è 3, e il riempimento trovato accoppiando le copie lo raggiunge: $z(I) = 3$.

Esercizio 3.5 — Riempire esattamente ogni contenitore (BPP)

Consideriamo l'istanza di bin packing con capacità $c = 10$ e $n = 8$ oggetti di pesi

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$	$j = 7$	$j = 8$
w_j	5	5	4	4	4	3	3	2

Domande

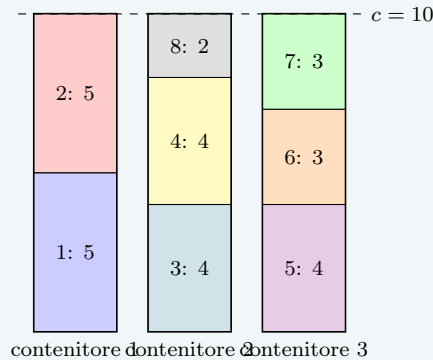
1. Calcolare il bound sul peso.
2. Mostrare che una soluzione con 3 contenitori deve riempire esattamente ogni contenitore.
3. Elencare i modi di ottenere un peso totale esattamente uguale a 10 con i pesi dell'istanza, e usarli per trovare una soluzione con 3 contenitori.
4. Determinare quanti contenitori servirebbero se l'oggetto 8 pesasse 3 invece di 2.

Soluzione

1. $\sum_j w_j = 30$, quindi $LB = \lceil 30/10 \rceil = 3$.
2. 3 contenitori contengono al più $3 \cdot 10 = 30$, e gli oggetti pesano esattamente 30: se un contenitore pesasse meno di 10, gli altri non potrebbero contenere il resto.
3. Come multinsiemi di pesi, un totale esattamente uguale a 10 si ottiene con

$$\{5, 5\}, \quad \{5, 3, 2\}, \quad \{4, 4, 2\}, \quad \{4, 3, 3\}.$$

Ogni oggetto di peso 5 deve stare in un contenitore pieno, e i soli multinsiemi con un 5 sono $\{5, 5\}$, $\{5, 3, 2\}$. C'è un solo oggetto di peso 2, quindi i due oggetti di peso 5 non possono stare entrambi in un contenitore $\{5, 3, 2\}$: condividono il contenitore $\{5, 5\}$. Allora i pesi restanti 4, 4, 4, 3, 3, 2 devono formare due contenitori pieni: $\{4, 4, 2\}$ e $\{4, 3, 3\}$. La soluzione è $\{\{1, 2\}, \{3, 4, 8\}, \{5, 6, 7\}\}$:



Raggiunge il bound, quindi $z(I) = 3$.

4. Il peso totale sarebbe 31, e $\lceil 31/10 \rceil = 4$: almeno 4 contenitori. Una soluzione con 4 contenitori si ottiene dalla precedente spostando l'oggetto 8 in un contenitore a sé, quindi $z(I) = 4$.

Quando $\sum_j w_j = \text{LB} \cdot c$, una soluzione con LB contenitori riempie esattamente ogni contenitore; qui i contenitori $\{5, 5\}$, $\{4, 4, 2\}$, $\{4, 3, 3\}$ danno $z(I) = 3$.

Esercizio 3.6 — Una scelta greedy non ottima (BPP)

Consideriamo l'istanza di bin packing con capacità $c = 10$ e $n = 6$ oggetti, di pesi

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$
w_j	5	4	5	6	8	2

Domande

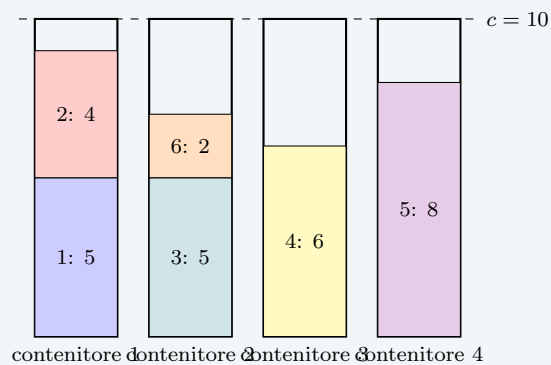
1. Applicare First Fit: prendere gli oggetti nell'ordine $1, 2, \dots, n$ e mettere ciascuno nel primo contenitore aperto in cui entra, aprendo un nuovo contenitore quando non entra in nessuno. Calcolare quanti contenitori usa.
2. Calcolare il bound sul peso $\lceil \sum_j w_j / c \rceil$.
3. Trovare una soluzione che raggiunge il bound. Stabilire che cosa si può concludere sulla soluzione di First Fit.
4. Calcolare il gap assoluto e il gap relativo fra la soluzione di First Fit e il bound duale.

Soluzione

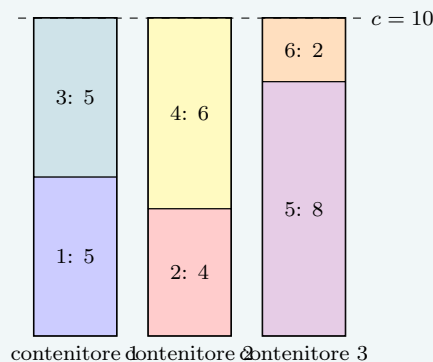
1. I carichi dei contenitori aperti dopo ogni oggetto sono:

oggetto j	w_j	sistemato in	carichi
1	5	nuovo contenitore 1	(5)
2	4	contenitore 1	(9)
3	5	nuovo contenitore 2	(9, 5)
4	6	nuovo contenitore 3	(9, 5, 6)
5	8	nuovo contenitore 4	(9, 5, 6, 8)
6	2	contenitore 2	(9, 7, 6, 8)

First Fit restituisce $\{\{1, 2\}, \{3, 6\}, \{4\}, \{5\}\}$, con 4 contenitori: un bound primale $UB = 4$.



- $\sum_j w_j = 5 + 4 + 5 + 6 + 8 + 2 = 30$, quindi $LB = \lceil 30/10 \rceil = 3$.
- La partizione $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5, 6\}\}$ ha contenitori di peso 10, 10, 10, tutti al più 10: è ammissibile e usa 3 contenitori.



Raggiunge il bound duale, quindi è ottima e $z(I) = 3$; la soluzione di First Fit non è ottima. First Fit mette l'oggetto 2 (peso 4) con l'oggetto 1 (carico 9) e spreca la capacità residua 1; il riempimento ottimo mette l'oggetto 1 con l'oggetto 3 e l'oggetto 2 con l'oggetto 4, due contenitori riempiti esattamente.

- Il gap assoluto è $4 - 3 = 1$ e il gap relativo è $\frac{1}{3} \approx 33.3\%$.

First Fit, una scelta greedy, usa 4 contenitori, mentre il bound sul peso dà 3 e la partizione $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5, 6\}\}$ lo raggiunge: $z(I) = 3$.

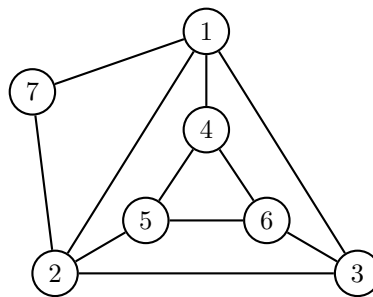
Problemi di colorazione

Esercizio 4.1 — Verificare una colorazione (VCP)

Consideriamo il grafo $G = (V, E)$ con $V = \{1, \dots, 7\}$ e i lati

$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 7\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{2, 7\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}\},$$

disegnato qui sotto:



e le tre soluzioni proposte

$$\mathcal{Q}_a = \{\{1, 6\}, \{2, 4\}, \{3, 5, 7\}\},$$

$$\mathcal{Q}_b = \{\{1, 5, 6\}, \{2, 4\}, \{3, 7\}\},$$

$$\mathcal{Q}_c = \{\{1, 6\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}\}.$$

Domande

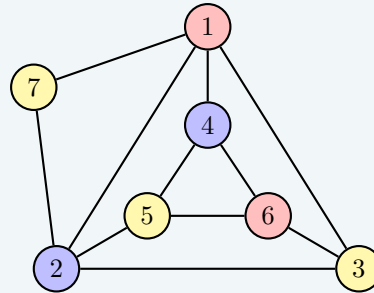
1. Per ogni soluzione proposta, stabilire se è una soluzione ammissibile del VCP.
2. Trovare una clique con 3 vertici. Quale bound duale fornisce?
3. Stabilire se la soluzione ammissibile della Domanda 1 è ottima, e disegnarla.

Soluzione

1.
 - $\mathcal{Q}_a$ è una partizione di V e nessun lato unisce due vertici della stessa classe: ammissibile, con 3 colori.
 - $\mathcal{Q}_b$ è una partizione di V , ma la classe $\{1, 5, 6\}$ contiene il lato $\{5, 6\}$: non è un

insieme stabile. Non ammissibile.

- $\mathcal{Q}_c$ non è una partizione di V : il vertice 7 non ha colore. Non ammissibile.
2. I vertici $\{1, 2, 3\}$ sono a due a due adiacenti, quindi formano una clique; G ha 3 clique con 3 vertici, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 7\}$, $\{4, 5, 6\}$. Per il bound di clique, $\chi(G) \geq \omega(G) \geq 3$.
 3. $\mathcal{Q}_a$ usa 3 colori e raggiunge il bound di clique: è ottima e $\chi(G) = 3$.



Solo $\mathcal{Q}_a$ è ammissibile; usa 3 colori, tanti quanti i vertici di una clique: $\chi(G) = 3$.

Esercizio 4.2 — Intorni, clique e insiemi stabili (VCP)

Consideriamo il grafo $G = (V, E)$ con $V = \{1, \dots, 6\}$ e i lati

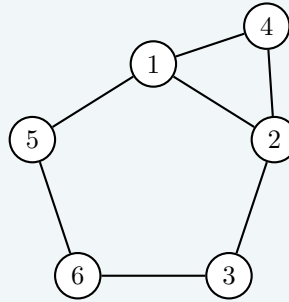
$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 6\}, \{5, 6\}\}.$$

Domande

1. Disegnare il grafo e calcolare l'intorno $N(v)$ e il grado di ogni vertice.
2. Verificare le due ipotesi del VCP.
3. Scrivere i lati del grafo complementare $\overline{G}$.
4. Determinare $\omega(G)$ e $\alpha(G)$, con una clique massima e un insieme stabile massimo, e calcolare il bound di clique e il bound degli insiemi stabili.
5. Trovare una colorazione ottima.

Soluzione

1. Il grafo, e gli intorni e i gradi dei suoi vertici:



v	1	2	3	4	5	6
$N(v)$	$\{2, 4, 5\}$	$\{1, 3, 4\}$	$\{2, 6\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 6\}$	$\{3, 5\}$
$\deg(v)$	3	3	2	2	2	2

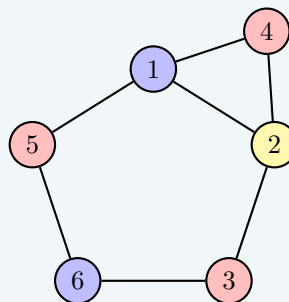
La somma dei gradi è $14 = 2|E|$, poiché ogni lato è contato in entrambi i suoi estremi.

- Ogni vertice ha grado almeno 1, quindi non ci sono vertici isolati. Nessun intorno è contenuto in un altro: per ogni coppia $u \neq v$ la tabella mostra un vertice di $N(u)$ che non è in $N(v)$. Per esempio, $N(4) = \{1, 2\}$ non è contenuto in nessun altro intorno, poiché nessun altro vertice è adiacente sia a 1 sia a 2. Entrambe le ipotesi sono soddisfatte.

- $\overline{G}$ ha come lati le 8 coppie di vertici non adiacenti di G :

$$\overline{E} = \{\{1, 3\}, \{1, 6\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}\}.$$

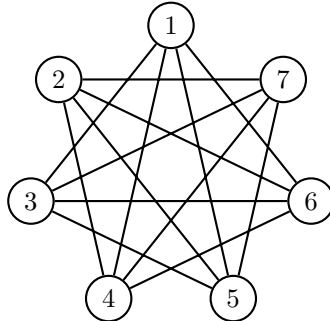
- I vertici $\{1, 2, 4\}$ formano un triangolo, quindi $\omega(G) \geq 3$. Una clique con 4 vertici richiederebbe 4 vertici di grado almeno 3, e solo i vertici 1 e 2 hanno grado 3: quindi $\omega(G) = 3$. L'insieme $\{3, 4, 5\}$ è stabile; un insieme stabile con 4 vertici sarebbe una clique con 4 vertici di $\overline{G}$, e l'enumerazione mostra che non ne esistono: $\alpha(G) = 3$. Il bound di clique dà 3, il bound degli insiemi stabili $\lceil 6/3 \rceil = 2$.
- La colorazione $\{\{3, 4, 5\}, \{1, 6\}, \{2\}\}$ ha classi stabili e usa 3 colori, tanti quanti il bound di clique: è ottima e $\chi(G) = 3$.



$\omega(G) = 3$ con la clique $\{1, 2, 4\}$, $\alpha(G) = 3$ con l'insieme stabile $\{3, 4, 5\}$; il bound di clique è stretto e $\chi(G) = 3$, mentre il bound degli insiemi stabili dà solo 2.

Esercizio 4.3 — Il bound degli insiemi stabili su un grafo complementare (VCP)

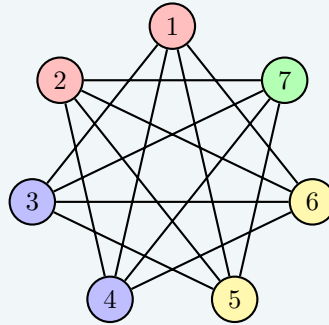
Il grafo $G = (V, E)$ ha i vertici $V = \{1, \dots, 7\}$, e due vertici distinti sono adiacenti se e solo se *non* sono consecutivi sul ciclo $1, 2, \dots, 7, 1$. In altre parole, G è il complementare del ciclo C_7 con 7 vertici:


Domande

1. Determinare il numero di lati di G e il grado di ogni vertice.
2. Calcolare $\alpha(G)$, usando il grafo complementare.
3. Calcolare $\omega(G)$ e il bound di clique.
4. Calcolare il bound degli insiemi stabili e trovare una colorazione ottima.

Soluzione

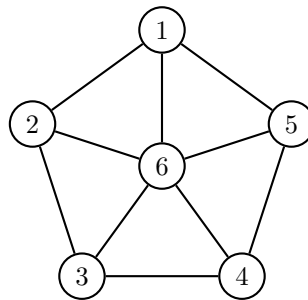
1. C_7 ha 7 lati sulle $\binom{7}{2} = 21$ coppie, quindi G ha $21 - 7 = 14$ lati. Ogni vertice è adiacente a tutti i vertici tranne se stesso e i suoi due vicini sul ciclo: grado $6 - 2 = 4$.
2. Un insieme stabile di G è una clique di $\overline{G} = C_7$. Le clique più grandi di un ciclo con 7 vertici sono i suoi lati, poiché non ha triangoli: $\alpha(G) = 2$, per esempio l'insieme stabile $\{1, 2\}$.
3. Una clique di G è un insieme stabile di C_7 : un insieme di vertici senza due vertici consecutivi sul ciclo. $\{1, 3, 5\}$ è un insieme di questo tipo; con 4 vertici su 7, due di essi sarebbero consecutivi. Quindi $\omega(G) = 3$ e il bound di clique dà $\chi(G) \geq 3$.
4. $\lceil n/\alpha(G) \rceil = \lceil 7/2 \rceil = 4$: ogni classe di colore ha al più 2 vertici, e 7 vertici richiedono almeno 4 classi. La colorazione $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{7\}\}$ usa coppie di vertici consecutivi, che non sono adiacenti in G : è ammissibile, usa 4 colori e raggiunge il bound, quindi $\chi(G) = 4$.



Sul complementare di C_7 il bound di clique dà 3, il bound degli insiemi stabili dà $\lceil 7/2 \rceil = 4$ e una colorazione con 4 colori chiude il gap: $\chi(G) = 4$.

Esercizio 4.4 — Quando nessuno dei due bound è stretto (VCP)

La ruota W_5 è il grafo con i vertici $V = \{1, \dots, 6\}$: i vertici $1, \dots, 5$ formano un ciclo e il vertice 6, il mozzo, è adiacente a tutti.



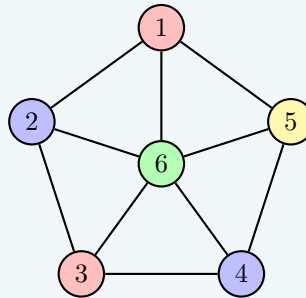
Domande

1. Calcolare $\omega(W_5)$, $\alpha(W_5)$ e i due bound duali del capitolo.
2. Dimostrare che il ciclo $1, 2, 3, 4, 5$ non si può colorare con 2 colori.
3. Dimostrare che $\chi(W_5) = 4$ e disegnare una colorazione ottima.

Soluzione

1. Ogni triangolo usa il mozzo e un lato del ciclo, per esempio $\{1, 2, 6\}$; 4 vertici a due a due adiacenti richiederebbero 3 vertici a due a due adiacenti sul ciclo, che non ha triangoli. Quindi $\omega(W_5) = 3$. Un insieme stabile contiene al più 2 vertici del ciclo con 5 vertici, e il mozzo è adiacente a tutti: $\alpha(W_5) = 2$, per esempio $\{1, 3\}$. Il bound di clique dà 3 e il bound degli insiemi stabili $\lceil 6/2 \rceil = 3$.
2. Con 2 colori i colori devono alternarsi lungo il ciclo: 1 riceve il colore A, 2 il colore B, 3 il colore A, 4 il colore B, 5 il colore A. Allora 5 e 1, che sono adiacenti, hanno lo stesso colore. Un ciclo con un numero dispari di vertici richiede 3 colori.

3. Il ciclo richiede almeno 3 colori, e il mozzo è adiacente a tutti i vertici del ciclo, quindi richiede un colore tutto suo: $\chi(W_5) \geq 4$. La colorazione $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5\}, \{6\}\}$ è ammissibile e usa 4 colori, quindi $\chi(W_5) = 4$.



Entrambi i bound del capitolo danno 3: il gap si chiude con l'argomento sul ciclo dispari.

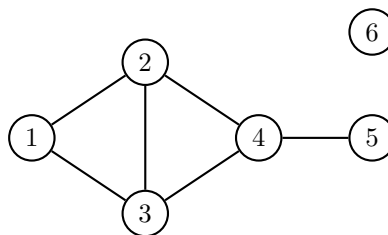
$\omega(W_5) = 3$ e $\lceil 6/\alpha(W_5) \rceil = 3$, ma $\chi(W_5) = 4$: il ciclo dispari richiede 3 colori e il mozzo un quarto. Nessuno dei due bound è stretto.

Esercizio 4.5 — Le ipotesi e la riduzione del grafo (VCP)

Consideriamo il grafo $G = (V, E)$ con $V = \{1, \dots, 6\}$ e i lati

$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\},$$

disegnato qui sotto:

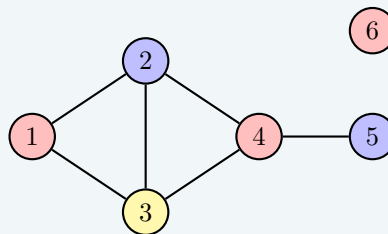


Domande

1. Calcolare gli intorni dei vertici. Stabilire quali ipotesi del VCP sono violate, e da quali vertici.
2. Eliminare i vertici consentiti dalle ipotesi, uno alla volta, e calcolare il numero cromatico del grafo che resta.
3. Estendere una colorazione del grafo ridotto a una colorazione ottima di G .
4. Contare le soluzioni candidate di G , e quelle ammissibili per numero di colori.

Soluzione

1. Gli intorni sono $N(1) = \{2, 3\}$, $N(2) = \{1, 3, 4\}$, $N(3) = \{1, 2, 4\}$, $N(4) = \{2, 3, 5\}$, $N(5) = \{4\}$, $N(6) = \emptyset$.
 - Il vertice 6 è isolato: la prima ipotesi è violata.
 - $N(1) = \{2, 3\} \subseteq N(4) = \{2, 3, 5\}$ e $N(5) = \{4\} \subseteq N(2) = \{1, 3, 4\}$: la seconda ipotesi è violata dalle coppie (1, 4) e (5, 2).
2. Eliminiamo il vertice isolato 6, il vertice 1 (dominato da 4) e il vertice 5 (dominato da 2). Restano i vertici 2, 3, 4, con i lati $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$: un triangolo, il cui numero cromatico è 3. L'eliminazione di un vertice non cambia χ , quindi $\chi(G) = 3$.
3. Coloriamo il triangolo con $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$ e reinseriamo ogni vertice eliminato: 1 prende il colore di 4, 5 il colore di 2, e 6 un colore qualunque, per esempio quello di 4. La colorazione è $\{\{1, 4, 6\}, \{2, 5\}, \{3\}\}$:



4. Le soluzioni candidate sono le partizioni dei 6 vertici: $B(6) = 203$. Quelle ammissibili, per enumerazione, sono:

colori	partizioni ammissibili
3	6
4	18
5	9
6	1
totale	34

Ci sono 6 colorazioni ottime con 3 colori.

Il vertice isolato e i due vertici dominati si possono eliminare: resta il triangolo $\{2, 3, 4\}$, e $\chi(G) = 3$.

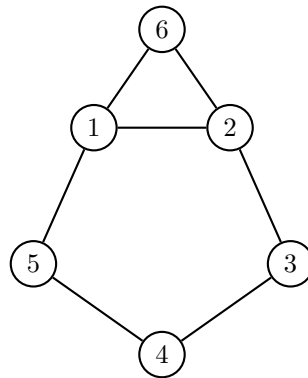
Problemi di clique

Esercizio 5.1 — Clique, insiemi stabili e grafo complementare (MCP)

Consideriamo il grafo $G = (V, E)$ con $V = \{1, \dots, 6\}$ e i lati

$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}.$$

disegnato qui sotto:



e i quattro sottoinsiemi di vertici

$$A = \{1, 2, 6\}, \quad B = \{1, 3\}, \quad C = \{2, 4, 5\}, \quad D = \{3, 5, 6\}.$$

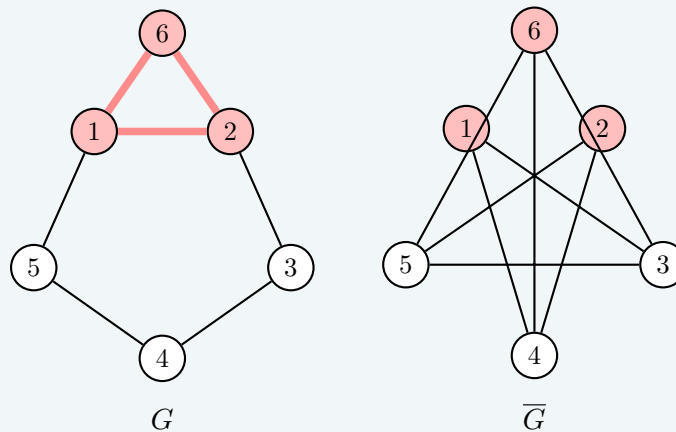
Domande

1. Per ogni sottoinsieme, stabilire se è una clique di G , un insieme stabile di G , o nessuno dei due.
2. Elencare tutte le clique massimali di G (clique alle quali non si può aggiungere alcun vertice).
3. Scrivere i lati del grafo complementare $\overline{G}$ e disegnarlo accanto a G .
4. Determinare $\omega(G)$ e $\alpha(G)$, e verificare che $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$ e $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$.

Soluzione

- A : tutte le coppie sono lati, quindi A è una clique (un triangolo).
 - B : nessuna coppia è un lato, quindi B è un insieme stabile.
 - C : la coppia $\{4, 5\}$ è un lato e la coppia $\{2, 4\}$ no, quindi C non è né una clique né un insieme stabile.
 - D : nessuna coppia è un lato, quindi D è un insieme stabile.
- Le clique massimali sono $\{1, 2, 6\}$ e i lati $\{1, 5\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{4, 5\}$: ogni altro lato sta nel triangolo $\{1, 2, 6\}$, e nessun vertice è adiacente a entrambi gli estremi dei quattro lati elencati.
- $\overline{G}$ ha $\binom{6}{2} - 7 = 8$ lati:

$$\overline{E} = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}\}.$$



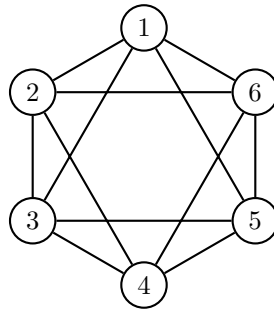
I vertici rossi sono una clique di G e un insieme stabile di $\overline{G}$.

- $\omega(G) = 3$: l'unico triangolo è $\{1, 2, 6\}$, e una clique con 4 vertici conterrebbe 4 triangoli. $\alpha(G) = 3$ con l'unico insieme stabile massimo $D = \{3, 5, 6\}$: un insieme stabile prende al più 2 vertici del ciclo $1, 2, 3, 4, 5$, e con il vertice 6 non può usare 1 o 2. In $\overline{G}$ l'insieme $\{1, 2, 6\}$ è un insieme stabile massimo e D è una clique massima (un triangolo di $\overline{G}$): $\alpha(\overline{G}) = 3 = \omega(G)$ e $\omega(\overline{G}) = 3 = \alpha(G)$.

A è l'unica clique massima, $\omega(G) = 3$; D è l'unico insieme stabile massimo, $\alpha(G) = 3$. In $\overline{G}$ i due ruoli si scambiano.

Esercizio 5.2 — Contare le soluzioni candidate (MCP)

Consideriamo il grafo $G = (V, E)$ con $V = \{1, \dots, 6\}$ in cui ogni vertice è adiacente a tutti gli altri tranne quello opposto sulla circonferenza: le coppie non adiacenti sono $\{1, 4\}$, $\{2, 5\}$ e $\{3, 6\}$.

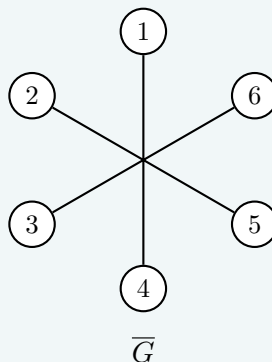


Domande

1. Determinare il numero di lati di G . Disegnare il grafo complementare $\overline{G}$.
2. Determinare il numero di soluzioni candidate del MCP su G .
3. Contare le clique di G con 0, 1, 2, 3 vertici, ragionando sulle tre coppie $\{1, 4\}$, $\{2, 5\}$ e $\{3, 6\}$. Stabilire se esiste una clique con 4 vertici.
4. Determinare $\omega(G)$ e il numero di clique massime.

Soluzione

1. G ha $\binom{6}{2} - 3 = 12$ lati. $\overline{G}$ ha solo i 3 lati $\{1, 4\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 6\}$: tre lati disgiunti.



2. Le soluzioni candidate sono i sottoinsiemi di V : $2^6 = 64$.
3. Un sottoinsieme è una clique se e solo se contiene al più un vertice di ciascuna coppia. Per ogni coppia ci sono 3 scelte (nessun vertice, il primo, il secondo), quindi ci sono $3^3 = 27$ clique:

numero di vertici	0	1	2	3	totale
clique	1	6	12	8	27

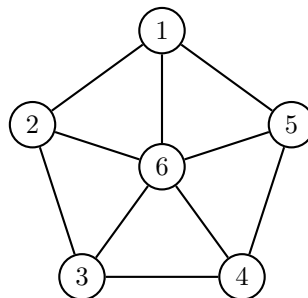
Con 2 vertici: $\binom{3}{2} = 3$ coppie di coppie, per $2 \cdot 2$ scelte, dà 12; con 3 vertici: $2^3 = 8$. Una clique con 4 vertici prenderebbe due vertici della stessa coppia: non ne esistono.

4. $\omega(G) = 3$, e ci sono 8 clique massime, per esempio $\{1, 2, 3\}$ e $\{4, 5, 6\}$. Solo 27 delle 64 soluzioni candidate sono ammissibili.

27 clique su 64 sottoinsiemi; $\omega(G) = 3$ con 8 clique massime, un vertice da ciascuna coppia non adiacente.

Esercizio 5.3 — Una clique a mano e i bound semplici (MCP)

La ruota W_5 è il grafo con i vertici $V = \{1, \dots, 6\}$: i vertici $1, \dots, 5$ formano un ciclo e il vertice 6, il mozzo, è adiacente a tutti.



Domande

1. Costruire a mano una clique: partire da un vertice di grado massimo e aggiungere, ogni volta, il vertice di indice minimo adiacente a tutti i vertici già scelti. Determinare il lower bound che si ottiene.
2. Calcolare il bound sul grado e il bound sui lati.
3. Calcolare il bound sul conteggio dei gradi $k^{\max}$.
4. Trovare una colorazione di W_5 con 4 colori e indicare l'upper bound che fornisce.
5. Determinare $\omega(W_5)$ e stabilire quale bound è stretto.

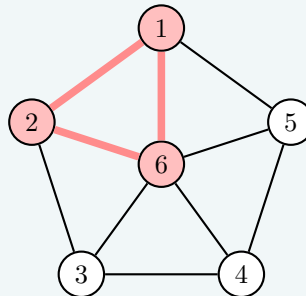
Soluzione

1. Il vertice 6 ha grado 5, il massimo. I vertici adiacenti a 6 sono $1, \dots, 5$: aggiungiamo 1. I vertici adiacenti sia a 6 sia a 1 sono 2 e 5: aggiungiamo 2. Nessun vertice è adiacente a 6, 1 e 2, quindi ci fermiamo con $K = \{1, 2, 6\}$ e $LB = 3$.
2. I gradi sono:

v	1	2	3	4	5	6
$\deg(v)$	3	3	3	3	3	5

Il bound sul grado dà $\Delta + 1 = 6$. Il grafo ha $m = 10$ lati; poiché $5 \cdot 4/2 = 10 \leq 10 < 15 = 6 \cdot 5/2$, il bound sui lati dà 5.

3. Per $k = 4$ servono 4 vertici di grado almeno 3: tutti i 6 vertici vanno bene. Per $k = 5$ servono 5 vertici di grado almeno 4: va bene solo il vertice 6. Quindi $k^{\max} = 4$.
4. Le classi $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5\}, \{6\}\}$ sono insiemi stabili: 1, 3 e 2, 4 non sono consecutivi sul ciclo. La colorazione usa 4 colori, quindi $\omega(W_5) \leq 4$.



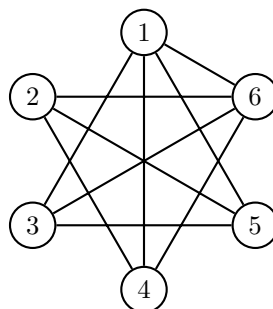
5. Una clique con 4 vertici conterrebbe almeno 3 vertici del ciclo, a due a due adiacenti, e il ciclo con 5 vertici non ha triangoli. Quindi $\omega(W_5) = 3$, raggiunto dalla clique della Domanda 1 (disegnata in rosso qui sopra). Nessuno degli upper bound è stretto: i migliori danno 4, e il gap $(4 - 3)/3$ si chiude solo con l'argomento sul ciclo.

LB = 3 dalla clique $\{1, 2, 6\}$; upper bound 6 (grado), 5 (lati), 4 (conteggio dei gradi) e 4 (colorazione); $\omega(W_5) = 3$.

Esercizio 5.4 — Lavorare sul grafo complementare (MCP)

Consideriamo il grafo $G = (V, E)$ con $V = \{1, \dots, 6\}$ e i 10 lati

$$E = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 6\}\}.$$



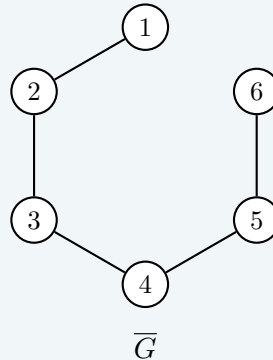
Domande

1. Scrivere i lati di $\overline{G}$, disegnarlo e riconoscere di che grafo si tratta.
2. Calcolare $\alpha(\overline{G})$ ed elencare tutti gli insiemi stabili massimi di $\overline{G}$.
3. Dedurre $\omega(G)$ e le clique massime di G .

4. Calcolare $\alpha(G)$.

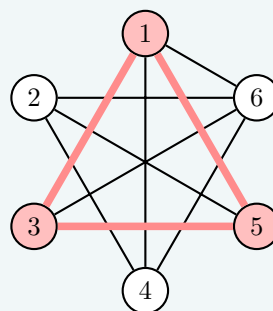
Soluzione

1. $\overline{G}$ ha $\binom{6}{2} - 10 = 5$ lati, $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}$: è il cammino $1, 2, 3, 4, 5, 6$.



Su un grafo denso è più facile lavorare sul complementare.

2. Un insieme stabile del cammino non contiene due vertici consecutivi. Con 4 vertici su 6, due di essi sarebbero consecutivi, quindi $\alpha(\overline{G}) \leq 3$. Gli insiemi stabili con 3 vertici sono $\{1, 3, 5\}, \{1, 3, 6\}, \{1, 4, 6\}, \{2, 4, 6\}$: $\alpha(\overline{G}) = 3$, con 4 insiemi stabili massimi.
3. Per la proposizione del capitolo, le clique di G sono gli insiemi stabili di $\overline{G}$: $\omega(G) = \alpha(\overline{G}) = 3$, e le clique massime di G sono i quattro insiemi trovati sopra. La soluzione ottima non è unica.

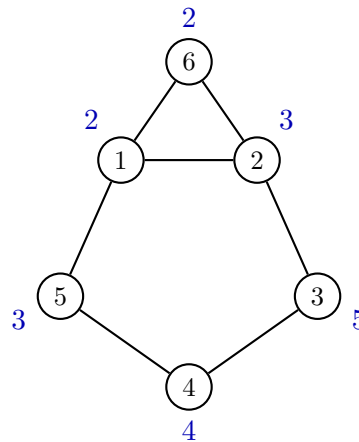


4. $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$: il cammino non ha triangoli e ha lati, quindi $\omega(\overline{G}) = 2$ e $\alpha(G) = 2$. Per esempio, $\{1, 2\}$ è un insieme stabile massimo di G .

$\overline{G}$ è un cammino: $\omega(G) = \alpha(\overline{G}) = 3$ con 4 clique massime, e $\alpha(G) = \omega(\overline{G}) = 2$.

Esercizio 5.5 — Clique massima pesata sui vertici (MCP)

Consideriamo il grafo $G = (V, E)$ della figura, con i pesi dei vertici in blu:



$$w = (2, 3, 5, 4, 3, 2).$$

Domande

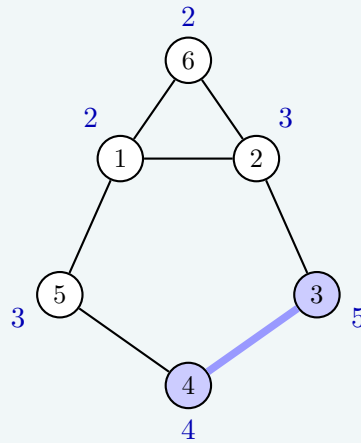
1. Elencare le clique massimali di G con il loro peso totale $w(K)$.
2. Spiegare perché basta guardare le clique massimali. Trovare la clique massima pesata sui vertici.
3. Confrontarla con la soluzione ottima del MCP sullo stesso grafo.

Soluzione

1. Le clique massimali sono il triangolo $\{1, 2, 6\}$ e quattro lati del ciclo:

clique massimale K	$w(K)$
$\{1, 2, 6\}$	$2 + 3 + 2 = 7$
$\{1, 5\}$	$2 + 3 = 5$
$\{2, 3\}$	$3 + 5 = 8$
$\{3, 4\}$	$5 + 4 = 9$
$\{4, 5\}$	$4 + 3 = 7$

2. Tutti i pesi sono positivi, e ogni clique è contenuta in una clique massimale: aggiungere vertici a una clique ne aumenta il peso. La clique massimale più pesante è $\{3, 4\}$, con peso 9: è l'unica soluzione ottima (Gurobi sul modello con i pesi lo conferma).



3. Il MCP sceglie il triangolo $\{1, 2, 6\}$, con 3 vertici ma peso 7. Il problema pesato sui vertici preferisce i due vertici pesanti 3 e 4: non conta il numero di vertici, conta solo il loro peso.

La clique massima pesata sui vertici è $\{3, 4\}$, di peso 9; la clique massima $\{1, 2, 6\}$ pesa 7.

Problemi di routing

Esercizio 6.1 — I giri e la loro lunghezza (TSP)

Consideriamo l'istanza del TSP con 6 città, $\mathcal{V} = \{1, \dots, 6\}$, e le distanze simmetriche

d_{ij}	1	2	3	4	5	6
1	—	4	7	6	3	5
2	4	—	3	5	6	8
3	7	3	—	4	7	6
4	6	5	4	—	3	4
5	3	6	7	3	—	5
6	5	8	6	4	5	—

e le permutazioni

$$\sigma^1 = (1, 2, 3, 4, 5, 6), \quad \sigma^2 = (4, 5, 6, 1, 2, 3), \quad \sigma^3 = (1, 6, 5, 4, 3, 2), \quad \sigma^4 = (1, 5, 4, 3, 2, 6).$$

Domande

1. Calcolare la lunghezza di ogni permutazione, letta come un giro.
2. Stabilire quali permutazioni descrivono lo stesso giro, motivando la risposta.
3. Contare le permutazioni delle 6 città e i giri distinti.
4. I due cicli $(1, 2, 3)$ e $(4, 5, 6)$ visitano ogni città esattamente una volta. Stabilire se formano un giro e confrontare la loro lunghezza totale con la lunghezza di σ^4 .

Soluzione

1. Includendo l'arco di ritorno $d_{\sigma_n \sigma_1}$:

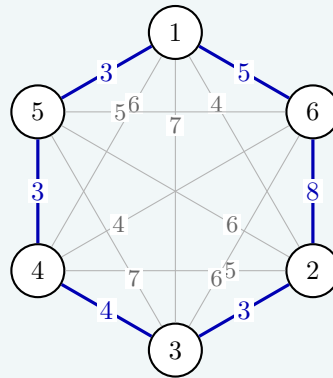
$$L(\sigma^1) = 4 + 3 + 4 + 3 + 5 + 5 = 24$$

$$L(\sigma^2) = 3 + 5 + 5 + 4 + 3 + 4 = 24$$

$$L(\sigma^3) = 5 + 5 + 3 + 4 + 3 + 4 = 24$$

$$L(\sigma^4) = 3 + 3 + 4 + 3 + 8 + 5 = 26.$$

2. σ^2 parte dalla città 4 e visita le città nello stesso ordine ciclico di σ^1 ; σ^3 è σ^1 percorsa all'indietro. Le tre permutazioni usano gli stessi 6 archi e descrivono lo stesso giro, di lunghezza 24. La permutazione σ^4 usa l'arco $\{1, 5\}$, che non è in σ^1 : è un giro diverso.
3. Le permutazioni sono $6! = 720$; ogni giro è descritto da 6 città di partenza per 2 versi, quindi i giri sono $\frac{720}{12} = \frac{(6-1)!}{2} = 60$.
4. No: un giro è un unico ciclo attraverso tutte le città, e i due cicli sono disgiunti. La loro lunghezza totale è $(4 + 3 + 7) + (3 + 5 + 4) = 26$, non minore di $L(\sigma^4) = 26$, ma non è la lunghezza di una soluzione ammissibile.



$\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$ sono lo stesso giro, di lunghezza 24; σ^4 è un giro diverso, di lunghezza 26. Due cicli disgiunti non sono un giro.

Esercizio 6.2 — Enumerazione dei giri (TSP)

Consideriamo l'istanza del TSP con 5 città e le distanze simmetriche

d_{ij}	1	2	3	4	5
1	—	12	3	5	3
2	12	—	9	7	10
3	3	9	—	4	5
4	5	7	4	—	4
5	3	10	5	4	—

Domande

1. Costruire un giro con la nearest neighbour rule dalla città 1 (pareggi risolti con l'indice minimo) e calcolarne la lunghezza.
2. Enumerare tutti i giri, trovarne uno ottimo e stabilire se è unico.
3. Disegnare il giro ottimo sul grafo completo dell'istanza.

Soluzione

1.
 - da 1 le città non visitate più vicine sono 3, 5, a distanza 3: andiamo in 3;
 - da 3 la città non visitata più vicina è 4, a distanza 4;
 - da 4 la città non visitata più vicina è 5, a distanza 4;
 - da 5 la città non visitata più vicina è 2, a distanza 10;
 - ritorniamo da 2 a 1, a distanza 12.

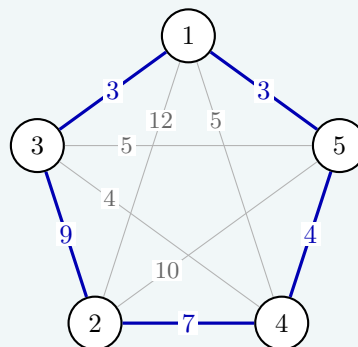
Il giro è $(1, 3, 4, 5, 2)$, di lunghezza $3 + 4 + 4 + 10 + 12 = 33$.

2. I giri sono $(5 - 1)!/2 = 12$, tutti scritti a partire dalla città 1:

giro	L	giro	L	giro	L
$(1, 3, 2, 4, 5)$	26	$(1, 2, 4, 3, 5)$	31	$(1, 2, 3, 4, 5)$	32
$(1, 3, 4, 2, 5)$	27	$(1, 2, 4, 5, 3)$	31	$(1, 2, 5, 4, 3)$	33
$(1, 4, 2, 3, 5)$	29	$(1, 3, 2, 5, 4)$	31	$(1, 2, 3, 5, 4)$	35
$(1, 3, 5, 2, 4)$	30	$(1, 4, 3, 2, 5)$	31	$(1, 2, 5, 3, 4)$	36

Il giro $\tilde{\sigma} = (1, 3, 2, 4, 5)$ è l'unico ottimo, con $z(I) = 26$; il giro nearest neighbour è più lungo di 7.

3. Il giro ottimo sul grafo completo dell'istanza:



Gli archi in grassetto costano $3 + 9 + 7 + 4 + 3 = 26$. Il giro evita gli archi lunghi della città 2, che è lontana da tutte le altre città, e vi entra e ne esce con i suoi due archi più corti, 7 e 9.

Il nearest neighbour dalla città 1 dà 33; l'enumerazione dei 12 giri dà l'unico giro ottimo $(1, 3, 2, 4, 5)$, con $z(I) = 26$.

Esercizio 6.3 — Nearest neighbour da ogni città e un lower bound (TSP)

Consideriamo di nuovo l'istanza del TSP con 5 città e le distanze simmetriche

d_{ij}	1	2	3	4	5
1	—	12	3	5	3
2	12	—	9	7	10
3	3	9	—	4	5
4	5	7	4	—	4
5	3	10	5	4	—

il cui giro ottimo ha lunghezza $z(I) = 26$.

Domande

1. Applicare la nearest neighbour rule da ogni città di partenza (pareggi risolti con l'indice minimo) e indicare la città di partenza che dà il giro migliore.
2. Calcolare il bound duale $\lceil \frac{1}{2} \sum_i (a_i + b_i) \rceil$ dei due archi più corti.
3. Calcolare il gap assoluto e il gap relativo fra il miglior giro nearest neighbour e il bound duale. Stabilire se il solo bound può certificare che questo giro è ottimo.

Soluzione

1. I giri costruiti dalle cinque città di partenza sono:

partenza	giro	lunghezza
1	(1, 3, 4, 5, 2)	$3 + 4 + 4 + 10 + 12 = 33$
2	(2, 4, 3, 1, 5)	$7 + 4 + 3 + 3 + 10 = 27$
3	(3, 1, 5, 4, 2)	$3 + 3 + 4 + 7 + 9 = 26$
4	(4, 3, 1, 5, 2)	$4 + 3 + 3 + 10 + 7 = 27$
5	(5, 1, 3, 4, 2)	$3 + 3 + 4 + 7 + 10 = 27$

Il giro migliore parte dalla città 3: scritto a partire dalla città 1 è (1, 3, 2, 4, 5), di lunghezza 26, ossia il giro ottimo. La città di partenza conta: dalla città 1 la regola lascia gli archi lunghi per la fine.

2. Le due distanze più piccole di ogni città sono:

città i	1	2	3	4	5	somma
a_i	3	7	3	4	3	
b_i	3	9	4	4	4	
$a_i + b_i$	6	16	7	8	7	44

Quindi $LB = 44/2 = 22$.

3. Il gap assoluto è $26 - 22 = 4$ e il gap relativo è $\frac{4}{22} = \frac{2}{11} \approx 18.2\%$. Il solo bound non può certificare l'ottimo: solo l'enumerazione dei 12 giri mostra che nessun giro è più corto di 26.

Partendo dalla città 3 la nearest neighbour rule trova il giro ottimo, di lunghezza 26; i due archi più corti danno $LB = 22$, e il gap 4 resta aperto senza enumerazione.

Esercizio 6.4 — La disuguaglianza triangolare (TSP metrico)

Consideriamo l'istanza del TSP con 4 città e le distanze simmetriche

d_{ij}	1	2	3	4
1	—	4	10	3
2	4	—	5	2
3	10	5	—	6
4	3	2	6	—

Domande

1. Contare le disuguaglianze triangolari $d_{ij} \leq d_{ik} + d_{kj}$ da verificare e individuare quelle violate.
2. Determinare il valore massimo di d_{13} che rende l'istanza metrica, lasciando invariate tutte le altre distanze.
3. Calcolare le lunghezze dei giri per il valore originale di d_{13} e per il valore della Domanda 2. Stabilire se il giro ottimo cambia.

Soluzione

1. Una disuguaglianza per ogni terna ordinata di città distinte: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Quelle violate sono quelle con $d_{13} = d_{31} = 10$ a sinistra:

$$d_{13} = 10 > d_{12} + d_{23} = 4 + 5 = 9, \quad d_{13} = 10 > d_{14} + d_{43} = 3 + 6 = 9,$$

e le stesse due con d_{31} . Tutte le altre 20 disuguaglianze valgono. Andare da 1 a 3 direttamente è più lungo che passare per la città 2 o per la città 4.

2. d_{13} deve soddisfare $d_{13} \leq d_{12} + d_{23} = 9$ e $d_{13} \leq d_{14} + d_{43} = 9$; quando d_{13} è a destra, diminuirlo da 10 non può violare una disuguaglianza che già vale. Il valore massimo è $d_{13} = 9$.
3. I tre giri sono:

giro	$d_{13} = 10$	$d_{13} = 9$
(1, 2, 3, 4)	$4 + 5 + 6 + 3 = 18$	$4 + 5 + 6 + 3 = 18$
(1, 2, 4, 3)	$4 + 2 + 6 + 10 = 22$	$4 + 2 + 6 + 9 = 21$
(1, 3, 2, 4)	$10 + 5 + 2 + 3 = 20$	$9 + 5 + 2 + 3 = 19$

In entrambi i casi il giro ottimo è (1, 2, 3, 4), di lunghezza 18: non usa l'arco $\{1, 3\}$, quindi non cambia. I due giri che usano l'arco $\{1, 3\}$ si accorciano di 1.

L'istanza non è metrica a causa di $d_{13} = 10$; con $d_{13} \leq 9$ diventa metrica. Il giro ottimo $(1, 2, 3, 4)$, di lunghezza 18, non cambia.

Esercizio 6.5 — Distanze asimmetriche (ATSP)

Consideriamo l'istanza dell'ATSP con 4 città e le distanze asimmetriche (d_{ij} è la distanza dalla città i alla città j)

d_{ij}	1	2	3	4
1	—	3	8	5
2	6	—	2	9
3	4	7	—	3
4	2	6	5	—

Domande

1. Contare i giri distinti dell'istanza e spiegare perché sono più di quelli di un'istanza simmetrica con 4 città.
2. Calcolare la lunghezza di ogni giro, accoppiando ogni giro con lo stesso giro percorso all'indietro.
3. Trovare il giro ottimo e disegnarlo.

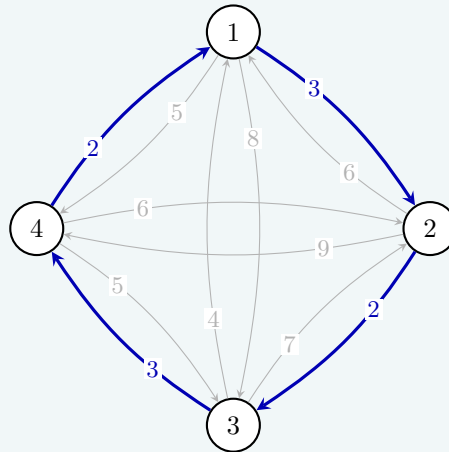
Soluzione

1. Ogni giro può partire dalla città 1, e le altre 3 città si possono ordinare in $3! = 6$ modi: $(4 - 1)! = 6$ giri. Nel caso simmetrico un giro e il suo inverso hanno la stessa lunghezza e sono un'unica soluzione, $(4 - 1)!/2 = 3$; qui il verso conta.
2. Ogni giro, scritto a partire dalla città 1, è accoppiato con il suo inverso:

giro	lunghezza	inverso	lunghezza
$(1, 2, 3, 4)$	$3 + 2 + 3 + 2 = 10$	$(1, 4, 3, 2)$	23
$(1, 2, 4, 3)$	$3 + 9 + 5 + 4 = 21$	$(1, 3, 4, 2)$	23
$(1, 3, 2, 4)$	$8 + 7 + 9 + 2 = 26$	$(1, 4, 2, 3)$	17

Un giro e il suo inverso usano le stesse coppie di città, ma in versi opposti, e le loro lunghezze sono diverse.

3. Il giro ottimo è $\tilde{\sigma} = (1, 2, 3, 4)$, con $z(I) = 10$; il suo inverso ha lunghezza 23.



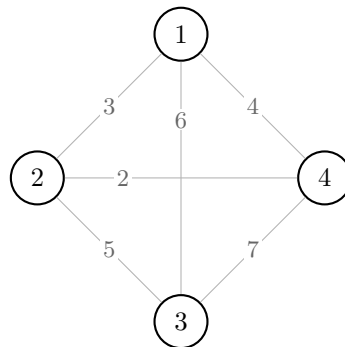
L'istanza dell'ATSP ha $(4 - 1)! = 6$ giri; quello ottimo è $(1, 2, 3, 4)$, con $z(I) = 10$, mentre lo stesso ciclo percorso all'indietro è molto più lungo.

Esercizio 6.6 — Insieme base, soluzioni ammissibili e obiettivo (TSP)

Consideriamo l'istanza del TSP con 4 città, $\mathcal{V} = \{1, 2, 3, 4\}$, e le distanze simmetriche

$$d_{12} = 3, \quad d_{13} = 6, \quad d_{14} = 4, \quad d_{23} = 5, \quad d_{24} = 2, \quad d_{34} = 7.$$

L'istanza è disegnata come un grafo completo, con la distanza su ogni arco:



Domande

1. Il [Capitolo 1 «Problemi di ottimizzazione combinatoria»](#) dà la definizione di problema di ottimizzazione combinatoria. Scrivere l'istanza in questa forma: prendere come insieme base $\mathcal{U}$ l'insieme degli archi, e descrivere le soluzioni ammissibili $\mathcal{F}$ e la funzione obiettivo f . Contare i sottoinsiemi di $\mathcal{U}$.
2. Contare i sottoinsiemi di $\mathcal{U}$ con esattamente 4 archi e quanti di essi sono giri. Spiegare perché gli altri non sono ammissibili.
3. Calcolare f per ogni soluzione ammissibile e trovare la soluzione ottima e $z(I)$.
4. Confrontare il numero di soluzioni ammissibili con la formula $(n - 1)!/2$ del capitolo.

Soluzione

1. L'insieme base è l'insieme dei 6 archi del grafo completo,

$$\mathcal{U} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}.$$

Un sottoinsieme $S \subseteq \mathcal{U}$ è ammissibile, $S \in \mathcal{F}$, quando i suoi archi formano un unico ciclo attraverso tutte le città, ossia un giro. La funzione obiettivo è additiva, con le distanze come pesi:

$$f(S) = \sum_{\{i,j\} \in S} d_{ij}.$$

L'insieme base ha $2^6 = 64$ sottoinsiemi.

2. Un giro di 4 città usa esattamente 4 archi, e ci sono $\binom{6}{4} = 15$ sottoinsiemi con 4 archi. Ognuno di essi lascia fuori 2 archi.

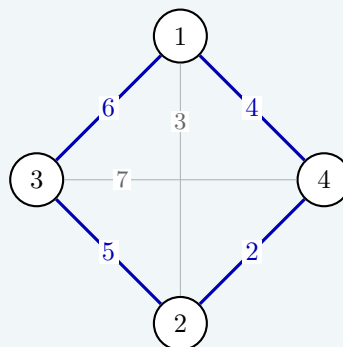
- Se i 2 archi mancanti non hanno città in comune, ogni città conserva 2 archi: i 4 archi formano un ciclo attraverso tutte le città. Ci sono 3 coppie di questo tipo, $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$, $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$ e $\{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$: 3 giri.
- Se i 2 archi mancanti si incontrano in una città v , la città v conserva solo 1 arco e le altre tre città formano un triangolo: non è un giro. Ci sono $4 \cdot 3 = 12$ sottoinsiemi di questo tipo (4 scelte di v e $\binom{3}{2} = 3$ coppie di archi in v).

Quindi solo 3 dei 64 sottoinsiemi di $\mathcal{U}$ sono ammissibili.

3. I tre giri, scritti come sequenze a partire dalla città 1 e come insiemi di archi, sono:

giro σ	archi S	$f(S) = L(\sigma)$
(1, 2, 3, 4)	$\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}$	$3 + 4 + 5 + 7 = 19$
(1, 2, 4, 3)	$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$	$3 + 6 + 2 + 7 = 18$
(1, 3, 2, 4)	$\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}$	$6 + 4 + 5 + 2 = \mathbf{17}$

La soluzione ottima è il giro $\tilde{\sigma} = (1, 3, 2, 4)$, con $z(I) = 17$:



Un modo rapido per vederlo: le 6 distanze sommano a 27, e un giro lascia fuori due archi senza città in comune. Il giro migliore lascia fuori la coppia di questo tipo più costosa, $\{1, 2\}$ e $\{3, 4\}$, di totale $3 + 7 = 10$, e $27 - 10 = 17$.

4. La formula dà $(4 - 1)!/2 = 3$ giri, lo stesso numero trovato nella Domanda 2. I candidati della definizione, i 64 sottoinsiemi di archi, sono molti di più delle soluzioni ammissibili.

Vista come problema di ottimizzazione combinatoria sull'insieme base degli archi, l'istanza ha $2^6 = 64$ sottoinsiemi candidati e solo 3 soluzioni ammissibili, i giri. Il giro ottimo è $(1, 3, 2, 4)$, con $z(I) = 17$.

Esercizio 6.7 — Bound primale, bound duale e gap (TSP)

Consideriamo l'istanza del TSP con 5 città e le distanze simmetriche

d_{ij}	1	2	3	4	5
1	—	2	2	9	9
2	2	—	4	5	9
3	2	4	—	5	4
4	9	5	5	—	8
5	9	9	4	8	—

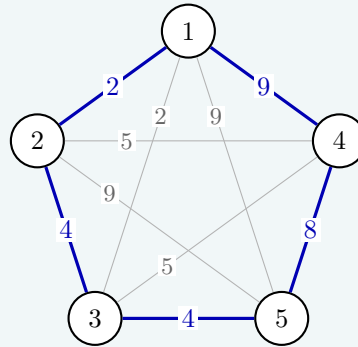
Domande

- Costruire un giro con la nearest neighbour rule dalla città 1 (pareggi risolti con l'indice minimo), calcolarne la lunghezza e stabilire se è un bound primale o duale.
- Calcolare il bound duale $\lceil \frac{1}{2} \sum_i (a_i + b_i) \rceil$, dove $a_i \leq b_i$ sono le due distanze più piccole dalla città i .
- Enumerare i $(5 - 1)!/2$ giri e trovare quello ottimo.
- Calcolare il gap assoluto e il gap relativo del giro nearest neighbour, rispetto al bound duale e rispetto a $z(I)$. Spiegare perché qui la scelta greedy della città più vicina non è ottima.

Soluzione

- La nearest neighbour rule procede come segue:
 - da 1 le città non visitate più vicine sono 2, 3, a distanza 2: andiamo in 2 (indice minimo);
 - da 2 la città non visitata più vicina è 3, a distanza 4;
 - da 3 la città non visitata più vicina è 5, a distanza 4;
 - da 5 la città non visitata più vicina è 4, a distanza 8;
 - ritorniamo da 4 a 1, a distanza $d_{41} = 9$.

Il giro è $\bar{\sigma} = (1, 2, 3, 5, 4)$, di lunghezza $L(\bar{\sigma}) = 2 + 4 + 4 + 8 + 9 = 27$. È la lunghezza di una soluzione ammissibile di un problema di minimizzazione, quindi un bound primale: $UB = 27$.



2. Le due distanze più piccole di ogni città sono:

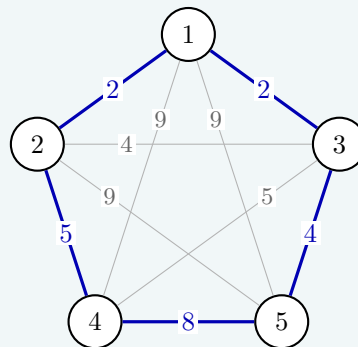
città i	1	2	3	4	5	somma
a_i	2	2	2	5	4	
b_i	2	4	4	5	8	
$a_i + b_i$	4	6	6	10	12	38

Quindi $LB = \frac{38}{2} = 19$ (la somma è pari, non serve arrotondare).

3. I 12 giri, tutti a partire dalla città 1, sono:

giro	L	giro	L	giro	L
(1, 2, 4, 5, 3)	21	(1, 2, 3, 4, 5)	28	(1, 3, 4, 2, 5)	30
(1, 2, 4, 3, 5)	25	(1, 3, 2, 4, 5)	28	(1, 4, 2, 3, 5)	31
(1, 2, 5, 4, 3)	26	(1, 2, 5, 3, 4)	29	(1, 3, 2, 5, 4)	32
(1, 2, 3, 5, 4)	27	(1, 3, 5, 2, 4)	29	(1, 4, 3, 2, 5)	36

Il giro ottimo è $\bar{\sigma} = (1, 2, 4, 5, 3)$, l'unico di lunghezza $z(I) = 21$:



4. Rispetto al bound duale il gap assoluto è $27 - 19 = 8$ e il gap relativo è $\frac{8}{19} \approx 42.1\%$. Rispetto all'ottimo il gap assoluto è $27 - 21 = 6$ e il gap relativo è $\frac{6}{21} = \frac{2}{7} \approx 28.6\%$. La regola prende sempre l'arco disponibile più corto e lascia al caso gli ultimi archi: gli archi di chiusura $\{5, 4\}$ e $\{4, 1\}$ costano 8 e 9.

Il nearest neighbour dà $UB = 27$, i due archi più corti danno $LB = 19$, e l'enumerazione dei 12 giri dà $z(I) = 21$: $19 \leq z(I) = 21 \leq 27$.

Problemi di scheduling

Esercizio 7.1 — Carichi, makespan e diagramma di Gantt ($P||C_{\max}$)

Consideriamo l'istanza di $P||C_{\max}$ con $m = 3$ macchine e $n = 7$ lavori, con tempi di processamento

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$	$j = 7$
t_j	4	2	5	3	6	2	3

e i tre assegnamenti

$$\text{mach}^1 = (1, 2, 3, 1, 2, 3, 1), \quad \text{mach}^2 = (3, 1, 2, 3, 1, 2, 3), \quad \text{mach}^3 = (1, 3, 1, 2, 2, 3, 3).$$

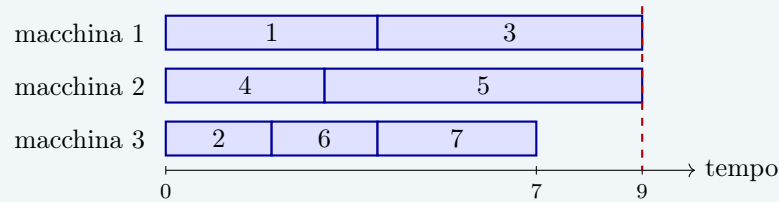
Domande

1. Per ogni assegnamento, scrivere gli insiemi J_1, J_2, J_3 , i carichi e il makespan.
2. Stabilire quali assegnamenti descrivono lo stesso schedule.
3. Disegnare il diagramma di Gantt dell'assegnamento con il makespan minimo.
4. Calcolare il lower bound $\max\{\max_j t_j, \lceil \sum_j t_j / m \rceil\}$ e stabilire se quello schedule è ottimo.

Soluzione

1.
 - mach^1 : $J_1 = \{1, 4, 7\}$, $J_2 = \{2, 5\}$, $J_3 = \{3, 6\}$, carichi (10, 8, 7), makespan $C_{\max} = 10$;
 - mach^2 : $J_1 = \{2, 5\}$, $J_2 = \{3, 6\}$, $J_3 = \{1, 4, 7\}$, carichi (8, 7, 10), makespan $C_{\max} = 10$;
 - mach^3 : $J_1 = \{1, 3\}$, $J_2 = \{4, 5\}$, $J_3 = \{2, 6, 7\}$, carichi (9, 9, 7), makespan $C_{\max} = 9$;
2. mach^1 e mach^2 danno gli stessi tre insiemi di lavori, con i nomi delle macchine cambiati ($1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2$): sono lo stesso schedule. mach^3 dà insiemi diversi.

3. Il makespan minimo, 9, è quello di mach³:



4. $\sum_j t_j = 25$ e $\max_j t_j = 6$, quindi $LB = \max\{6, \lceil 25/3 \rceil\} = 9$. Lo schedule di mach³ lo raggiunge: è ottimo, $z(I) = 9$.

mach¹ e mach² sono lo stesso schedule; lo schedule di mach³ ha makespan 9, pari al lower bound, ed è ottimo.

Esercizio 7.2 — Contare gli schedule ($P||C_{\max}$)

Consideriamo un'istanza di $P||C_{\max}$ con $n = 5$ lavori. Contiamo gli assegnamenti e gli schedule distinti per $m = 2$ e per $m = 3$ macchine.

Domande

1. Contare gli assegnamenti mach con $m = 2$ e con $m = 3$.
2. Calcolare il numero di Stirling $S(5, 2)$, contando le partizioni dei lavori in due insiemi non vuoti.
3. Calcolare $S(5, 3)$, raggruppando le partizioni in tre insiemi non vuoti secondo le cardinalità degli insiemi.
4. Contare gli schedule distinti con $m = 2$ e con $m = 3$, e spiegare perché gli schedule sono meno degli assegnamenti.

Soluzione

1. Ogni lavoro sceglie una delle m macchine: $2^5 = 32$ assegnamenti con $m = 2$, $3^5 = 243$ con $m = 3$.
2. Una partizione in due insiemi è determinata dall'insieme che contiene il lavoro 1 insieme ad alcuni degli altri 4 lavori, ma non a tutti: $2^4 - 1 = 15$ scelte. Quindi $S(5, 2) = 15$.
3. Le cardinalità di tre insiemi non vuoti con 5 lavori sono $(3, 1, 1)$ oppure $(2, 2, 1)$.
 - Cardinalità $(3, 1, 1)$: scegliamo l'insieme di 3 lavori, in $\binom{5}{3} = 10$ modi.
 - Cardinalità $(2, 2, 1)$: scegliamo il lavoro da solo, in 5 modi, e dividiamo gli altri 4 in due coppie, in $\binom{4}{2}/2 = 3$ modi: 15.

Quindi $S(5, 3) = 10 + 15 = 25$.

4. Con $m = 2$: $S(5, 1) + S(5, 2) = 1 + 15 = 16$ schedule. Con $m = 3$: $S(5, 1) + S(5, 2) + S(5, 3) = 1 + 15 + 25 = 41$ schedule. Le macchine sono identiche: un assegnamento e quelli ottenuti rinominando le macchine sono lo stesso schedule. Con $m = 2$ ogni schedule con due macchine non vuote è dato da 2 assegnamenti: $\frac{32-2}{2} = 15$, più lo schedule con tutti i lavori insieme.

Con 5 lavori ci sono 32 e 243 assegnamenti su 2 e 3 macchine, ma solo 16 e 41 schedule.

Esercizio 7.3 — Un primo schedule, un lower bound e l'ottimo ($P||C_{\max}$)

Consideriamo l'istanza di $P||C_{\max}$ con $m = 3$ macchine e $n = 7$ lavori, con tempi di processamento

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$	$j = 7$
t_j	3	5	2	6	4	4	3

Domande

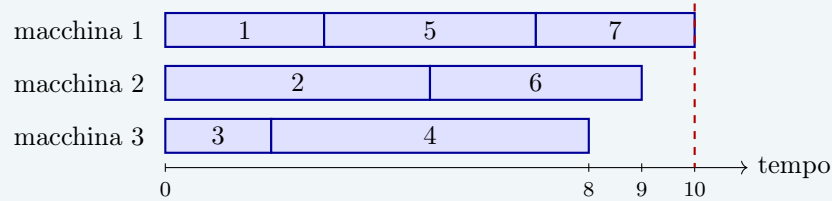
- Costruire uno schedule prendendo i lavori nell'ordine $1, 2, \dots, n$ e assegnando ciascuno alla macchina con il carico minimo (pareggi risolti con l'indice minimo). Disegnarne il diagramma di Gantt.
- Calcolare il lower bound del capitolo.
- Trovare uno schedule ottimo e stabilire se è unico.

Soluzione

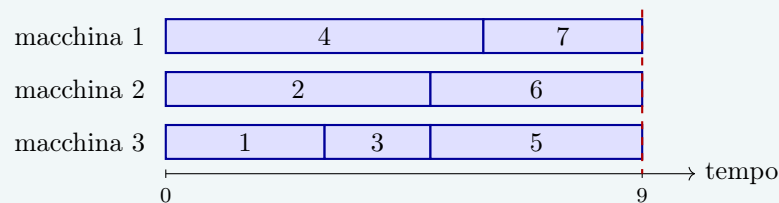
- I carichi dopo ogni assegnamento sono:

lavoro j (t_j)	macchina scelta	carichi (L_1, L_2, L_3)
1 (3)	1	(3, 0, 0)
2 (5)	2	(3, 5, 0)
3 (2)	3	(3, 5, 2)
4 (6)	3	(3, 5, 8)
5 (4)	1	(7, 5, 8)
6 (4)	2	(7, 9, 8)
7 (3)	1	(10, 9, 8)

Otteniamo $J_1 = \{1, 5, 7\}$, $J_2 = \{2, 6\}$, $J_3 = \{3, 4\}$, con makespan 10:



2. $LB = \max\{6, \lceil 27/3 \rceil\} = 9$, quindi $9 \leq z(I) \leq 10$.
3. Un makespan pari a 9 richiede tre carichi pari esattamente a 9, poiché i carichi sommano a $27 = 3 \cdot 9$. Il lavoro 4 (6) ha bisogno di un compagno di durata 3, il lavoro 2 (5) di uno di durata 4, e i lavori rimanenti riempiono la terza macchina. Lo schedule $J_1 = \{4, 7\}$, $J_2 = \{2, 6\}$, $J_3 = \{1, 3, 5\}$ ha carichi (9, 9, 9):



Raggiunge il bound, quindi $z(I) = 9$. Non è unico: l'enumerazione degli schedule ne dà 4 ottimi; per esempio, i lavori 1 e 7, entrambi di durata 3, si possono scambiare.

Assegnare i lavori nell'ordine dei dati dà makespan 10; lo schedule $J_1 = \{4, 7\}$, $J_2 = \{2, 6\}$, $J_3 = \{1, 3, 5\}$ raggiunge il lower bound, e $z(I) = 9$.

Esercizio 7.4 — Quando il lower bound non è raggiunto ($P||C_{\max}$)

Consideriamo l'istanza di $P||C_{\max}$ con $m = 2$ macchine e $n = 4$ lavori, con tempi di processamento

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
t_j	8	5	4	3

Domande

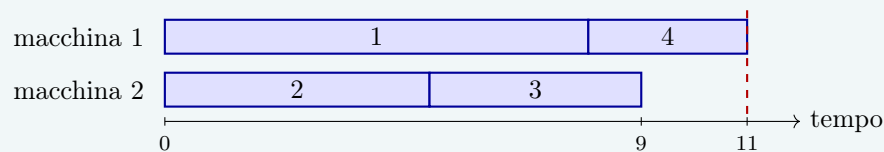
1. Calcolare il lower bound del capitolo.
2. Dimostrare che nessuno schedule ha makespan 10.
3. Trovare uno schedule ottimo, enumerando gli schedule distinti.

Soluzione

1. $LB = \max\{8, \lceil 20/2 \rceil\} = 10$.
2. I due carichi sommano a 20: un makespan pari a 10 richiede entrambi i carichi pari a 10, cioè un insieme di lavori di durata totale esattamente 10. I totali dei sottoinsiemi di lavori sono 0, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 20, e 10 non è fra questi. Quindi $z(I) \geq 11$.
3. Con $m = 2$ ci sono $S(4, 1) + S(4, 2) = 1 + 7 = 8$ schedule:

J_1	J_2	carichi	$C_{\max}$
$\{1, 4\}$	$\{2, 3\}$	(11, 9)	11
$\{1\}$	$\{2, 3, 4\}$	(8, 12)	12
$\{1, 3\}$	$\{2, 4\}$	(12, 8)	12
$\{1, 2\}$	$\{3, 4\}$	(13, 7)	13
$\{1, 3, 4\}$	$\{2\}$	(15, 5)	15
$\{1, 2, 4\}$	$\{3\}$	(16, 4)	16
$\{1, 2, 3\}$	$\{4\}$	(17, 3)	17
$\{1, 2, 3, 4\}$	$\emptyset$	(20, 0)	20

Lo schedule ottimo è unico, $J_1 = \{1, 4\}$, $J_2 = \{2, 3\}$, con $z(I) = 11$:



Il lower bound dà 10, ma nessun insieme di lavori ha durata totale 10: il makespan ottimo è $z(I) = 11$, e il bound non è raggiunto.

 Esercizio 7.5 — Makespan e bin packing ($P||C_{\max}$)

Consideriamo l'istanza di $P||C_{\max}$ con $m = 3$ macchine e $n = 5$ lavori, con tempi di processamento

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$
t_j	7	6	5	5	4

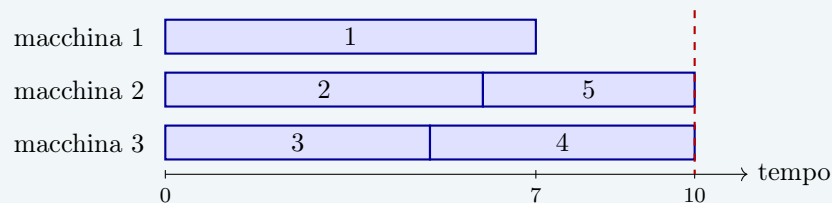
Usiamo la relazione con il problema del bin packing: esiste uno schedule con makespan al più T se e solo se i lavori, visti come oggetti di peso t_j , entrano in m contenitori di capacità T .

Domande

1. Calcolare il lower bound LB del capitolo.
2. Stabilire se i lavori possono essere inseriti in 3 contenitori di capacità $T = \text{LB}$.
3. Trovare il valore minimo di T per cui i lavori entrano in 3 contenitori, e lo schedule corrispondente.
4. Stabilire se lo schedule ottimo è unico.

Soluzione

1. $\text{LB} = \max\{7, \lceil 27/3 \rceil\} = \max\{7, 9\} = 9$.
2. Tre contenitori di capacità 9 contengono $27 = 27$, il peso totale: ogni contenitore deve essere riempito esattamente. L'oggetto di peso 7 richiede oggetti di peso totale 2, e ogni altro oggetto pesa almeno 4. Quindi i lavori non entrano, e $z(I) \geq 10$.
3. Con $T = 10$ il riempimento $\{\{1\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}\}$ ha contenitori di peso 7, 10, $10 \leq 10$. Lo schedule $J_1 = \{1\}$, $J_2 = \{2, 5\}$, $J_3 = \{3, 4\}$ ha makespan 10:



Quindi $z(I) = 10$.

4. Sì: l'enumerazione dei 41 schedule con al più 3 macchine mostra che è l'unico schedule con makespan 10. Il lavoro 1 deve stare da solo, perché con un qualunque altro lavoro la sua macchina supererebbe 10, e le coppie $\{2, 5\}$ e $\{3, 4\}$ sono l'unico modo di dividere gli altri lavori entro 10.

I lavori non entrano in 3 contenitori di capacità 9 ed entrano in 3 contenitori di capacità 10: $z(I) = 10$, uno in più del lower bound.

Problemi di lot sizing

Esercizio 8.1 — Ammissibilità e costo di un piano (CLS)

Consideriamo l'istanza del lot sizing capacitato con $m = 4$ periodi e i seguenti dati:

periodo t	1	2	3	4
domanda d_t	3	2	4	3
capacità cap_t	5	5	5	5
costo di setup sc_t	30	40	30	40
costo di produzione vc_t	2	2	2	2
costo di mantenimento hc_t	4	4	4	4

e i quattro piani di produzione

$$\mathbf{x}^1 = (5, 0, 4, 3), \quad \mathbf{x}^2 = (3, 6, 0, 3), \quad \mathbf{x}^3 = (2, 3, 4, 3), \quad \mathbf{x}^4 = (5, 0, 5, 2).$$

Domande

1. Per ogni piano, calcolare le scorte $s_t(\mathbf{x})$ e stabilire se il piano è ammissibile.
2. Calcolare il costo dei piani ammissibili, suddiviso in costi di setup, di produzione e di mantenimento a scorta.
3. Disegnare il piano ammissibile più economico.

Soluzione

1. La scorta è $s_t = s_{t-1} + x_t - d_t$, a partire da $s_0 = 0$:

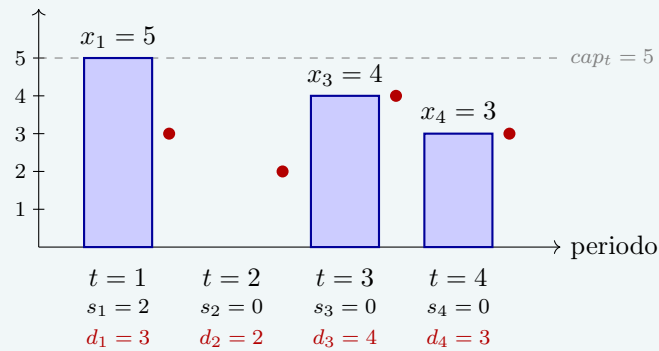
- $\mathbf{x}^1$: scorte $(2, 0, 0, 0)$, ammissibile;
- $\mathbf{x}^2$: scorte $(0, 4, 0, 0)$, non ammissibile: $x_2 = 6 > cap_2 = 5$;
- $\mathbf{x}^3$: scorte $(-1, 0, 0, 0)$, non ammissibile: $s_1 = -1 < 0$, la domanda del periodo 1 non è coperta (la produzione non può servire un periodo precedente);
- $\mathbf{x}^4$: scorte $(2, 0, 1, 0)$, ammissibile;

2. Si paga un setup in ogni periodo con $x_t > 0$, il costo di produzione su ogni unità, il costo di mantenimento sulla scorta alla fine di ogni periodo:

$$c(\mathbf{x}^1) = (30 + 30 + 40) + 2 \cdot 12 + 4 \cdot 2 = 100 + 24 + 8 = 132$$

$$c(\mathbf{x}^4) = (30 + 30 + 40) + 2 \cdot 12 + (4 \cdot 2 + 4 \cdot 1) = 100 + 24 + 12 = 136.$$

3. Il piano più economico è $\mathbf{x}^1$, di costo 132:



Solo $\mathbf{x}^1$ e $\mathbf{x}^4$ sono ammissibili, con costi 132 e 136; $\mathbf{x}^2$ supera una capacità e $\mathbf{x}^3$ produce troppo tardi.

Esercizio 8.2 — Contare le scelte di setup (CLS)

Consideriamo di nuovo l'istanza del lot sizing capacitato

periodo t	1	2	3	4
domanda d_t	3	2	4	3
capacità cap_t	5	5	5	5
costo di setup sc_t	30	40	30	40
costo di produzione vc_t	2	2	2	2
costo di mantenimento hc_t	4	4	4	4

Domande

1. Contare le possibili scelte dei periodi con un setup.
2. Calcolare le domande cumulate $D_t = d_1 + \dots + d_t$. Determinare la condizione che i periodi con un setup devono soddisfare perché esista un piano ammissibile.
3. Elencare le scelte di setup ammissibili.
4. Stabilire se il numero di piani ammissibili è uguale al numero di scelte di setup ammissibili.

Soluzione

1. Una scelta di setup è un sottoinsieme dei 4 periodi: $2^4 = 16$ scelte.
2. $D = (3, 5, 9, 12)$. La produzione dei periodi $1, \dots, t$ deve coprire D_t , e producono solo i periodi con un setup: le capacità dei periodi con un setup fra $1, \dots, t$ devono sommare almeno a D_t , per ogni t . In particolare il periodo 1 richiede un setup, poiché $d_1 > 0$; con capacità 5 in ogni periodo, i periodi $1, \dots, t$ richiedono almeno $\lceil D_t/5 \rceil$ setup: 1, 1, 2, 3.
3. Le scelte ammissibili, con le capacità cumulate dei loro periodi di setup, sono:

setup	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$
domanda cumulata	3	5	9	12
$\{1, 2, 3\}$	5	10	15	15
$\{1, 2, 4\}$	5	10	10	15
$\{1, 3, 4\}$	5	5	10	15
$\{1, 2, 3, 4\}$	5	10	15	20

Sono 4 su 16.

4. No: a una scelta di setup possono corrispondere più piani, poiché le quantità si possono distribuire in molti modi. L'enumerazione dei piani interi dà 50 piani ammissibili per le 4 scelte di setup ammissibili.

Delle 16 scelte di setup, 4 sono ammissibili: contengono tutte il periodo 1 e almeno 3 periodi in totale. A esse corrispondono 50 piani ammissibili.

Esercizio 8.3 — Il piano migliore per enumerazione dei setup (CLS)

Consideriamo di nuovo l'istanza del lot sizing capacitato

periodo t	1	2	3	4
domanda d_t	3	2	4	3
capacità cap_t	5	5	5	5
costo di setup sc_t	30	40	30	40
costo di produzione vc_t	2	2	2	2
costo di mantenimento hc_t	4	4	4	4

le cui scelte di setup ammissibili sono quelle che contengono il periodo 1 e le cui capacità coprono le domande cumulate.

Domande

1. Spiegare perché, fissati i periodi con un setup, conviene produrre ogni unità il più tardi possibile.

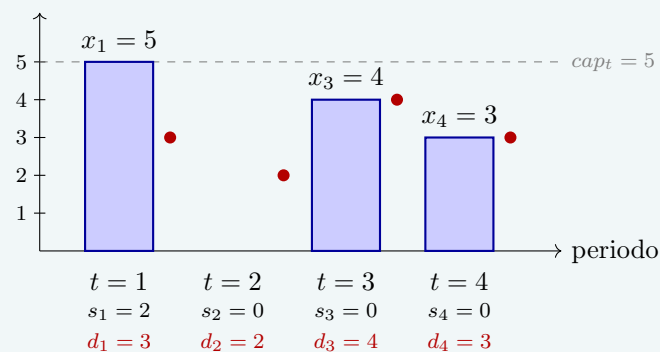
2. Per ogni scelta di setup ammissibile, calcolare il piano migliore e il suo costo.
3. Determinare il piano ottimo e disegnarlo.

Soluzione

1. Il costo di produzione è lo stesso in ogni periodo, quindi non dipende da quando un'unità viene prodotta. Un'unità prodotta prima resta più a lungo in scorta e paga più costo di mantenimento. Quindi ogni domanda si produce nell'ultimo periodo che la precede con un setup e capacità libera, a partire dall'ultimo periodo.
2. Per ogni scelta ammissibile dei setup, il piano costruito in questo modo è:

setup	piano	setup	produzione	mantenimento	totale
$\{1, 2, 3\}$	$(3, 4, 5, 0)$	100	24	20	144
$\{1, 2, 4\}$	$(4, 5, 0, 3)$	110	24	20	154
$\{1, 3, 4\}$	$(5, 0, 4, 3)$	100	24	8	132
$\{1, 2, 3, 4\}$	$(3, 2, 4, 3)$	140	24	0	164

3. Il piano ottimo è $\tilde{x} = (5, 0, 4, 3)$, con setup nei periodi 1, 3, 4 e $z(I) = 132$; è l'unico piano ottimo.



I due setup più economici, $sc_1 = sc_3 = 30$, non bastano: con capacità 5 due setup producono al più $10 < 12$ unità, e il terzo setup va al periodo 4.

Enumerando le scelte di setup ammissibili, e producendo il più tardi possibile per ciascuna di esse, si ottiene il piano ottimo $(5, 0, 4, 3)$ con $z(I) = 132$.

Esercizio 8.4 — L'effetto della capacità (CLS)

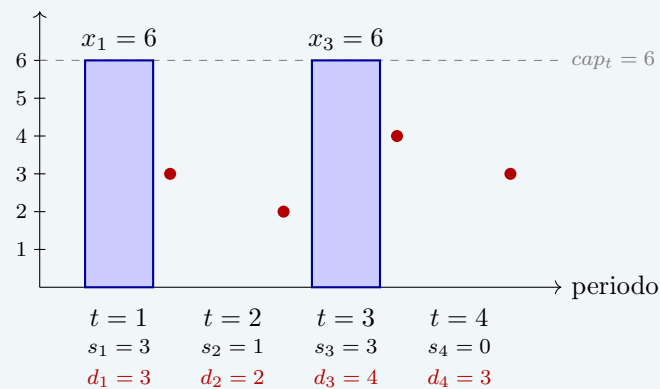
Consideriamo l'istanza di lot sizing degli esercizi precedenti, con 4 periodi, $\mathbf{d} = (3, 2, 4, 3)$, $\mathbf{sc} = (30, 40, 30, 40)$, $\mathbf{vc} = (2, 2, 2, 2)$, $\mathbf{hc} = (4, 4, 4, 4)$, e tre valori della capacità, la stessa in ogni periodo: $cap_t = 5$, $cap_t = 6$, e nessun limite di capacità.

Domande

1. Per $cap_t = 5$ il piano ottimo è $(5, 0, 4, 3)$. Calcolarne il costo.
2. Trovare il piano ottimo per $cap_t = 6$, per enumerazione delle scelte di setup.
3. Trovare il piano ottimo senza capacità, e indicare in quali periodi produce e con quale scorta.
4. Confrontare i tre costi ottimi, e spiegare le differenze.

Soluzione

1. $c = (30 + 30 + 40) + 2 \cdot 12 + 4 \cdot 2 = 100 + 24 + 8 = 132$.
2. Con capacità 6 due setup possono produrre 12 unità, l'intera domanda: i setup nei periodi 1 e 3, i più economici, diventano ammissibili. Producendo il più tardi possibile si ottiene $(6, 0, 6, 0)$, di costo $(30 + 30) + 2 \cdot 12 + (4 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 3) = 60 + 24 + 28 = 112$. L'enumerazione di tutti i piani conferma che è l'unico piano ottimo.



3. Senza capacità, un setup nel periodo 1 e uno nel periodo 3 danno $(5, 0, 7, 0)$, di costo $(30 + 30) + 2 \cdot 12 + (4 \cdot 2 + 4 \cdot 3) = 60 + 24 + 20 = 104$. Il periodo 1 produce per i periodi 1 e 2, il periodo 3 per i periodi 3 e 4: ogni produzione parte con la scorta vuota.
4. I costi ottimi sono 132, 112 e 104: una capacità maggiore può solo abbassare il costo ottimo, poiché ogni piano ammissibile con una capacità minore resta ammissibile con una maggiore.
 - Senza capacità, il periodo 3 produce le 7 unità dei periodi 3 e 4.
 - Con $cap_t = 6$ il periodo 3 ne produce solo 6: un'unità è prodotta nel periodo 1 e tenuta in scorta per due periodi, $104 + 2 \cdot 4 = 112$.
 - Con $cap_t = 5$ due setup producono al più $10 < 12$ unità: serve un terzo setup, nel periodo 4, e il costo diventa 132.

Il costo ottimo è 132 con $cap_t = 5$, 112 con $cap_t = 6$ e 104 senza capacità: la capacità impone un terzo setup e cambia la struttura del piano ottimo.

Esercizio 8.5 — Lot-for-lot, un lower bound e l'ottimo (CLS)

Consideriamo l'istanza del lot sizing capacitato con $m = 3$ periodi e i seguenti dati:

periodo t	1	2	3
domanda d_t	4	3	5
capacità cap_t	7	6	7
costo di setup sc_t	50	20	60
costo di produzione vc_t	0	0	0
costo di mantenimento hc_t	3	3	3

Domande

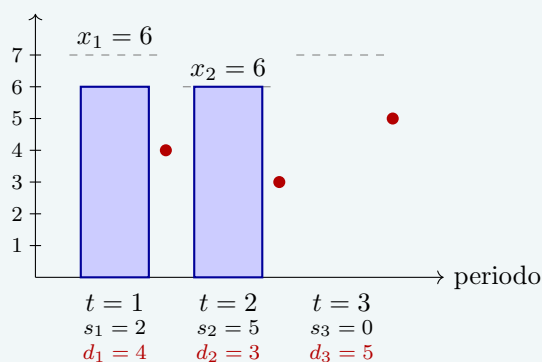
1. Calcolare il costo del piano lot-for-lot.
2. Calcolare il lower bound del capitolo: il minimo numero k di setup richiesto dalla domanda totale, e la somma dei k costi di setup più piccoli.
3. Trovare il piano ottimo per enumerazione delle scelte di setup. Calcolare la distanza del piano lot-for-lot e del lower bound dal costo ottimo.

Soluzione

1. Il lot-for-lot produce $\mathbf{x} = (4, 3, 5)$: ogni domanda rientra nella capacità del suo periodo, non c'è scorta e ci sono 3 setup, $c = 50 + 20 + 60 = 130$.
2. La domanda totale è $D = 12$. La capacità più grande, 7, è minore di D , mentre le due più grandi sommano a $14 \geq 12$: $k = 2$. I due costi di setup più piccoli sono 20 e 50, quindi $z(I) \geq \text{LB} = 70$.
3. Per ogni scelta di setup ammissibile, il piano che produce il più tardi possibile è:

setup	piano	costo
$\{1, 2\}$	$(6, 6, 0)$	91
$\{1, 3\}$	$(7, 0, 5)$	119
$\{1, 2, 3\}$	$(4, 3, 5)$	130

Il piano ottimo è $(6, 6, 0)$, con $z(I) = 91$:



I bound danno $70 \leq z(I) \leq 130$, un gap assoluto di 60: il lot-for-lot è 39 sopra l'ottimo, il lower bound 21 sotto. Il bound paga i setup dei periodi 1 e 2, ma questi due periodi non possono produrre la domanda del periodo 3 senza tenere scorta.

Il lot-for-lot costa 130, il lower bound è 70, e l'enumerazione delle scelte di setup dà il piano ottimo $(6, 6, 0)$ con $z(I) = 91$.