



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Ottimizzazione combinatoria

Volume 2 — Formulazioni dei problemi e loro proprietà

I modelli di programmazione lineare intera dei problemi del volume 1, i loro rilasciamenti lineari e i duali, i bound che ne derivano e il confronto fra formulazioni più deboli e più forti.

Fabio Furini

fabiofurini.github.io

Dipartimento di Ingegneria informatica, automatica e gestionale — Sapienza Università di Roma

Versione online e materiale scaricabile:
fabiofurini.github.io/ottimizzazione-combinatoria/
github.com/fabiofurini/ottimizzazione-combinatoria

Anno accademico 2026–2027

Indice

9	Formulazioni dei problemi di zaino	3
9.1	Panoramica della famiglia	4
9.2	Un modello PLI per il problema dello zaino 0/1	5
9.3	Un primo rilassamento lineare	6
9.4	Un secondo rilassamento lineare	9
9.5	Upper bound per il problema dello zaino 0/1	17
9.6	Un modello PLI per il problema del subset sum	19
9.7	Un modello PLI per il problema dello zaino limitato	20
9.8	Un modello PLI per il problema dello zaino illimitato	22
9.9	Un modello PLI per il problema dello zaino multidimensionale	23
9.10	Un modello PLI per il problema degli zaini multipli	24
9.11	Un modello PLI per il problema dello zaino a scelta multipla	26
9.12	Un modello PLI per il problema dello zaino con setup	27
9.13	Errori tipici	29
9.14	In sintesi	29
10	Formulazioni dei problemi di packing	31
10.1	Panoramica della famiglia	32
10.2	Un modello PLI per il problema del bin packing	32
10.3	Un primo rilassamento lineare	35
10.4	Un secondo rilassamento lineare	39
10.5	Un modello PLI per il problema del cutting stock	46
10.6	Errori tipici	48
10.7	In sintesi	49
11	Formulazioni dei problemi di colorazione	50
11.1	Panoramica della famiglia	51
11.2	Un modello PLI per il problema della colorazione dei vertici	51
11.3	Un primo rilassamento lineare	54
11.4	Un secondo rilassamento lineare	59
11.5	Errori tipici	62
11.6	In sintesi	63

12	Formulazioni dei problemi di clique	64
12.1	Panoramica della famiglia	65
12.2	Un modello PLI per il problema della clique massima: la formulazione sugli spigoli	65
12.3	Un primo rilassamento lineare	67
12.4	Un secondo rilassamento lineare	69
12.5	Disuguaglianze di clique: una formulazione più forte	72
12.6	La relazione con la colorazione dei vertici	75
12.7	Insiemi stabili sul grafo complementare	77
12.8	Modelli PLI per le varianti pesate	80
12.9	Errori tipici	83
12.10	In sintesi	83
13	Formulazioni dei problemi di routing	85
13.1	Panoramica della famiglia	86
13.2	Modelli PLI per il problema del commesso viaggiatore	86
13.3	Un modello con variabili di posizione (MTZ)	87
13.4	Un modello con vincoli di eliminazione dei sottogiri (DFJ)	91
13.5	Rilassamenti lineari	93
13.6	Modelli PLI per il TSP metrico e asimmetrico	99
13.7	Errori tipici	101
13.8	In sintesi	102
14	Formulazioni dei problemi di scheduling	103
14.1	Panoramica della famiglia	104
14.2	Un modello PLI per il problema di scheduling su macchine parallele identiche .	104
14.3	Un primo rilassamento lineare	107
14.4	Un secondo rilassamento lineare	110
14.5	Considerazioni aggiuntive	114
14.6	Errori tipici	115
14.7	In sintesi	115
15	Formulazioni dei problemi di lot sizing	116
15.1	Panoramica della famiglia	117
15.2	Modelli PLI per il problema di lot sizing capacitato	118
15.3	Una formulazione con un legame big-M	118
15.4	Il rilassamento lineare della formulazione big-M	121
15.5	Una formulazione a cammino minimo	123
15.6	Confronto fra le formulazioni	128
15.7	Modelli PLI per le varianti	128
15.8	Errori tipici	144
15.9	In sintesi	144

Formulazioni dei problemi di zaino

Prerequisiti

- Dal modulo *Programmazione lineare*, [Capitolo 9 «Teoria della dualità»](#): il duale di un problema LP, dualità debole e forte.
- Dal modulo *Programmazione lineare intera*, [Capitolo 1 «Programmazione lineare intera»](#) e [Capitolo 2 «Bound primali e duali»](#): problemi PLI, rilassamenti lineari e upper bound.
- Da questo modulo, [Capitolo 2 «Problemi di zaino»](#): il problema dello zaino 0/1 e le sue varianti, le loro ipotesi e le loro istanze di riferimento.

Obiettivi

Al termine di questo capitolo saremo in grado di:

- scrivere il modello PLI del problema dello zaino 0/1 e spiegare ciascuno dei suoi vincoli;
- scrivere i modelli PLI del SSP, del BKP, dell'UKP, del MDKP, del MKP, del MCKP e del KPS, e scriverli su un'istanza numerica;
- scrivere i due rilassamenti lineari e i loro duali, e calcolarne le soluzioni ottime con formule chiuse;
- calcolare l'oggetto critico, la capacità residua e il valore $z(\text{LP}_{\text{KP}})$;
- calcolare gli upper bound di Dantzig e di Martello-Toth, arrotondandoli correttamente;
- spiegare perché $z(\text{LP}_{\text{KP}})$ non supera mai il doppio di $z(\text{ILP}_{\text{KP}})$.

9.1 Panoramica della famiglia

- I modelli PLI dei problemi di zaino usano una variabile x_j per ogni oggetto $j \in \mathcal{J}$: una **variabile binaria** quando l'oggetto è selezionato o no, una **variabile intera** quando conta le copie selezionate dell'oggetto.
- Ogni capacità dà un **vincolo di zaino** sul peso totale degli oggetti selezionati, e la funzione obiettivo ne massimizza il profitto totale.
- I membri della famiglia aggiungono un indice alle variabili (lo zaino k dell'oggetto j nel MKP), alcuni vincoli sulle classi di oggetti (MCKP, KPS) o variabili binarie di setup y_h (KPS).

Lo schema comune dei modelli di zaino è

$$\max \left\{ \sum_{j \in \mathcal{J}} p_j x_j : \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j x_j \leq c, \quad x_j \in D_j \quad \forall j \in \mathcal{J} \right\},$$

dove il dominio D_j è $\{0, 1\}$, $\{0, 1, \dots, b_j\}$ o $\mathbb{Z}_{\geq 0}$. I membri della famiglia cambiano i domini e aggiungono capacità, zaini o classi.

- La tabella elenca i membri della famiglia, con il nome del loro modello PLI e la sezione che lo scrive.

Problema	Modello	Variabili	Sezione
KP	ILP _{KP}	binarie x_j	9.2
SSP	ILP _{SSP}	binarie x_j	9.6
BKP	ILP _{BKP}	interi $x_j \in \{0, 1, \dots, b_j\}$	9.7
UKP	ILP _{UKP}	interi $x_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$	9.8
MDKP	ILP _{MDKP}	binarie x_j , un vincolo per capacità	9.9
MKP	ILP _{MKP}	binarie x_{jk} , oggetto j nello zaino k	9.10
MCKP	ILP _{MCKP}	binarie x_j , un oggetto per classe	9.11
KPS	ILP _{KPS}	binarie x_j e variabili di setup y_h	9.12

9.2 Un modello PLI per il problema dello zaino 0/1

Il problema dello zaino 0/1 e la sua istanza di riferimento (Esempio 2.1) sono definiti nel Capitolo 2 «Problemi di zaino», Sezione 2.2.

- Introduciamo le seguenti n **variabili binarie**:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto } j \text{ è selezionato nello zaino} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall j \in \underbrace{\{1, 2, \dots, n\}}_{=\mathcal{J}}. \quad (9.1)$$

Con queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema dello zaino 0/1 (KP) è il seguente:

$$\max \sum_{j \in \mathcal{J}} p_j x_j \quad (9.2a)$$

$$\text{soggetto a } \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j x_j \leq c, \quad (9.2b)$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in \mathcal{J}. \quad (9.2c)$$

Questo modello PLI si chiama modello ILP_{KP} .

- Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello ILP_{KP} :
 - la funzione obiettivo lineare (9.2a) massimizza il profitto totale degli oggetti selezionati nello zaino;
 - il vincolo (9.2b) garantisce che il peso totale degli oggetti selezionati non superi la capacità dello zaino (un vincolo lineare);
 - infine, i vincoli (9.2c) definiscono le variabili del modello PLI.

Esempio 9.1: modello ILP_{KP}

Consideriamo uno zaino di capacità $c = 9$ e un insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ di 6 oggetti ($n = 6$), con i seguenti profitti e pesi:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$
p_j	6	5	8	9	6	7
w_j	2	3	6	7	5	9

Questa è l'istanza del KP dell'Esempio 2.1, e la chiamiamo [Esempio 9.1](#). Il modello ILP_{KP} per questa istanza è:

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 9x_4 + 6x_5 + 7x_6 \\ \text{soggetto a} \quad & 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 5x_5 + 9x_6 \leq 9 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{ILP}_{\text{KP}})$ è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 0, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 1, \quad \tilde{x}_5 = 0, \quad \tilde{x}_6 = 0$$

Il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{KP}})$ è 15. La soluzione ottima associata del KP è $\tilde{S} = \{1, 4\}$, ed è l'unica soluzione ottima.

9.3 Un primo rilassamento lineare

Per ottenere un rilassamento lineare del modello ILP_{KP} , rilassiamo i vincoli (9.2c) con i seguenti:

$$x_j \geq 0, \quad \forall j \in \mathcal{J}. \quad (9.3)$$

Questo modello PL si chiama modello LP-0_{KP} .

Esempio 9.2: modello LP-0_{KP}

Il modello LP-0_{KP} per l'istanza del KP dell'Esempio 9.1 è:

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 9x_4 + 6x_5 + 7x_6 \\ \text{soggetto a} \quad & 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 5x_5 + 9x_6 \leq 9 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5, \quad x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{LP-0}_{\text{KP}})$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{9}{2}, \quad \tilde{x}_2 = \tilde{x}_3 = \tilde{x}_4 = \tilde{x}_5 = \tilde{x}_6 = 0$$

Il valore ottimo $z(\text{LP-0}_{\text{KP}})$ è 27.

Di conseguenza, abbiamo l'upper bound:

$$z(\text{ILP}_{\text{KP}}) \leq 27$$

Con una variabile duale non negativa π per il vincolo (9.2b), il modello duale del modello LP-0_{KP} è:

$$\min \quad c\pi \quad (9.4a)$$

$$\text{soggetto a} \quad w_j \pi \geq p_j, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \quad (9.4b)$$

$$\pi \geq 0. \quad (9.4c)$$

Questo modello PL si chiama modello $D(\text{LP-0}_{\text{KP}})$.

Esempio 9.3: modello $D(LP-0_{KP})$

Il modello duale $D(LP-0_{KP})$ per l'istanza del KP dell'Esempio 9.1 è:

$$\begin{array}{llll} \min & 9 & \pi & \\ \text{soggetto a} & 2 & \pi & \geq 6 \\ & 3 & \pi & \geq 5 \\ & 6 & \pi & \geq 8 \\ & 7 & \pi & \geq 9 \\ & 5 & \pi & \geq 6 \\ & 9 & \pi & \geq 7 \\ & & \pi & \geq 0 \end{array}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\pi}(D(LP-0_{KP}))$ è:

$$\tilde{\pi} = 3$$

Il valore ottimo $z(D(LP-0_{KP}))$ è 27.

- La seguente proposizione fornisce le formule per calcolare una soluzione ottima del modello primale $LP-0_{KP}$ e del modello duale $D(LP-0_{KP})$.

Proposizione 9.1

Se il primo oggetto $j = 1$ ha l'efficienza massima, una soluzione ottima del modello primale $LP-0_{KP}$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{c}{w_1} \quad \text{e} \quad \tilde{x}_j = 0, \quad \forall j \in \{2, 3, \dots, n\}, \quad (9.5)$$

e una soluzione ottima del modello duale $D(LP-0_{KP})$ è:

$$\tilde{\pi} = \frac{p_1}{w_1}. \quad (9.6)$$

Corollario 9.2

Il valore ottimo dei modelli primale $LP-0_{KP}$ e duale $D(LP-0_{KP})$ è:

$$z(LP-0_{KP}) = p_1 \frac{c}{w_1} = z(D(LP-0_{KP})) \quad (9.7)$$

- La dimostrazione procede in tre passi:

1. mostriamo che (9.5) è una soluzione ammissibile del modello primale LP-0_{KP};
2. mostriamo che (9.6) è una soluzione ammissibile del modello duale $D(\text{LP-0}_{\text{KP}})$;
3. mostriamo che le due soluzioni ammissibili hanno lo stesso valore della funzione obiettivo.

Quindi, per la dualità forte della PL, (9.5) e (9.6) sono una coppia di soluzioni ottime primale e duale.

Dimostrazione.

1. Abbiamo:

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j \tilde{x}_j = w_1 \frac{c}{w_1} = c$$

quindi il vincolo (9.2b) è soddisfatto.

Poiché $\tilde{x}_j \geq 0$, per ogni $j \in \mathcal{J}$, i vincoli (9.3) sono soddisfatti.

Quindi (9.5) è una soluzione ammissibile del modello primale LP-0_{KP}.

2. Per ogni $j \in \mathcal{J}$, abbiamo:

$$w_j \tilde{\pi} = w_j \frac{p_1}{w_1} \geq p_j \quad \text{poiché} \quad \frac{p_1}{w_1} \geq \frac{p_j}{w_j}$$

quindi i vincoli (9.4b) sono soddisfatti.

Abbiamo $\tilde{\pi} \geq 0$, quindi il vincolo (9.4c) è soddisfatto.

Quindi (9.6) è una soluzione ammissibile del modello duale $D(\text{LP-0}_{\text{KP}})$.

3. Per le funzioni obiettivo abbiamo:

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} p_j \tilde{x}_j = p_1 \frac{c}{w_1} = c \tilde{\pi}$$

quindi i valori delle funzioni obiettivo primale e duale coincidono.

Quindi, per la dualità forte della PL, (9.5) e (9.6) sono una coppia di soluzioni ottime primale e duale.

□

9.4 Un secondo rilassamento lineare

Per ottenere un rilassamento lineare del modello ILP_{KP} , rilassiamo i vincoli (9.2c) con i seguenti:

$$x_j \leq 1, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \quad (9.8a)$$

$$x_j \geq 0, \quad \forall j \in \mathcal{J}. \quad (9.8b)$$

Questo modello PL si chiama modello LP_{KP} .

Esempio 9.4: modello LP_{KP}

Il modello LP_{KP} per l'istanza del KP dell'Esempio 9.1 è:

$$\begin{array}{llllllll} \max & 6 & x_1 & + & 5 & x_2 & + & 8 & x_3 & + & 9 & x_4 & + & 6 & x_5 & + & 7 & x_6 \\ \text{soggetto a} & 2 & x_1 & + & 3 & x_2 & + & 6 & x_3 & + & 7 & x_4 & + & 5 & x_5 & + & 9 & x_6 & \leq & 9 \\ & & x_1 & & & & & & & & & & & & & & & \leq & 1 \\ & & & & x_2 & & & & & & & & & & & & & \leq & 1 \\ & & & & & & x_3 & & & & & & & & & & & \leq & 1 \\ & & & & & & & & x_4 & & & & & & & & & \leq & 1 \\ & & & & & & & & & & x_5 & & & & & & & \leq & 1 \\ & & & & & & & & & & & & x_6 & & & & & \leq & 1 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \geq & 0 \end{array}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{LP}_{\text{KP}})$ è:

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = 1, \quad \tilde{x}_3 = \frac{2}{3}, \quad \tilde{x}_4 = \tilde{x}_5 = \tilde{x}_6 = 0$$

Il valore ottimo $z(\text{LP}_{\text{KP}})$ è $\frac{49}{3}$.

Di conseguenza, abbiamo l'upper bound:

$$z(\text{ILP}_{\text{KP}}) \leq \frac{49}{3}$$

Con una variabile duale non negativa π per il vincolo (9.2b) e una variabile duale non

negativa μ_j per ogni vincolo (9.8a), il modello duale del modello LP_{KP} è:

$$\min \quad c\pi + \sum_{j \in \mathcal{J}} \mu_j \quad (9.9a)$$

$$\text{soggetto a} \quad w_j \pi + \mu_j \geq p_j, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \quad (9.9b)$$

$$\pi \geq 0, \quad (9.9c)$$

$$\mu_j \geq 0, \quad \forall j \in \mathcal{J}. \quad (9.9d)$$

Questo modello PL si chiama modello $D(LP_{KP})$.

Esempio 9.5: modello $D(LP_{KP})$

Il modello duale $D(LP_{KP})$ per l'istanza del KP dell'Esempio 9.1 è:

$$\begin{array}{llllllll} \min & 9 & \pi & + & \mu_1 & + & \mu_2 & + & \mu_3 & + & \mu_4 & + & \mu_5 & + & \mu_6 \\ & 2 & \pi & + & \mu_1 & & & & & & & & & & \geq & 6 \\ & 3 & \pi & & & + & \mu_2 & & & & & & & & \geq & 5 \\ & 6 & \pi & & & & & + & \mu_3 & & & & & & \geq & 8 \\ & 7 & \pi & & & & & & + & \mu_4 & & & & & \geq & 9 \\ & 5 & \pi & & & & & & & + & \mu_5 & & & & \geq & 6 \\ & 9 & \pi & & & & & & & & + & \mu_6 & & & \geq & 7 \\ & & \pi, & & \mu_1, & & \mu_2, & & \mu_3, & & \mu_4, & & \mu_5, & & \mu_6 & \geq & 0 \end{array}$$

Una soluzione ottima $(\tilde{\pi}, \tilde{\mu})(D(LP_{KP}))$ è:

$$\tilde{\pi} = \frac{4}{3}, \quad \tilde{\mu}_1 = \frac{10}{3}, \quad \tilde{\mu}_2 = 1, \quad \tilde{\mu}_3 = \tilde{\mu}_4 = \tilde{\mu}_5 = \tilde{\mu}_6 = 0$$

Il valore ottimo $z(D(LP_{KP}))$ è $\frac{49}{3}$.

9.4.1 Efficienza degli oggetti

Definizione 9.3: efficienza

L'**efficienza** di un oggetto $j \in \mathcal{J}$ è il rapporto fra il suo profitto e il suo peso:

$$\frac{p_j}{w_j} \quad (9.10)$$

- L'efficienza di un oggetto misura la sua redditività per unità di peso: indica quanto profitto si ottiene per ogni unità di peso.

Esempio 9.6: efficienze degli oggetti

Consideriamo l'istanza del KP dell'Esempio 9.1. Abbiamo:

Oggetti		$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$
Profitti	p_j	6	5	8	9	6	7
Pesi	w_j	2	3	6	7	5	9
Efficienze	$\frac{p_j}{w_j}$	3	$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{9}$

Gli oggetti sono ordinati per efficienza non crescente, poiché:

$$3 \geq \frac{5}{3} \geq \frac{4}{3} \geq \frac{9}{7} \geq \frac{6}{5} \geq \frac{7}{9}$$

Ordinare gli oggetti per efficienza non crescente richiede un algoritmo di ordinamento con tempo di calcolo $O(n \log n)$, che è una funzione polinomiale del numero n di oggetti.

9.4.2 Oggetto critico e capacità residua

Definizione 9.4: oggetto critico e capacità residua

Dato un insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, \dots, n\}$ di n oggetti ordinati per efficienza non crescente, l'**oggetto critico** è l'oggetto

$$s \in \mathcal{J} \quad \text{tale che} \quad \sum_{j=1}^{s-1} w_j \leq c \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^s w_j > c \quad (9.11)$$

e la **capacità residua** è

$$rc = c - \sum_{j=1}^{s-1} w_j \quad (9.12)$$

- L'oggetto critico è il primo che non entra per intero nello zaino se tutti i precedenti sono selezionati. In inglese si chiama **split item**, **break item** o **critical item**, e si può scrivere come

$$s = \min \left\{ j \in \mathcal{J} : \sum_{k=1}^j w_k > c \right\}$$

- La capacità residua è la capacità dello zaino che resta quando tutti gli oggetti che precedono l'oggetto critico sono selezionati. Soddisfa $0 \leq rc < w_s$.

Esempio 9.7: oggetto critico e capacità residua

Per l'istanza del KP dell'Esempio 9.1, l'oggetto critico è $s = 3$ poiché:

$$\sum_{j=1}^2 w_j = 2 + 3 = 5 \leq 9 \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^3 w_j = 2 + 3 + 6 = 11 > 9$$

e la capacità residua è:

$$rc = c - \sum_{j=1}^2 w_j = 9 - 2 - 3 = 4$$

- La seguente proposizione fornisce le formule per calcolare una soluzione ottima del modello primale LP_{KP} e del modello duale $D(LP_{KP})$.

Proposizione 9.5

Se gli oggetti sono ordinati per efficienza non crescente, una soluzione ottima del modello primale LP_{KP} è:

$$\tilde{x}_j = 1, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, s-1\}, \quad \tilde{x}_s = \frac{rc}{w_s} \quad \text{e} \quad \tilde{x}_j = 0, \quad \forall j \in \{s+1, s+2, \dots, n\}, \quad (9.13)$$

e una soluzione ottima del modello duale $D(LP_{KP})$ è:

$$\tilde{\pi} = \frac{p_s}{w_s}, \quad \tilde{\mu}_j = p_j - w_j \frac{p_s}{w_s}, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, s-1\} \quad \text{e} \quad \tilde{\mu}_j = 0, \quad \forall j \in \{s, s+1, \dots, n\}. \quad (9.14)$$

Corollario 9.6

Il valore ottimo dei modelli primale LP_{KP} e duale $D(LP_{KP})$ è:

$$z(LP_{KP}) = \sum_{j=1}^{s-1} p_j + p_s \frac{rc}{w_s} = z(D(LP_{KP})) \quad (9.15)$$

- La dimostrazione procede in tre passi:

1. mostriamo che (9.13) è una soluzione ammissibile del modello primale LP_{KP} ;

2. mostriamo che (9.14) è una soluzione ammissibile del modello duale $D(LP_{KP})$;
3. mostriamo che le due soluzioni ammissibili hanno lo stesso valore della funzione obiettivo.

Quindi, per la dualità forte della PL, (9.13) e (9.14) sono una coppia di soluzioni ottime primale e duale.

Dimostrazione.

1. Abbiamo:

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j \tilde{x}_j = \sum_{j=1}^{s-1} w_j + w_s \frac{rc}{w_s} = \sum_{j=1}^{s-1} w_j + c - \sum_{j=1}^{s-1} w_j = c$$

quindi il vincolo (9.2b) è soddisfatto.

Poiché $rc < w_s$, abbiamo $0 \leq \tilde{x}_j \leq 1$, per ogni $j \in \mathcal{J}$. Di conseguenza, i vincoli (9.8a) e (9.8b) sono soddisfatti.

Quindi (9.13) è una soluzione ammissibile del modello primale LP_{KP} .

□

Dimostrazione.

2. Per ogni $j \in \{1, 2, \dots, s-1\}$, abbiamo:

$$w_j \tilde{\pi} + \tilde{\mu}_j = w_j \frac{p_s}{w_s} + \left(p_j - w_j \frac{p_s}{w_s} \right) = p_j$$

e, per ogni $j \in \{s, s+1, \dots, n\}$, abbiamo:

$$w_j \tilde{\pi} + \tilde{\mu}_j = w_j \frac{p_s}{w_s} \geq p_j \quad \text{poiché} \quad \frac{p_s}{w_s} \geq \frac{p_j}{w_j}$$

quindi i vincoli (9.9b) sono soddisfatti.

Abbiamo $\tilde{\pi} \geq 0$. Per ogni $j \in \{1, 2, \dots, s-1\}$, abbiamo:

$$p_j - w_j \frac{p_s}{w_s} \geq 0 \quad \text{poiché} \quad \frac{p_j}{w_j} \geq \frac{p_s}{w_s}$$

di conseguenza, $\tilde{\mu}_j \geq 0$ per ogni $j \in \mathcal{J}$. Quindi il vincolo (9.9c) e i vincoli (9.9d) sono soddisfatti.

Quindi (9.14) è una soluzione ammissibile del modello duale $D(LP_{KP})$.

3. Per le funzioni obiettivo abbiamo:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j \in \mathcal{J}} p_j \tilde{x}_j &= \sum_{j=1}^{s-1} p_j + p_s \frac{rc}{w_s} \\
 &= \sum_{j=1}^{s-1} p_j + \frac{p_s}{w_s} \left(c - \sum_{j=1}^{s-1} w_j \right) \\
 &= c \frac{p_s}{w_s} + \sum_{j=1}^{s-1} \left(p_j - w_j \frac{p_s}{w_s} \right) \\
 &= c \tilde{\pi} + \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{\mu}_j
 \end{aligned}$$

quindi i valori delle funzioni obiettivo primale e duale coincidono.

Quindi, per la dualità forte della PL, (9.13) e (9.14) sono una coppia di soluzioni ottime primale e duale. □

Nella maggior parte delle istanze del KP il rapporto fra $z(\text{LP}_{\text{KP}})$ e $z(\text{ILP}_{\text{KP}})$ supera di poco uno: $z(\text{LP}_{\text{KP}})$ è tipicamente un upper bound stretto per $z(\text{ILP}_{\text{KP}})$.

- Riportiamo una dimostrazione alternativa delle formule (9.13). Procediamo per assurdo, dimostrando che una soluzione diversa non può essere ottima.
- In questa dimostrazione supponiamo che gli oggetti con la stessa efficienza siano fusi in un unico oggetto. Poiché possiamo scegliere qualunque frazione di un oggetto, questo non cambia il problema, ed evitiamo di discutere le soluzioni simmetriche.

Dimostrazione. Supponiamo che $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ sia una soluzione ottima di LP_{KP} diversa da $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ determinata con le formule (9.13). Ogni soluzione ottima di LP_{KP} ha peso totale pari a c , cioè il vincolo (9.2b) è soddisfatto all'uguaglianza (altrimenti si può migliorare).

Supponiamo che non esista una coppia di oggetti $h < k$ con $\bar{x}_h < 1$ e $\bar{x}_k > 0$. Allora $\bar{\mathbf{x}}$ seleziona gli oggetti in ordine di efficienza, riempiendo lo zaino oggetto per oggetto fino al peso c : questa è esattamente $\tilde{\mathbf{x}}$, assurdo. Quindi una tale coppia di oggetti $h < k$ esiste (il caso $k = s$ è incluso).

Sia:

$$d = \min \{ w_k \bar{x}_k, w_h (1 - \bar{x}_h) \} > 0$$

Costruiamo una nuova soluzione ammissibile $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$ identica a $\bar{\mathbf{x}}$ tranne

che:

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k - \frac{d}{w_k} \geq 0 \quad \text{e} \quad \hat{x}_h = \bar{x}_h + \frac{d}{w_h} \leq 1$$

Per la definizione di d , abbiamo $\hat{x}_k \geq 0$ e $\hat{x}_h \leq 1$, e $\hat{\mathbf{x}}$ è una soluzione ammissibile poiché:

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j \hat{x}_j = \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j \bar{x}_j + w_h \frac{d}{w_h} - w_k \frac{d}{w_k} = \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j \bar{x}_j = c$$

Il valore della funzione obiettivo di $\hat{\mathbf{x}}$ è:

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} p_j \hat{x}_j = \sum_{j \in \mathcal{J}} p_j \bar{x}_j + d \underbrace{\left(\frac{p_h}{w_h} - \frac{p_k}{w_k} \right)}_{>0 \text{ poiché } \frac{p_h}{w_h} > \frac{p_k}{w_k}} > \sum_{j \in \mathcal{J}} p_j \bar{x}_j$$

Allora il valore della funzione obiettivo di $\hat{\mathbf{x}}$ è maggiore del valore della funzione obiettivo di $\bar{\mathbf{x}}$, contro il fatto che $\bar{\mathbf{x}}$ è una soluzione ottima.

La disuguaglianza stretta $p_h/w_h > p_k/w_k$ vale per ogni $h < k$, poiché gli oggetti con la stessa efficienza sono stati fusi. $\square$

Esempio 9.8: soluzioni primale e duale dei modelli PL

Per l'istanza del KP dell'Esempio 9.1, abbiamo $s = 3$ e $rc = 4$.

Con le formule (9.13), calcoliamo la seguente soluzione ottima del modello LP_{KP} :

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = 1, \quad \tilde{x}_3 = \frac{2}{3}, \quad \tilde{x}_4 = \tilde{x}_5 = \tilde{x}_6 = 0$$

Con le formule (9.14), calcoliamo la seguente soluzione ottima del modello $D(LP_{KP})$:

$$\tilde{\pi} = \frac{4}{3}, \quad \tilde{\mu}_1 = 6 - 2 \frac{4}{3} = \frac{10}{3}, \quad \tilde{\mu}_2 = 5 - 3 \frac{4}{3} = 1, \quad \tilde{\mu}_3 = \tilde{\mu}_4 = \tilde{\mu}_5 = \tilde{\mu}_6 = 0$$

Con la formula (9.15), il valore ottimo di entrambi i modelli PL, primale e duale, è:

$$\sum_{j=1}^2 p_j + p_s \frac{rc}{w_s} = 6 + 5 + 8 \frac{2}{3} = \frac{49}{3}$$

9.4.3 Alcune proprietà teoriche importanti

- Le due proposizioni seguenti mostrano che il rapporto fra $z(\text{LP}_{\text{KP}})$ e $z(\text{ILP}_{\text{KP}})$ è al più due per tutte le istanze del KP. Inoltre, esistono istanze per cui il valore due si raggiunge asintoticamente quando la capacità $c \rightarrow +\infty$.

Proposizione 9.7

Per ogni istanza del KP abbiamo:

$$\frac{z(\text{LP}_{\text{KP}})}{z(\text{ILP}_{\text{KP}})} \leq 2 \quad (9.16)$$

Dimostrazione. Consideriamo due soluzioni ammissibili del modello ILP_{KP} :

- La soluzione che seleziona tutti gli oggetti che precedono l'oggetto critico:

$$\bar{x}_j = 1, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, s-1\} \quad \text{e} \quad \bar{x}_j = 0, \quad \forall j \in \{s, s+1, \dots, n\}$$

che è ammissibile per definizione di oggetto critico, e fornisce il lower bound valido:

$$\sum_{j=1}^{s-1} p_j \leq z(\text{ILP}_{\text{KP}})$$

- La soluzione che seleziona solo l'oggetto critico:

$$\bar{x}_j = 0, \quad \forall j \in \mathcal{J} \setminus \{s\} \quad \text{e} \quad \bar{x}_s = 1$$

che è ammissibile per l'ipotesi $w_s \leq c$, e fornisce il lower bound valido:

$$p_s \leq z(\text{ILP}_{\text{KP}})$$

Sommando le due disuguaglianze otteniamo:

$$2 z(\text{ILP}_{\text{KP}}) \geq \sum_{j=1}^{s-1} p_j + p_s \geq z(\text{LP}_{\text{KP}})$$

e quindi:

$$\frac{z(\text{LP}_{\text{KP}})}{z(\text{ILP}_{\text{KP}})} \leq 2$$

□

Proposizione 9.8

Esistono istanze del KP tali che:

$$\frac{z(\text{LP}_{\text{KP}})}{z(\text{ILP}_{\text{KP}})} \rightarrow 2 \quad \text{per} \quad c \rightarrow +\infty \quad (9.17)$$

Dimostrazione. Dato $\vartheta \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, consideriamo l'istanza del KP con capacità dello zaino $c = 2\vartheta$ e $n = 2$ oggetti con i seguenti profitti e pesi:

$$p_1 = 1, \quad w_1 = \vartheta + 1 \quad \text{e} \quad p_2 = 1, \quad w_2 = \vartheta + 1$$

Poiché si può selezionare un solo oggetto, una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{ILP}_{\text{KP}})$ del modello ILP_{KP} è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 0 \quad \text{e} \quad z(\text{ILP}_{\text{KP}}) = 1$$

L'oggetto critico è $s = 2$, e la capacità residua è:

$$rc = 2\vartheta - (\vartheta + 1) = \vartheta - 1$$

Di conseguenza, una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{LP}_{\text{KP}})$ del modello LP_{KP} è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = \frac{\vartheta - 1}{\vartheta + 1} \quad \text{e} \quad z(\text{LP}_{\text{KP}}) = 1 + \frac{\vartheta - 1}{\vartheta + 1} = \frac{2\vartheta}{\vartheta + 1}$$

Ne segue che:

$$\lim_{\vartheta \rightarrow +\infty} \frac{z(\text{LP}_{\text{KP}})}{z(\text{ILP}_{\text{KP}})} = \lim_{\vartheta \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2\vartheta}{\vartheta+1}}{1} = \lim_{\vartheta \rightarrow +\infty} \frac{2(\vartheta+1) - 2}{\vartheta+1} = \lim_{\vartheta \rightarrow +\infty} 2 - \underbrace{\frac{2}{\vartheta+1}}_{\rightarrow 0} = 2$$

Di conseguenza, concludiamo che:

$$\frac{z(\text{LP}_{\text{KP}})}{z(\text{ILP}_{\text{KP}})} \rightarrow 2 \quad \text{per} \quad c \rightarrow +\infty$$

□

9.5 Upper bound per il problema dello zaino 0/1

- Le due proposizioni seguenti richiedono che gli oggetti siano ordinati per efficienza non crescente.

Proposizione 9.9: upper bound di Dantzig

Per ogni istanza del KP abbiamo:

$$z(\text{ILP}_{\text{KP}}) \leq \underbrace{\sum_{j=1}^{s-1} p_j + \left\lfloor p_s \frac{rc}{w_s} \right\rfloor}_{\text{UB}_D} \quad (9.18)$$

e UB_D si chiama **upper bound di Dantzig** per il KP.

Dimostrazione. Abbiamo:

$$\lfloor z(\text{LP}_{\text{KP}}) \rfloor = \left\lfloor \sum_{j=1}^{s-1} p_j + p_s \frac{rc}{w_s} \right\rfloor = \sum_{j=1}^{s-1} p_j + \left\lfloor p_s \frac{rc}{w_s} \right\rfloor$$

che è un upper bound valido per $z(\text{ILP}_{\text{KP}})$ poiché $p_j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, per ogni $j \in \mathcal{J}$. $\square$

- Il bound di Martello-Toth usa gli oggetti $s-1$ e $s+1$. Poiché $w_1 \leq c$ e $\sum_j w_j > c$ abbiamo $s \geq 2$, quindi l'oggetto $s-1$ esiste sempre. Se $s = n$ l'oggetto $s+1$ non esiste, e poniamo $p_{n+1}/w_{n+1} := 0$: in questo caso $\text{UB}_0 = \sum_{j=1}^{s-1} p_j$.

Proposizione 9.10: upper bound di Martello-Toth

Per ogni istanza del KP abbiamo:

$$z(\text{ILP}_{\text{KP}}) \leq \text{UB}_{\text{MT}} = \max \left\{ \text{UB}_0, \text{UB}_1 \right\} \quad (9.19)$$

dove

$$\text{UB}_0 = \sum_{j=1}^{s-1} p_j + \left\lfloor rc \frac{p_{s+1}}{w_{s+1}} \right\rfloor$$

$$\text{UB}_1 = \sum_{j=1}^{s-1} p_j + \left\lfloor p_s - (w_s - rc) \frac{p_{s-1}}{w_{s-1}} \right\rfloor$$

e UB_{MT} si chiama **upper bound di Martello-Toth** per il KP.

Dimostrazione. Poiché x_s non può assumere un valore frazionario, una soluzione ottima $\tilde{x}(\text{ILP}_{\text{KP}})$ si ottiene da una soluzione ottima $\tilde{x}(\text{LP}_{\text{KP}})$ o senza l'oggetto critico s o con l'oggetto critico s , e quindi togliendo almeno uno dei primi $s-1$ oggetti.

1. Se l'oggetto critico è escluso, abbiamo $z(\text{ILP}_{\text{KP}}) \leq \text{UB}_0$ poiché la capacità residua rc si riempie con oggetti di efficienza massima possibile $\frac{p_{s+1}}{w_{s+1}}$
2. Se l'oggetto critico è incluso, abbiamo $z(\text{ILP}_{\text{KP}}) \leq \text{UB}_1$ poiché supponiamo che l'oggetto da togliere abbia esattamente il peso minimo necessario $w_s - rc$ e l'efficienza minima possibile $\frac{p_{s-1}}{w_{s-1}}$

$\square$

Esempio 9.9: upper bound di Dantzig e di Martello-Toth

Per l'istanza del KP dell'Esempio 9.1, con la formula (9.18) calcoliamo l'upper bound di Dantzig:

$$UB_D = \sum_{j=1}^2 p_j + \left\lfloor p_3 \frac{rc}{w_3} \right\rfloor = 6 + 5 + \left\lfloor 8 \frac{2}{3} \right\rfloor = 11 + \left\lfloor \frac{16}{3} \right\rfloor = 16$$

Con la formula (9.19) calcoliamo l'upper bound di Martello-Toth:

$$UB_0 = \sum_{j=1}^2 p_j + \left\lfloor rc \frac{p_4}{w_4} \right\rfloor = 6 + 5 + \left\lfloor 4 \frac{9}{7} \right\rfloor = 11 + \left\lfloor \frac{36}{7} \right\rfloor = 16$$

$$UB_1 = \sum_{j=1}^2 p_j + \left\lfloor p_3 - (w_3 - rc) \frac{p_2}{w_2} \right\rfloor = 6 + 5 + \left\lfloor 8 - (6 - 4) \frac{5}{3} \right\rfloor = 11 + \left\lfloor \frac{14}{3} \right\rfloor = 15$$

$$UB_{MT} = \max \left\{ UB_0, UB_1 \right\} = \max \left\{ 16, 15 \right\} = 16$$

Per questa istanza del KP, l'upper bound di Martello-Toth è forte quanto l'upper bound di Dantzig.

9.6 Un modello PLI per il problema del subset sum

Il problema del subset sum e la sua istanza di riferimento (Esempio 2.2) sono definiti nel Capitolo 2 «Problemi di zaino», Sezione 2.3.

- Introduciamo le seguenti n **variabili binarie**:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto } j \text{ è selezionato nel sottoinsieme} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall j \in \mathcal{J}. \quad (9.20)$$

Con queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema del subset sum (SSP) è il seguente:

$$\max \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j x_j \quad (9.21a)$$

$$\text{soggetto a } \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j x_j \leq c, \quad (9.21b)$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in \mathcal{J}. \quad (9.21c)$$

Questo modello PLI si chiama modello ILP_{SSP}.

- Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello ILP_{SSP}:
 - la funzione obiettivo lineare (9.21a) massimizza il peso totale degli oggetti selezionati nel sottoinsieme;

- il vincolo (9.21b) garantisce che il peso totale degli oggetti selezionati non superi il valore obiettivo (un vincolo lineare);
- infine, i vincoli (9.21c) definiscono le variabili del modello PLI.
- Il modello ILP_{SSP} è il modello ILP_{KP} con $p_j = w_j$, per ogni $j \in \mathcal{J}$: la risposta al SSP è **sì** se e solo se $z(\text{ILP}_{\text{SSP}}) = c$.

Esempio 9.10: modello ILP_{SSP}

Consideriamo un valore obiettivo $c = 9$ e un insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ di 6 oggetti ($n = 6$), con i seguenti pesi:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$
w_j	2	3	6	7	5	9

Questa è l'istanza del SSP dell'Esempio 2.2. Il modello ILP_{SSP} per questa istanza è:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 5x_5 + 9x_6 \\
 \text{soggetto a} \quad & 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 5x_5 + 9x_6 \leq 9 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

Una soluzione ottima $\tilde{x}(\text{ILP}_{\text{SSP}})$ è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \tilde{x}_2 = 0, \tilde{x}_3 = 0, \tilde{x}_4 = 1, \tilde{x}_5 = 0, \tilde{x}_6 = 0$$

Il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{SSP}})$ è $9 = c$, quindi la risposta al SSP è **sì**. Il sottoinsieme associato è $\tilde{S} = \{1, 4\}$. La soluzione ottima non è unica: anche i sottoinsiemi $\{2, 3\}$ e $\{6\}$ raggiungono il valore obiettivo.

9.7 Un modello PLI per il problema dello zaino limitato

Il problema dello zaino limitato e la sua istanza di riferimento (Esempio 2.3) sono definiti nel Capitolo 2 «Problemi di zaino», Sezione 2.4.

- Introduciamo le seguenti n **variabili intere**:

$$x_j = \text{numero di copie dell'oggetto } j \text{ inserite nello zaino} \quad \forall j \in \mathcal{J}. \quad (9.22)$$

Con queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema dello zaino limitato (BKP) è il seguente:

$$\max \sum_{j \in \mathcal{J}} p_j x_j \quad (9.23a)$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j x_j \leq c, \quad (9.23b)$$

$$x_j \in \{0, 1, \dots, b_j\}, \quad \forall j \in \mathcal{J}. \quad (9.23c)$$

Questo modello PLI si chiama modello ILP_{BKP} .

- Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello ILP_{BKP} :
 - la funzione obiettivo lineare (9.23a) massimizza il profitto totale delle copie degli oggetti selezionate nello zaino;
 - il vincolo (9.23b) garantisce che il peso totale delle copie selezionate non superi la capacità dello zaino (un vincolo lineare);
 - infine, i vincoli (9.23c) definiscono le variabili del modello PLI: ogni oggetto j si prende al più b_j volte.

Esempio 9.11: modello ILP_{BKP}

Consideriamo uno zaino di capacità $c = 9$ e un insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ di 6 oggetti ($n = 6$), con i seguenti profitti, pesi e copie disponibili:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$
p_j	6	5	8	9	6	7
w_j	2	3	6	7	5	9
b_j	2	2	1	1	1	1

Questa è l'istanza del BKP dell'Esempio 2.3. Il modello ILP_{BKP} per questa istanza è:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 6x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 9x_4 + 6x_5 + 7x_6 \\
 \text{soggetto a} \quad & 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 5x_5 + 9x_6 \leq 9 \\
 & x_1, x_2 \in \{0, 1, 2\} \\
 & x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{ILP}_{\text{BKP}})$ è:

$$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = 0, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 1, \quad \tilde{x}_6 = 0$$

Il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{BKP}})$ è 18. La soluzione ottima associata del BKP prende due copie dell'oggetto 1 e una copia dell'oggetto 5, ed è l'unica soluzione ottima.

9.8 Un modello PLI per il problema dello zaino illimitato

Il problema dello zaino illimitato e la sua istanza di riferimento (Esempio 2.4) sono definiti nel Capitolo 2 «Problemi di zaino», Sezione 2.5.

- Introduciamo le seguenti n **variabili intere**:

$$x_j = \text{numero di copie dell'oggetto } j \text{ inserite nello zaino} \quad \forall j \in \mathcal{J}. \quad (9.24)$$

Con queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema dello zaino illimitato (UKP) è il seguente:

$$\max \sum_{j \in \mathcal{J}} p_j x_j \quad (9.25a)$$

$$\text{soggetto a } \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j x_j \leq c, \quad (9.25b)$$

$$x_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall j \in \mathcal{J}. \quad (9.25c)$$

Questo modello PLI si chiama modello ILP_{UKP} .

- Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello ILP_{UKP} :
 - la funzione obiettivo lineare (9.25a) massimizza il profitto totale delle copie degli oggetti selezionate nello zaino;
 - il vincolo (9.25b) garantisce che il peso totale delle copie selezionate non superi la capacità dello zaino (un vincolo lineare);
 - infine, i vincoli (9.25c) definiscono le variabili del modello PLI; il vincolo di capacità dà già $x_j \leq \hat{b}_j = \lfloor c/w_j \rfloor$, per ogni $j \in \mathcal{J}$.

Esempio 9.12: modello ILP_{UKP}

Consideriamo uno zaino di capacità $c = 9$ e un insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ di 6 oggetti ($n = 6$), ciascuno disponibile in un numero illimitato di copie, con i seguenti profitti e pesi:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$
p_j	6	5	8	9	6	7
w_j	2	3	6	7	5	9

Questa è l'istanza dell'UKP dell'Esempio 2.4. Il modello ILP_{UKP} per questa istanza è:

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 9x_4 + 6x_5 + 7x_6 \\ \text{soggetto a} \quad & 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 5x_5 + 9x_6 \leq 9 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{ILP}_{\text{UKP}})$ è:

$$\tilde{x}_1 = 4, \quad \tilde{x}_2 = 0, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 0, \quad \tilde{x}_6 = 0$$

Il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{UKP}})$ è 24. La soluzione ottima associata dell'UKP prende quattro copie dell'oggetto 1, ed è l'unica soluzione ottima.

9.9 Un modello PLI per il problema dello zaino multidimensionale

Il problema dello zaino multidimensionale e la sua istanza di riferimento (Esempio 2.5) sono definiti nel [Capitolo 2 «Problemi di zaino», Sezione 2.6](#).

- Introduciamo le seguenti n **variabili binarie**:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto } j \text{ è selezionato nello zaino} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall j \in \mathcal{J}. \quad (9.26)$$

Con queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema dello zaino multidimensionale (MDKP) è il seguente:

$$\max \sum_{j \in \mathcal{J}} p_j x_j \quad (9.27a)$$

$$\text{soggetto a } \sum_{j \in \mathcal{J}} w_{dj} x_j \leq c_d, \quad \forall d \in \mathcal{D}, \quad (9.27b)$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in \mathcal{J}. \quad (9.27c)$$

Questo modello PLI si chiama modello ILP_{MDKP} .

- Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello ILP_{MDKP} :
 - la funzione obiettivo lineare (9.27a) massimizza il profitto totale degli oggetti selezionati nello zaino;
 - i vincoli (9.27b) garantiscono che, in ogni dimensione d , il peso totale degli oggetti selezionati non superi la capacità c_d (k vincoli lineari, uno per ogni dimensione);
 - infine, i vincoli (9.27c) definiscono le variabili del modello PLI.

Esempio 9.13: modello ILP_{MDKP}

Consideriamo uno zaino a 2 dimensioni ($k = 2$) con capacità $c_1 = 10$ e $c_2 = 12$, e un insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4\}$ di 4 oggetti ($n = 4$), con i seguenti profitti e pesi:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
p_j	6	7	5	9
w_{1j}	4	5	3	7
w_{2j}	6	4	5	3

Questa è l'istanza del MDKP dell'Esempio 2.5. Il modello ILP_{MDKP} per questa istanza è:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 6x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 9x_4 \\
 \text{soggetto a} \quad & 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 \leq 10 \\
 & 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq 12 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{ILP}_{\text{MDKP}})$ è:

$$\tilde{x}_1 = 0, \quad \tilde{x}_2 = 0, \quad \tilde{x}_3 = 1, \quad \tilde{x}_4 = 1$$

Il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{MDKP}})$ è 14. La soluzione ottima associata del MDKP è $\tilde{S} = \{3, 4\}$, ed è l'unica soluzione ottima.

9.10 Un modello PLI per il problema degli zaini multipli

Il problema degli zaini multipli e la sua istanza di riferimento (Esempio 2.6) sono definiti nel Capitolo 2 «Problemi di zaino», Sezione 2.7.

- Introduciamo le seguenti nm **variabili binarie**:

$$x_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto } j \text{ è inserito nello zaino } k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall j \in \mathcal{I}, \forall k \in \mathcal{K}. \quad (9.28)$$

Con queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema degli zaini multipli (MKP) è il seguente:

$$\max \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{j \in \mathcal{I}} p_j x_{jk} \quad (9.29a)$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{j \in \mathcal{I}} w_j x_{jk} \leq c_k, \quad \forall k \in \mathcal{K}, \quad (9.29b)$$

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} x_{jk} \leq 1, \quad \forall j \in \mathcal{I}, \quad (9.29c)$$

$$x_{jk} \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in \mathcal{I}, \forall k \in \mathcal{K}. \quad (9.29d)$$

Questo modello PLI si chiama modello ILP_{MKP} .

- Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello ILP_{MKP} :
 - la funzione obiettivo lineare (9.29a) massimizza il profitto totale degli oggetti inseriti negli zaini;
 - i vincoli (9.29b) garantiscono che, in ogni zaino k , il peso totale degli oggetti assegnati non superi la capacità c_k (m vincoli lineari, uno per ogni zaino);
 - i vincoli (9.29c) garantiscono che ogni oggetto sia inserito in al più uno zaino (n vincoli lineari, uno per ogni oggetto);

– infine, i vincoli (9.29d) definiscono le variabili del modello PLI.

Esempio 9.14: modello ILP_{MKP}

Consideriamo $m = 2$ zaini con capacità $c_1 = 10$ e $c_2 = 12$, e un insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ di 5 oggetti ($n = 5$), con i seguenti profitti e pesi:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$
p_j	6	8	5	7	9
w_j	4	6	5	3	7

Questa è l'istanza del MKP dell'Esempio 2.6. Il modello ha 10 variabili, quindi scriviamo un vincolo per riga. Il modello ILP_{MKP} per questa istanza è:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 6x_{11} + 8x_{21} + 5x_{31} + 7x_{41} + 9x_{51} \\
 & + 6x_{12} + 8x_{22} + 5x_{32} + 7x_{42} + 9x_{52} \\
 \text{soggetto a} \quad & 4x_{11} + 6x_{21} + 5x_{31} + 3x_{41} + 7x_{51} \leq 10 \\
 & 4x_{12} + 6x_{22} + 5x_{32} + 3x_{42} + 7x_{52} \leq 12 \\
 & x_{11} + x_{12} \leq 1 \\
 & x_{21} + x_{22} \leq 1 \\
 & x_{31} + x_{32} \leq 1 \\
 & x_{41} + x_{42} \leq 1 \\
 & x_{51} + x_{52} \leq 1 \\
 & x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{41}, x_{51}, x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{42}, x_{52} \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{ILP}_{\text{MKP}})$ è:

$$\tilde{x}_{11} = \tilde{x}_{21} = 1, \quad \tilde{x}_{42} = \tilde{x}_{52} = 1, \quad \text{e tutte le altre variabili pari a 0.}$$

Il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{MKP}})$ è 30. La soluzione ottima associata del MKP è $(\tilde{S}_1, \tilde{S}_2) = (\{1, 2\}, \{4, 5\})$. La soluzione ottima non è unica: $(\{2, 4\}, \{1, 5\})$ e $(\{4, 5\}, \{1, 2\})$ hanno lo stesso valore.

9.11 Un modello PLI per il problema dello zaino a scelta multipla

Il problema dello zaino a scelta multipla e la sua istanza di riferimento (Esempio 2.7) sono definiti nel [Capitolo 2 «Problemi di zaino», Sezione 2.8](#).

- Introduciamo le seguenti n **variabili binarie**:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto } j \text{ è selezionato nello zaino} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall j \in \mathcal{J}. \quad (9.30)$$

Con queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema dello zaino a scelta multipla (MCKP) è il seguente:

$$\max \sum_{j \in \mathcal{J}} p_j x_j \quad (9.31a)$$

$$\text{soggetto a } \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j x_j \leq c, \quad (9.31b)$$

$$\sum_{j \in \mathcal{J}_h} x_j = 1, \quad \forall h \in \{1, 2, \dots, q\}, \quad (9.31c)$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in \mathcal{J}. \quad (9.31d)$$

Questo modello PLI si chiama modello ILP_{MCKP} .

- Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello ILP_{MCKP} :
 - la funzione obiettivo lineare (9.31a) massimizza il profitto totale degli oggetti selezionati nello zaino;
 - il vincolo (9.31b) garantisce che il peso totale degli oggetti selezionati non superi la capacità dello zaino (un vincolo lineare);
 - i vincoli (9.31c) garantiscono che da ogni classe sia selezionato esattamente un oggetto (q vincoli lineari, uno per ogni classe);
 - infine, i vincoli (9.31d) definiscono le variabili del modello PLI.

Esempio 9.15: modello ILP_{MCKP}

Consideriamo uno zaino di capacità $c = 15$ e un insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ di 6 oggetti ($n = 6$), partizionato in $q = 3$ classi $\mathcal{J}_1 = \{1, 2\}$, $\mathcal{J}_2 = \{3, 4\}$ e $\mathcal{J}_3 = \{5, 6\}$, con i seguenti profitti e pesi:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$
p_j	6	8	5	7	4	9
w_j	4	6	5	8	3	7

Questa è l'istanza del MCKP dell'Esempio 2.7. Il modello ILP_{MCKP} per questa istanza è:

$$\begin{array}{llllllllll}
 \max & 6 & x_1 & + & 8 & x_2 & + & 5 & x_3 & + & 7 & x_4 & + & 4 & x_5 & + & 9 & x_6 \\
 \text{soggetto a} & 4 & x_1 & + & 6 & x_2 & + & 5 & x_3 & + & 8 & x_4 & + & 3 & x_5 & + & 7 & x_6 & \leq & 15 \\
 & & x_1 & & + & x_2 & & & & & & & & & & & & = & 1 \\
 & & & & & & & & x_3 & & + & x_4 & & & & & & = & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & x_5 & & + & x_6 & = & 1 \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6 & \in & \{0, 1\}
 \end{array}$$

Una soluzione ottima $\tilde{x}(\text{ILP}_{\text{MCKP}})$ è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 0, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 1, \quad \tilde{x}_5 = 1, \quad \tilde{x}_6 = 0$$

Il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{MCKP}})$ è 17. La soluzione ottima associata del MCKP è $\tilde{S} = \{1, 4, 5\}$. La soluzione ottima non è unica: il sottoinsieme $\{2, 3, 5\}$ ha lo stesso valore.

9.12 Un modello PLI per il problema dello zaino con setup

Il problema dello zaino con setup e la sua istanza di riferimento (Esempio 2.8) sono definiti nel Capitolo 2 «Problemi di zaino», Sezione 2.9.

- Introduciamo le seguenti n **variabili binarie**:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto } j \text{ è selezionato nello zaino} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall j \in \mathcal{J}. \quad (9.32)$$

- Introduciamo le seguenti q **variabili binarie**:

$$y_h = \begin{cases} 1 & \text{se la classe } h \text{ è attivata (si paga il suo setup)} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall h \in \{1, 2, \dots, q\}. \quad (9.33)$$

Con queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema dello zaino con setup (KPS) è il seguente:

$$\max \sum_{j \in \mathcal{J}} p_j x_j - \sum_{h=1}^q f_h y_h \quad (9.34a)$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j x_j + \sum_{h=1}^q s_h y_h \leq c, \quad (9.34b)$$

$$x_j \leq y_h, \quad \forall h \in \{1, 2, \dots, q\}, \quad \forall j \in \mathcal{J}_h, \quad (9.34c)$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \quad (9.34d)$$

$$y_h \in \{0, 1\}, \quad \forall h \in \{1, 2, \dots, q\}. \quad (9.34e)$$

Questo modello PLI si chiama modello ILP_{KPS} .

- Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello ILP_{KPS} :
 - la funzione obiettivo lineare (9.34a) massimizza il ricavo totale degli oggetti selezionati meno i costi di setup delle classi attivate;
 - il vincolo (9.34b) garantisce che il peso totale degli oggetti selezionati più i pesi di setup delle classi attivate non superi la capacità dello zaino (un vincolo lineare);
 - i vincoli (9.34c) garantiscono che un oggetto si possa selezionare solo se la sua classe è attivata (n vincoli lineari, uno per ogni oggetto);
 - infine, i vincoli (9.34d) e (9.34e) definiscono le variabili del modello PLI.

Esempio 9.16: modello ILP_{KPS}

Consideriamo uno zaino di capacità $c = 20$ e un insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ di 6 oggetti ($n = 6$), partizionato in $q = 2$ classi $\mathcal{J}_1 = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{J}_2 = \{4, 5, 6\}$, con costi di setup $f_1 = 3$, $f_2 = 4$, pesi di setup $s_1 = 2$, $s_2 = 3$, e i seguenti ricavi e pesi:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$
p_j	6	8	5	7	9	4
w_j	4	5	3	6	7	2

Questa è l'istanza del KPS dell'Esempio 2.8. Il modello ILP_{KPS} per questa istanza è:

$$\begin{aligned}
 & \max \quad 6x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 + 4x_6 - 3y_1 - 4y_2 \\
 & \text{soggetto a} \quad 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 2x_6 + 2y_1 + 3y_2 \leq 20 \\
 & \quad x_1 - y_1 \leq 0 \\
 & \quad \quad x_2 - y_1 \leq 0 \\
 & \quad \quad \quad x_3 - y_1 \leq 0 \\
 & \quad \quad \quad \quad x_4 - y_2 \leq 0 \\
 & \quad \quad \quad \quad \quad x_5 - y_2 \leq 0 \\
 & \quad \quad \quad \quad \quad \quad x_6 - y_2 \leq 0 \\
 & \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5, \quad x_6 \in \{0, 1\} \\
 & \quad \quad \quad y_1, \quad y_2 \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{ILP}_{\text{KPS}})$, $\tilde{\mathbf{y}}(\text{ILP}_{\text{KPS}})$ è:

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = \tilde{x}_3 = 1, \quad \tilde{x}_4 = \tilde{x}_5 = 0, \quad \tilde{x}_6 = 1, \quad \tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = 1$$

Il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{KPS}})$ è 16. La soluzione ottima associata del KPS è $\tilde{S} = \{1, 2, 3, 6\}$. La soluzione ottima non è unica: i sottoinsiemi $\{1, 2, 3\}$ e $\{4, 5, 6\}$ hanno lo stesso valore.

9.13 Errori tipici

Attenzione

- **Dimenticare di ordinare gli oggetti.** Le formule (9.13), (9.14) e i bound valgono solo se gli oggetti sono ordinati per efficienza non crescente: con un altro ordine il vettore (9.13) è ammissibile ma non ottimo.
- **Usare $z(\text{LP-0}_{\text{KP}})$ come bound.** Il primo rilassamento non ha limiti superiori sulle variabili, ed è molto più debole: nell'Esempio 9.1 dà 27, contro $\frac{49}{3}$ del secondo rilassamento.
- **Arrotondare quando i profitti non sono interi.** I bound UB_D e UB_{MT} arrotondano per difetto la parte frazionaria: questo è valido solo perché tutti i profitti sono interi.
- **Confondere l'oggetto critico con l'ultimo oggetto selezionato.** L'oggetto critico s è il primo oggetto che non entra: nell'Esempio 9.1 è $s = 3$, mentre gli oggetti 1 e 2 sono selezionati per intero.
- **Supporre che l'ottimo del rilassamento sia unico.** Con oggetti di uguale efficienza il problema LP_{KP} ha altre soluzioni ottime; le formule (9.13) ne danno una.
- **Copiare il modello ILP_{KP} nelle varianti.** Nel BKP e nell'UKP le variabili sono intere, non binarie; nel MCKP i vincoli di classe (9.31c) sono uguaglianze; nel KPS, senza i vincoli (9.34c) il modello seleziona oggetti con $y_h = 0$ e non paga mai un setup.

9.14 In sintesi

In sintesi

- Il modello ILP_{KP} ha una variabile binaria per oggetto, un vincolo di capacità e l'obiettivo di massimizzare il profitto totale.
- Il rilassamento LP_{KP} si risolve ordinando gli oggetti per efficienza non crescente: gli oggetti prima dell'oggetto critico sono selezionati, l'oggetto critico si prende in parte, gli altri si scartano.
- Il duale di LP_{KP} ha la soluzione ottima $\tilde{\pi} = p_s/w_s$, e $z(\text{LP}_{\text{KP}})$ non supera mai il doppio di $z(\text{ILP}_{\text{KP}})$.
- Arrotondando per difetto $z(\text{LP}_{\text{KP}})$ otteniamo il bound di Dantzig; il bound di Martello-Toth considera separatamente l'oggetto critico escluso e incluso.
- Ogni variante del Capitolo 2 «Problemi di zaino» cambia un ingrediente del modello ILP_{KP} : variabili intere (BKP, UKP), un vincolo di capacità per dimensione (MDKP), una variabile per oggetto e zaino (MKP), un'uguaglianza per classe (MCKP), variabili di setup y_h con $x_j \leq y_h$ (KPS); il SSP è il KP con $p_j = w_j$.

Quadro riassuntivo dell'Esempio 9.1. Upper bound su $z(\text{ILP}_{\text{KP}})$ calcolati in questo capitolo:

Bound	Valore	Da
Primo rilassamento	27	$z(\text{LP-0}_{\text{KP}})$, oggetto 1 con $\frac{9}{2}$ copie
Secondo rilassamento	$\frac{49}{3}$	$z(\text{LP}_{\text{KP}})$, oggetto critico $s = 3$
Bound di Dantzig	16	$\lfloor \frac{49}{3} \rfloor$
Bound di Martello-Toth	16	$\max\{16, 15\}$
Valore ottimo	15	soluzione $\{1, 4\}$ del modello ILP_{KP}

Il gap fra il miglior upper bound (16) e il valore ottimo (15) si chiude con gli algoritmi esatti dei capitoli successivi.

Formulazioni dei problemi di packing

Prerequisiti

- Dal modulo *Programmazione lineare*, [Capitolo 9 «Teoria della dualità»](#): il duale di un problema LP, dualità debole e forte.
- Dal modulo *Programmazione lineare intera*, [Capitolo 1 «Programmazione lineare intera»](#) e [Capitolo 2 «Bound primali e duali»](#): problemi PLI, rilassamenti lineari e bound.
- Da questo modulo, [Capitolo 3 «Problemi di packing»](#): il problema e le sue ipotesi.

Obiettivi

Al termine di questo capitolo saremo in grado di:

- scrivere il modello PLI del problema del bin packing e spiegare il legame fra le variabili di assegnamento e le variabili di attivazione;
- scrivere i due rilassamenti lineari e i loro duali, e dimostrare che il loro valore ottimo è $\sum_j w_j/c$;
- arrotondare per eccesso il bound del rilassamento per ottenere un lower bound sul numero di contenitori;
- dimostrare che il bound del rilassamento è almeno la metà del valore ottimo, e che il fattore è tight;
- scrivere il modello PLI del problema del cutting stock, con variabili intere per le copie degli oggetti.

10.1 Panoramica della famiglia

- I modelli PLI dei problemi di packing usano un upper bound m sul numero di contenitori e l'insieme $\mathcal{B} = \{1, 2, \dots, m\}$ dei contenitori che si possono usare.
- Le **variabili di assegnamento** x_{jb} mettono gli oggetti $j \in \mathcal{I}$ nei contenitori $b \in \mathcal{B}$, e le **variabili di attivazione** binarie y_b dicono se il contenitore b è usato.
- Ogni contenitore dà un vincolo di capacità, che collega anche i due tipi di variabili, e la funzione obiettivo minimizza il numero $\sum_{b \in \mathcal{B}} y_b$ di contenitori usati.

I modelli di packing sono **modelli di assegnamento**: ogni oggetto, o ogni copia di un oggetto, è assegnato a un contenitore usato, e gli oggetti assegnati a un contenitore ne rispettano la capacità. I membri della famiglia cambiano il dominio delle variabili di assegnamento.

- La tabella elenca i membri della famiglia, con il nome del loro modello PLI e la sezione che lo scrive.

Problema	Modello	Variabili di assegnamento	Sezione
BPP	ILP _{BPP}	binarie x_{jb}	10.2
CSP	ILP _{CSP}	intere x_{jb} , le copie dell'oggetto j nel contenitore b	10.5

10.2 Un modello PLI per il problema del bin packing

Il problema di questa sezione è il problema del bin packing (BPP), definito nel [Capitolo 3](#) «Problemi di packing».

- Dato un upper bound $m \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ sul numero di contenitori usati in una qualunque soluzione ottima del BPP, introduciamo le seguenti mn **variabili binarie**:

$$x_{jb} = \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto } j \text{ è inserito nel contenitore } b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\forall j \in \underbrace{\{1, 2, \dots, n\}}_{=\mathcal{I}}, \quad \forall b \in \underbrace{\{1, 2, \dots, m\}}_{=\mathcal{B}},$$

e le seguenti m **variabili binarie**:

$$y_b = \begin{cases} 1 & \text{se il contenitore } b \text{ è usato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall b \in \underbrace{\{1, 2, \dots, m\}}_{=\mathcal{B}}.$$

Il numero n di oggetti è un upper bound valido sul numero minimo di contenitori necessari per inserire tutti gli oggetti poiché, nel caso peggiore, ogni oggetto è inserito in un contenitore diverso. Anche il numero di contenitori usati in una qualunque soluzione ammissibile del BPP è un upper bound valido.

Con queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema del bin packing (BPP) è il seguente:

$$\min \sum_{b \in \mathcal{B}} y_b \quad (10.1a)$$

$$\text{soggetto a } \sum_{b \in \mathcal{B}} x_{jb} = 1, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \quad (10.1b)$$

$$-\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j x_{jb} + c y_b \geq 0, \quad \forall b \in \mathcal{B}, \quad (10.1c)$$

$$x_{jb} \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \forall b \in \mathcal{B}, \quad (10.1d)$$

$$y_b \in \{0, 1\}, \quad \forall b \in \mathcal{B}. \quad (10.1e)$$

Questo modello PLI si chiama modello ILP_{BPP}.

- Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello ILP_{BPP}:
 - la funzione obiettivo lineare (10.1a) minimizza il numero totale di contenitori usati;
 - i vincoli (10.1b) garantiscono che ogni oggetto sia inserito in esattamente un contenitore, così che tutti gli oggetti siano inseriti (n vincoli lineari);
 - i vincoli (10.1c) collegano le variabili di assegnamento alle variabili di attivazione e impongono i limiti di capacità: se il contenitore b è usato, il peso dei suoi oggetti è al più c ; se non è usato, non contiene oggetti (m vincoli lineari);
 - infine, i vincoli (10.1d) e (10.1e) definiscono le variabili del modello PLI.

Spiegazione del legame fra le variabili

- **Se almeno un oggetto è inserito nel contenitore b , allora il contenitore è usato.** L'implicazione logica è

$$(x_{1b} \text{ OR } x_{2b} \text{ OR } \dots \text{ OR } x_{nb}) \implies y_b.$$

Poiché $w_j > 0$, inserire un oggetto nel contenitore b dà $\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j x_{jb} > 0$, e il vincolo $\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j x_{jb} \leq c y_b$ impone $y_b = 1$.

- **Se il contenitore b non è usato, allora è vuoto.** È la contronominale dell'implicazione precedente. Per $y_b = 0$ il vincolo diventa $\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j x_{jb} \leq 0$, e poiché $w_j > 0$ otteniamo $x_{jb} = 0$ per ogni oggetto j .
- **Se il contenitore b è usato, allora contiene almeno un oggetto, ma solo in una soluzione ottima.** I vincoli non lo impongono. Tuttavia, se $x_{jb} = 0$ per ogni j e $y_b = 1$, porre $y_b = 0$ mantiene soddisfatti tutti i vincoli e diminuisce di uno il valore obiettivo. Quindi, in ogni soluzione ottima, i contenitori vuoti non sono contati come usati.

Esempio 10.1: modello ILP_{BPP}

Consideriamo un contenitore di capacità $c = 10$ e un insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, 3\}$ di 3 oggetti ($n = 3$), con i seguenti pesi degli oggetti:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
w_j	7	6	3

Chiamiamo questa istanza del BPP [Esempio 10.1](#).

Il modello ILP_{BPP} con $m = 3$ per questa istanza del BPP è:

$$\begin{aligned}
 & \min && y_1 & + & y_2 & + & y_3 \\
 \text{soggetto a} & & x_{11} & + & x_{12} & + & x_{13} & & & = & 1 \\
 & & & & x_{21} & + & x_{22} & + & x_{23} & & = & 1 \\
 & & & & & & & & x_{31} & + & x_{32} & + & x_{33} & & = & 1 \\
 & & - & 7x_{11} & & - & 6x_{21} & & - & 3x_{31} & & + & 10y_1 & & \geq & 0 \\
 & & & & - & 7x_{12} & & - & 6x_{22} & & - & 3x_{32} & & + & 10y_2 & \geq & 0 \\
 & & & & & & - & 7x_{13} & & - & 6x_{23} & & - & 3x_{33} & & + & 10y_3 & \geq & 0 \\
 & & x_{11}, & x_{12}, & x_{13}, & x_{21}, & x_{22}, & x_{23}, & x_{31}, & x_{32}, & x_{33}, & y_1, & y_2, & y_3 & \in & \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}$ (ILP_{BPP}) è:

$$\tilde{x}_{11} = \tilde{x}_{31} = 1, \quad \tilde{x}_{12} = \tilde{x}_{13} = \tilde{x}_{21} = 0, \quad \tilde{x}_{22} = 1, \quad \tilde{x}_{23} = \tilde{x}_{32} = \tilde{x}_{33} = 0, \quad \tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = 1, \quad \tilde{y}_3 = 0$$

Un'altra soluzione ottima, ottenuta permutando gli indici dei contenitori 1 e 2, è:

$$\tilde{x}_{12} = \tilde{x}_{32} = 1, \quad \tilde{x}_{11} = \tilde{x}_{13} = \tilde{x}_{22} = 0, \quad \tilde{x}_{21} = 1, \quad \tilde{x}_{23} = \tilde{x}_{31} = \tilde{x}_{33} = 0, \quad \tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = 1, \quad \tilde{y}_3 = 0.$$

Il valore ottimo è:

$$z(\text{ILP}_{\text{BPP}}) = 2$$

La soluzione ottima associata del BPP è data dagli schemi di riempimento

$$\tilde{P}_1 = \{1, 3\} \quad \text{e} \quad \tilde{P}_2 = \{2\}$$

La soluzione ottima non è unica: anche gli schemi di riempimento $\{1\}$ e $\{2, 3\}$ usano due contenitori.

10.3 Un primo rilassamento lineare

Per ottenere un rilassamento lineare del modello ILP_{BPP} , rilassiamo i vincoli (10.1d) e (10.1e) con i seguenti:

$$x_{jb} \geq 0, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \forall b \in \mathcal{B}, \quad (10.2a)$$

$$y_b \geq 0, \quad \forall b \in \mathcal{B}. \quad (10.2b)$$

Questo modello PL si chiama modello LP-0_{BPP} .

Esempio 10.2: modello LP-0_{BPP}

Il modello LP-0_{BPP} per l'istanza del BPP dell'Esempio 10.1 è:

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + y_2 + y_3 \\ \text{soggetto a} \quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1 \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1 \\ & x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1 \\ & -7x_{11} - 6x_{21} - 3x_{31} + 10y_1 \geq 0 \\ & -7x_{12} - 6x_{22} - 3x_{32} + 10y_2 \geq 0 \\ & -7x_{13} - 6x_{23} - 3x_{33} + 10y_3 \geq 0 \\ & x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{LP-0}_{\text{BPP}})$ è:

$$\tilde{x}_{11} = \tilde{x}_{12} = \tilde{x}_{13} = \tilde{x}_{21} = \tilde{x}_{22} = \tilde{x}_{23} = \tilde{x}_{31} = \tilde{x}_{32} = \tilde{x}_{33} = \frac{1}{3}, \quad \tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = \tilde{y}_3 = \frac{8}{15}$$

Il valore ottimo $z(\text{LP-0}_{\text{BPP}})$ è $\frac{8}{5}$.

Di conseguenza, abbiamo il lower bound:

$$\frac{8}{5} \leq z(\text{ILP}_{\text{BPP}})$$

e, poiché $z(\text{ILP}_{\text{BPP}})$ è intero, $z(\text{ILP}_{\text{BPP}}) \geq \lceil \frac{8}{5} \rceil = 2$.

Con

- una variabile duale libera μ_j per ogni vincolo (10.1b) ($j \in \mathcal{J}$)
- una variabile duale non negativa π_b per ogni vincolo (10.1c) ($b \in \mathcal{B}$)

il modello duale del modello LP-0_{BPP} è il seguente:

$$\max \sum_{j \in \mathcal{J}} \mu_j \quad (10.3a)$$

$$\text{soggetto a } \mu_j - w_j \pi_b \leq 0, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \forall b \in \mathcal{B}, \quad (10.3b)$$

$$c \pi_b \leq 1, \quad \forall b \in \mathcal{B}, \quad (10.3c)$$

$$\mu_j \geq 0, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \quad (10.3d)$$

$$\pi_b \geq 0, \quad \forall b \in \mathcal{B}. \quad (10.3e)$$

Questo modello PL si chiama modello duale $D(\text{LP-0}_{\text{BPP}})$.

Esempio 10.3: modello $D(\text{LP-0}_{\text{BPP}})$

Il modello duale $D(\text{LP-0}_{\text{BPP}})$ per l'istanza del BPP dell'Esempio 10.1 è:

max	μ_1	+ μ_2	+ μ_3				
soggetto a	μ_1			- $7\pi_1$			≤ 0
	μ_1				- $7\pi_2$		≤ 0
	μ_1					- $7\pi_3$	≤ 0
		μ_2		- $6\pi_1$			≤ 0
		μ_2			- $6\pi_2$		≤ 0
		μ_2				- $6\pi_3$	≤ 0
			μ_3	- $3\pi_1$			≤ 0
			μ_3		- $3\pi_2$		≤ 0
			μ_3			- $3\pi_3$	≤ 0
				$10\pi_1$			≤ 1
					$10\pi_2$		≤ 1
						$10\pi_3$	≤ 1
	$\mu_1,$	$\mu_2,$	μ_3				≥ 0
				$\pi_1,$	$\pi_2,$	π_3	≥ 0

Una soluzione ottima $(\tilde{\mu}, \tilde{\pi})$ di $D(\text{LP-0}_{\text{BPP}})$ è:

$$\tilde{\mu}_1 = \frac{7}{10}, \quad \tilde{\mu}_2 = \frac{3}{5}, \quad \tilde{\mu}_3 = \frac{3}{10}, \quad \tilde{\pi}_1 = \tilde{\pi}_2 = \tilde{\pi}_3 = \frac{1}{10}$$

Il valore ottimo $z(D(\text{LP-0}_{\text{BPP}}))$ è $\frac{8}{5}$.

Proposizione 10.1

Una soluzione ottima del modello primale $LP-0_{BPP}$ è:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{jb} &= \frac{1}{m}, & \forall j \in \mathcal{J}, \forall b \in \mathcal{B}, \\ \tilde{y}_b &= \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j}{m c}, & \forall b \in \mathcal{B},\end{aligned}\tag{10.4}$$

e una soluzione ottima del modello duale $D(LP-0_{BPP})$ è:

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_j &= \frac{w_j}{c}, & \forall j \in \mathcal{J}, \\ \tilde{\pi}_b &= \frac{1}{c}, & \forall b \in \mathcal{B}.\end{aligned}\tag{10.5}$$

Corollario 10.2

Il valore ottimo dei modelli primale $LP-0_{BPP}$ e duale $D(LP-0_{BPP})$ è:

$$z(LP-0_{BPP}) = \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j}{c} = z(D(LP-0_{BPP}))\tag{10.6}$$

- La dimostrazione procede in tre passi:
 1. mostriamo che (10.4) è una soluzione ammissibile del modello primale $LP-0_{BPP}$;
 2. mostriamo che (10.5) è una soluzione ammissibile del modello duale $D(LP-0_{BPP})$;
 3. mostriamo che le due soluzioni ammissibili hanno lo stesso valore della funzione obiettivo.

Quindi, per la dualità debole della PL, (10.4) e (10.5) sono una coppia di soluzioni ottime primale e duale.

Dimostrazione.

1. Per ogni $j \in \mathcal{J}$, abbiamo:

$$\sum_{b \in \mathcal{B}} \tilde{x}_{jb} = \sum_{b \in \mathcal{B}} \frac{1}{m} = \frac{m}{m} = 1$$

quindi i vincoli (10.1b) sono soddisfatti.

Per ogni $b \in \mathcal{B}$, abbiamo:

$$-\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j \tilde{x}_{jb} + c \tilde{y}_b = -\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j \frac{1}{m} + c \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j}{m c} = 0$$

quindi i vincoli (10.1c) sono soddisfatti.

Abbiamo $\tilde{x}_{jb} \geq 0$ e $\tilde{y}_b \geq 0$, per ogni $j \in \mathcal{J}$ e ogni $b \in \mathcal{B}$, quindi i vincoli (10.2a) e (10.2b) sono soddisfatti.

Quindi (10.4) fornisce una soluzione ammissibile del modello primale LP-0_{BPP}.

2. Per ogni $b \in \mathcal{B}$ e ogni $j \in \mathcal{J}$, abbiamo:

$$\tilde{\mu}_j - w_j \tilde{\pi}_b = \frac{w_j}{c} - \frac{w_j}{c} = 0$$

quindi i vincoli (10.3b) sono soddisfatti.

Per ogni $b \in \mathcal{B}$, abbiamo:

$$c \tilde{\pi}_b = \frac{c}{c} = 1$$

quindi i vincoli (10.3c) sono soddisfatti.

Abbiamo $\tilde{\mu}_j \geq 0$ e $\tilde{\pi}_b \geq 0$, per ogni $b \in \mathcal{B}$ e ogni $j \in \mathcal{J}$, quindi i vincoli (10.3d) e (10.3e) sono soddisfatti.

Quindi (10.5) fornisce una soluzione ammissibile del modello duale $D(\text{LP-0}_{\text{BPP}})$.

3. Per le funzioni obiettivo abbiamo:

$$\sum_{b \in \mathcal{B}} \tilde{y}_b = \sum_{b \in \mathcal{B}} \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j}{m c} = \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j}{c} = \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{\mu}_j$$

quindi i valori delle funzioni obiettivo primale e duale coincidono.

Quindi, per la dualità debole della PL, (10.4) e (10.5) sono una coppia di soluzioni ottime primale e duale.

□

- Riportiamo una dimostrazione alternativa, che non usa la formulazione duale ma ragiona direttamente sul valore minimo della funzione obiettivo imposto dai vincoli.

Proposizione 10.3

Una soluzione ottima del modello primale LP-0_{BPP} è:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{jb} &= \frac{1}{m}, & \forall j \in \mathcal{J}, \forall b \in \mathcal{B}, \\ \tilde{y}_b &= \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j}{m c}, & \forall b \in \mathcal{B}, \end{aligned} \tag{10.7}$$

e il valore ottimo è

$$z(\text{LP-0}_{\text{BPP}}) = \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j}{c}. \tag{10.8}$$

Dimostrazione. Sommando i vincoli di capacità (10.1c) su tutti i $b \in \mathcal{B}$ otteniamo

$$c \sum_{b \in \mathcal{B}} y_b \geq \sum_{b \in \mathcal{B}} \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j x_{jb} = \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j \underbrace{\sum_{b \in \mathcal{B}} x_{jb}}_{\text{per (10.1b)=1}} = \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j,$$

quindi

$$\sum_{b \in \mathcal{B}} y_b \geq \frac{1}{c} \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j. \quad (10.9)$$

Quindi ogni soluzione ammissibile di LP-0_{BPP} soddisfa (10.9).

Consideriamo ora il punto definito in (10.7). Per ogni $j \in \mathcal{J}$, abbiamo

$$\sum_{b \in \mathcal{B}} \tilde{x}_{jb} = m \frac{1}{m} = 1,$$

quindi i vincoli (10.1b) valgono. Inoltre, per ogni $b \in \mathcal{B}$, abbiamo

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j \tilde{x}_{jb} = \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j \frac{1}{m} = \frac{1}{m} \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j = c \tilde{y}_b,$$

quindi i vincoli (10.1c) valgono all'uguaglianza. Infine, i vincoli (10.2a) e (10.2b) sono soddisfatti per costruzione. Quindi il punto definito in (10.7) è una soluzione ammissibile di LP-0_{BPP} .

Il valore obiettivo di (10.7) è

$$\sum_{b \in \mathcal{B}} \tilde{y}_b = m \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j}{m c} = \frac{1}{c} \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j,$$

che coincide con il lower bound (10.9). Quindi il punto (10.7) è una soluzione ottima con valore obiettivo (10.8). $\square$

10.4 Un secondo rilassamento lineare

Per ottenere un rilassamento lineare del modello ILP_{BPP} , rilassiamo i vincoli (10.1d) e (10.1e) con i seguenti:

$$x_{jb} \geq 0, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \forall b \in \mathcal{B}, \quad (10.10a)$$

$$y_b \leq 1, \quad \forall b \in \mathcal{B}, \quad (10.10b)$$

$$y_b \geq 0, \quad \forall b \in \mathcal{B}. \quad (10.10c)$$

Questo modello PL si chiama modello LP_{BPP} .

Esempio 10.4: modello LP_{BPP}

Il modello LP_{BPP} per l'istanza del BPP dell'Esempio 10.1 è:

$$\begin{array}{llllll}
 \min & & & & y_1 & + y_2 & + y_3 \\
 \text{soggetto a} & x_{11} & + x_{12} & + x_{13} & & & = 1 \\
 & & & & x_{21} & + x_{22} & + x_{23} & = 1 \\
 & & & & & & & x_{31} & + x_{32} & + x_{33} & = 1 \\
 & - 7x_{11} & & - 6x_{21} & & - 3x_{31} & & + 10y_1 & & \geq 0 \\
 & & - 7x_{12} & & - 6x_{22} & & - 3x_{32} & & + 10y_2 & \geq 0 \\
 & & & - 7x_{13} & & - 6x_{23} & & - 3x_{33} & & + 10y_3 \geq 0 \\
 & & & & & & & y_1 & & \leq 1 \\
 & & & & & & & & y_2 & \leq 1 \\
 & & & & & & & & & y_3 \leq 1 \\
 & x_{11}, & x_{12}, & x_{13}, & x_{21}, & x_{22}, & x_{23}, & x_{31}, & x_{32}, & x_{33}, & y_1, & y_2, & y_3 \geq 0
 \end{array}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{LP}_{\text{BPP}})$ è:

$$\tilde{x}_{11} = \tilde{x}_{12} = \tilde{x}_{13} = \tilde{x}_{21} = \tilde{x}_{22} = \tilde{x}_{23} = \tilde{x}_{31} = \tilde{x}_{32} = \tilde{x}_{33} = \frac{1}{3}, \quad \tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = \tilde{y}_3 = \frac{8}{15}$$

Il valore ottimo $z(\text{LP}_{\text{BPP}})$ è $\frac{8}{5}$. Di conseguenza, abbiamo lo stesso lower bound di prima.

Con

- una variabile duale libera μ_j per ogni vincolo (10.1b) ($j \in \mathcal{J}$)
- una variabile duale non negativa π_b per ogni vincolo (10.1c) ($b \in \mathcal{B}$)
- una variabile duale non positiva λ_b per ogni vincolo (10.10b) ($b \in \mathcal{B}$)

il modello duale del modello LP_{BPP} è il seguente:

$$\max \sum_{j \in \mathcal{J}} \mu_j + \sum_{b \in \mathcal{B}} \lambda_b \quad (10.11a)$$

$$\text{soggetto a} \quad \mu_j - w_j \pi_b \leq 0, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \forall b \in \mathcal{B}, \quad (10.11b)$$

$$c \pi_b + \lambda_b \leq 1, \quad \forall b \in \mathcal{B}, \quad (10.11c)$$

$$\mu_j \geq 0, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \quad (10.11d)$$

$$\pi_b \geq 0, \quad \forall b \in \mathcal{B}, \quad (10.11e)$$

$$\lambda_b \leq 0, \quad \forall b \in \mathcal{B}. \quad (10.11f)$$

Questo modello PL si chiama modello duale $D(LP_{BPP})$.

Esempio 10.5: modello $D(LP_{BPP})$

Il modello $D(LP_{BPP})$ dell'Esempio 10.1 è:

$$\begin{array}{llllllll}
 \max & \mu_1 & + \mu_2 & + \mu_3 & & + \lambda_1 & + \lambda_2 & + \lambda_3 \\
 \text{soggetto a} & \mu_1 & & & - 7\pi_1 & & & \leq 0 \\
 & \mu_1 & & & - 7\pi_2 & & & \leq 0 \\
 & \mu_1 & & & & - 7\pi_3 & & \leq 0 \\
 & & \mu_2 & & - 6\pi_1 & & & \leq 0 \\
 & & \mu_2 & & & - 6\pi_2 & & \leq 0 \\
 & & \mu_2 & & & & - 6\pi_3 & \leq 0 \\
 & & & \mu_3 & - 3\pi_1 & & & \leq 0 \\
 & & & \mu_3 & & - 3\pi_2 & & \leq 0 \\
 & & & \mu_3 & & & - 3\pi_3 & \leq 0 \\
 & & & & 10\pi_1 & & + \lambda_1 & \leq 1 \\
 & & & & & 10\pi_2 & & + \lambda_2 \leq 1 \\
 & & & & & & 10\pi_3 & + \lambda_3 \leq 1 \\
 & \mu_1, & \mu_2, & \mu_3 & & & & \geq 0 \\
 & & & & \pi_1, & \pi_2, & \pi_3 & \geq 0 \\
 & & & & & & & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 0
 \end{array}$$

Il valore ottimo $z(D(LP_{BPP}))$ è $\frac{8}{5}$. Una soluzione ottima $(\tilde{\mu}, \tilde{\pi}, \tilde{\lambda})$ di $D(LP_{BPP})$ è:

$$\tilde{\mu}_1 = \frac{7}{10}, \quad \tilde{\mu}_2 = \frac{3}{5}, \quad \tilde{\mu}_3 = \frac{3}{10}, \quad \tilde{\pi}_1 = \tilde{\pi}_2 = \tilde{\pi}_3 = \frac{1}{10}, \quad \tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2 = \tilde{\lambda}_3 = 0$$

- I vincoli:

$$x_{jb} \leq 1, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \forall b \in \mathcal{B},$$

sono anch'essi validi poiché, per ogni $j \in \mathcal{J}$ e ogni $b \in \mathcal{B}$, abbiamo:

$$x_{jb} \in \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad x_{jb} \leq 1$$

ma sono implicati dai vincoli (10.1b).

Proposizione 10.4

Una soluzione ottima del modello primale LP_{BPP} è:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{jb} &= \frac{1}{m}, & \forall j \in \mathcal{J}, \forall b \in \mathcal{B}, \\ \tilde{y}_b &= \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j}{m c}, & \forall b \in \mathcal{B},\end{aligned}\tag{10.12}$$

e una soluzione ottima del modello duale $D(LP_{BPP})$ è:

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_j &= \frac{w_j}{c}, & \forall j \in \mathcal{J}, \\ \tilde{\pi}_b &= \frac{1}{c}, & \forall b \in \mathcal{B}, \\ \tilde{\lambda}_b &= 0, & \forall b \in \mathcal{B}.\end{aligned}\tag{10.13}$$

Corollario 10.5

Il valore ottimo dei modelli primale LP_{BPP} e duale $D(LP_{BPP})$ è:

$$z(LP_{BPP}) = \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j}{c} = z(D(LP_{BPP}))\tag{10.14}$$

Dimostrazione. La dimostrazione è simile alla precedente. In più, occorre osservare che

$$\tilde{y}_b = \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j}{m c} \leq 1, \quad \forall b \in \mathcal{B},$$

poiché $\sum_j w_j/c \leq z(ILP_{BPP}) \leq m$, dove l'ultima disuguaglianza vale perché m è un upper bound sul numero di contenitori in una qualunque soluzione ottima del BPP. Di conseguenza, anche i vincoli (10.10b) sono soddisfatti. □

10.4.1 Alcune proprietà teoriche importanti

- Le due proposizioni seguenti mostrano che il rapporto fra $z(\text{LP}_{\text{BPP}})$ e $z(\text{ILP}_{\text{BPP}})$ è almeno un mezzo per ogni istanza del BPP (**per ipotesi** $z(\text{ILP}_{\text{BPP}}) > 1$, poiché gli oggetti non entrano tutti in un solo contenitore). Inoltre, esistono istanze per cui il valore un mezzo si raggiunge asintoticamente quando la capacità $c \rightarrow +\infty$.

Proposizione 10.6

Per ogni istanza del BPP abbiamo:

$$\frac{z(\text{LP}_{\text{BPP}})}{z(\text{ILP}_{\text{BPP}})} \geq \frac{1}{2} \quad (10.15)$$

Dimostrazione. Consideriamo una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{ILP}_{\text{BPP}})$ di valore $z = z(\text{ILP}_{\text{BPP}})$ (numero di contenitori usati). Possiamo supporre, senza perdita di generalità, che i contenitori $1, 2, \dots, z$ siano quelli non vuoti.

In una soluzione ottima, due contenitori non possono avere entrambi peso totale degli oggetti al più $c/2$, altrimenti il loro contenuto si potrebbe unire in un solo contenitore senza superare la capacità c (contro l'ottimalità).

Se tutti i contenitori non vuoti hanno peso totale degli oggetti maggiore di $c/2$, allora

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j = \sum_{b=1}^z \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j \tilde{x}_{jb} > z \frac{c}{2} \implies \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j}{z} > \frac{1}{2} \implies \frac{z(\text{LP}_{\text{BPP}})}{z(\text{ILP}_{\text{BPP}})} \geq \frac{1}{2}.$$

Altrimenti, supponiamo che esista un contenitore con peso totale degli oggetti al più $c/2$. Rinumerando i contenitori se necessario, sia il contenitore z , così che

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j \tilde{x}_{jz} \leq \frac{c}{2}.$$

Poiché $z > 1$, esiste un altro contenitore, diciamo il contenitore 1; per l'ottimalità, deve valere

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j \tilde{x}_{j1} + \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j \tilde{x}_{jz} > c,$$

e, per l'ottimalità, ogni contenitore in $\{2, 3, \dots, z-1\}$ ha peso totale degli oggetti $> c/2$. Quindi,

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j &= \sum_{b=1}^z \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j \tilde{x}_{jb} = \underbrace{\sum_{b=2}^{z-1} \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j \tilde{x}_{jb}}_{\geq \frac{c}{2}(z-2)} + \underbrace{\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j \tilde{x}_{j1} + \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j \tilde{x}_{jz}}_{> c} \\ &> \frac{c}{2}(z-2) + c = z \frac{c}{2} \implies \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j}{z} > \frac{1}{2} \implies \frac{z(\text{LP}_{\text{BPP}})}{z(\text{ILP}_{\text{BPP}})} \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

Proposizione 10.7

Esistono istanze del BPP tali che:

$$\frac{z(\text{LP}_{\text{BPP}})}{z(\text{ILP}_{\text{BPP}})} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{per} \quad c \rightarrow +\infty \quad (10.16)$$

Dimostrazione. Dato $\vartheta \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, consideriamo l'istanza del BPP con capacità dei contenitori $c = 2\vartheta$ e n oggetti con i seguenti pesi:

$$w_j = \vartheta + 1, \quad \forall j \in \mathcal{J}.$$

Nessun contenitore può contenere più di un oggetto, quindi ogni oggetto va inserito da solo nel proprio contenitore. Quindi il valore ottimo del BPP è

$$z(\text{ILP}_{\text{BPP}}) = n.$$

Per il rilassamento lineare abbiamo:

$$z(\text{LP}_{\text{BPP}}) = \frac{n(\vartheta + 1)}{2\vartheta}.$$

Ne segue che:

$$\lim_{\vartheta \rightarrow +\infty} \frac{z(\text{LP}_{\text{BPP}})}{z(\text{ILP}_{\text{BPP}})} = \lim_{\vartheta \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n(\vartheta+1)}{2\vartheta}}{n} = \lim_{\vartheta \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2\vartheta}}_{\rightarrow 0} \right) = \frac{1}{2}.$$

Di conseguenza, concludiamo che:

$$\frac{z(\text{LP}_{\text{BPP}})}{z(\text{ILP}_{\text{BPP}})} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{per} \quad c \rightarrow +\infty.$$

□

- Le due proposizioni seguenti mostrano che il rapporto fra $\lceil z(\text{LP}_{\text{BPP}}) \rceil$ e $z(\text{ILP}_{\text{BPP}})$ è almeno un mezzo per ogni istanza del BPP. Inoltre, esistono istanze per cui il valore un mezzo si raggiunge asintoticamente quando il numero di oggetti $n \rightarrow +\infty$.

Proposizione 10.8

Per ogni istanza del BPP abbiamo:

$$\frac{\lceil z(\text{LP}_{\text{BPP}}) \rceil}{z(\text{ILP}_{\text{BPP}})} \geq \frac{1}{2} \quad (10.17)$$

Dimostrazione. Consideriamo una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{ILP}_{\text{BPP}})$ di valore $z = z(\text{ILP}_{\text{BPP}})$ (numero di contenitori usati). Possiamo supporre, senza perdita di generalità, che i

contenitori $1, 2, \dots, z$ siano quelli non vuoti.

In una soluzione ottima, due contenitori non possono avere entrambi peso totale degli oggetti al più $c/2$, altrimenti il loro contenuto si potrebbe unire in un solo contenitore senza superare la capacità c (contro l'ottimalità).

Se tutti i contenitori non vuoti hanno peso totale degli oggetti maggiore di $c/2$, allora

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j &= \sum_{b=1}^z \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j \tilde{x}_{jb} > \frac{zc}{2} \implies \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j}{c} > \frac{z}{2} \implies \left\lceil \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j}{c} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{z}{2} \right\rceil \geq \frac{z}{2} \\ \implies \frac{\left\lceil \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j}{c} \right\rceil}{z} &\geq \frac{1}{2} \implies \frac{[z(\text{LP}_{\text{BPP}})]}{z(\text{ILP}_{\text{BPP}})} \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Altrimenti, supponiamo che esista un contenitore con peso totale degli oggetti al più $c/2$. Rinumerando i contenitori se necessario, sia il contenitore z . Allora abbiamo:

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j = \sum_{b=1}^z \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j \tilde{x}_{jb} > \sum_{b=1}^{z-1} \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j \tilde{x}_{jb} > (z-1) \frac{c}{2} \implies z < 2 \sum_{j \in \mathcal{J}} \frac{w_j}{c} + 1.$$

Poiché z è intero, questo implica:

$$z \leq \left\lceil 2 \sum_{j \in \mathcal{J}} \frac{w_j}{c} \right\rceil \leq 2 \left\lceil \sum_{j \in \mathcal{J}} \frac{w_j}{c} \right\rceil.$$

Quindi:

$$\frac{\left\lceil \sum_{j \in \mathcal{J}} \frac{w_j}{c} \right\rceil}{z} \geq \frac{1}{2} \implies \frac{[z(\text{LP}_{\text{BPP}})]}{z(\text{ILP}_{\text{BPP}})} \geq \frac{1}{2}.$$

□

Proposizione 10.9

Esistono istanze del BPP tali che:

$$\frac{[z(\text{LP}_{\text{BPP}})]}{z(\text{ILP}_{\text{BPP}})} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{per} \quad n \rightarrow +\infty \quad (10.18)$$

Dimostrazione. Dato $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ (con n pari), consideriamo l'istanza del BPP con capacità dei contenitori $c = n$ e n oggetti con i seguenti pesi:

$$w_j = \frac{c}{2} + 1 = \frac{n}{2} + 1, \quad \forall j \in \mathcal{J}.$$

Nessun contenitore può contenere più di un oggetto, poiché $w_j > c/2$ per ogni j . Quindi ogni oggetto va inserito da solo nel proprio contenitore, e il valore ottimo del BPP è

$$z(\text{ILP}_{\text{BPP}}) = n.$$

Per il rilassamento lineare abbiamo:

$$z(\text{LP}_{\text{BPP}}) = \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j}{c} = \frac{n \left(\frac{n}{2} + 1 \right)}{n} = \frac{n}{2} + 1,$$

quindi $\lceil z(\text{LP}_{\text{BPP}}) \rceil = \frac{n}{2} + 1$ (poiché n è pari). Ne segue che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lceil z(\text{LP}_{\text{BPP}}) \rceil}{z(\text{ILP}_{\text{BPP}})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n}{2} + 1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\rightarrow 0} \right) = \frac{1}{2}.$$

Di conseguenza, concludiamo che:

$$\frac{\lceil z(\text{LP}_{\text{BPP}}) \rceil}{z(\text{ILP}_{\text{BPP}})} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{per} \quad n \rightarrow +\infty.$$

□

10.5 Un modello PLI per il problema del cutting stock

Il problema di questa sezione è il problema del cutting stock (CSP), definito nel [Capitolo 3](#) «Problemi di packing», con la sua istanza di riferimento.

- Dato un upper bound $m \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ sul numero di contenitori usati in una qualunque soluzione ottima del CSP, introduciamo le seguenti mn **variabili intere**:

x_{jb} = numero di copie dell'oggetto j inserite nel contenitore b

$$\forall j \in \mathcal{J}, \quad \forall b \in \underbrace{\{1, 2, \dots, m\}}_{=\mathcal{B}},$$

e le seguenti m **variabili binarie**:

$$y_b = \begin{cases} 1 & \text{se il contenitore } b \text{ è usato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall b \in \mathcal{B}.$$

Il numero totale $\sum_{j \in \mathcal{J}} d_j$ di copie è un valore valido di m , e lo è anche il numero di contenitori di una qualunque soluzione ammissibile del CSP.

Con queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema del cutting stock (CSP) è il seguente:

$$\min \sum_{b \in \mathcal{B}} y_b \tag{10.19a}$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{b \in \mathcal{B}} x_{jb} = d_j, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \tag{10.19b}$$

$$-\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j x_{jb} + c y_b \geq 0, \quad \forall b \in \mathcal{B}, \quad (10.19c)$$

$$x_{jb} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \forall b \in \mathcal{B}, \quad (10.19d)$$

$$y_b \in \{0, 1\}, \quad \forall b \in \mathcal{B}. \quad (10.19e)$$

Questo modello PLI si chiama modello ILP_{CSP} .

- Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello ILP_{CSP} :
 - la funzione obiettivo lineare (10.19a) minimizza il numero totale di contenitori usati;
 - i vincoli (10.19b) garantiscono che siano inserite esattamente d_j copie di ogni oggetto j (n vincoli lineari);
 - i vincoli (10.19c) collegano le variabili intere alle variabili di attivazione e impongono i limiti di capacità, come i vincoli (10.1c) del modello ILP_{BPP} (m vincoli lineari);
 - infine, i vincoli (10.19d) e (10.19e) definiscono le variabili del modello PLI.
- Con $d_j = 1$ per ogni oggetto, i vincoli (10.19b) danno $x_{jb} \in \{0, 1\}$, e il modello ILP_{CSP} è il modello ILP_{BPP} .
- Le copie di un oggetto sono identiche: una sola variabile intera le conta in ogni contenitore. Il modello ILP_{BPP} sull'insieme esteso degli oggetti userebbe $m \sum_j d_j$ variabili binarie invece di mn variabili intere.

Esempio 10.6: modello ILP_{CSP}

Consideriamo contenitori di capacità $c = 10$ e un insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4\}$ di 4 oggetti ($n = 4$), con i seguenti pesi e copie richieste:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
w_j	4	5	3	6
d_j	2	1	3	1

Questa è l'istanza del CSP del [Capitolo 3 «Problemi di packing»](#), dove si trova a occhio una soluzione con 3 contenitori: quindi $m = 3$ è un upper bound valido. Il modello ILP_{CSP} con $m = 3$ per questa istanza del CSP è:

$$\begin{array}{llll}
 \min & y_1 + y_2 + y_3 & & \\
 \text{soggetto a} & x_{11} + x_{12} + x_{13} & = & 2 \\
 & x_{21} + x_{22} + x_{23} & = & 1 \\
 & x_{31} + x_{32} + x_{33} & = & 3 \\
 & x_{41} + x_{42} + x_{43} & = & 1 \\
 & -4x_{11} - 5x_{21} - 3x_{31} - 6x_{41} + 10y_1 & \geq & 0 \\
 & -4x_{12} - 5x_{22} - 3x_{32} - 6x_{42} + 10y_2 & \geq & 0 \\
 & -4x_{13} - 5x_{23} - 3x_{33} - 6x_{43} + 10y_3 & \geq & 0 \\
 & x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots, x_{43} & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} \\
 & y_1, y_2, y_3 & \in & \{0, 1\}
 \end{array}$$

Una soluzione ottima $\tilde{x}(\text{ILP}_{\text{CSP}})$ è:

$$\tilde{x}_{11} = \tilde{x}_{41} = 1, \quad \tilde{x}_{32} = 3, \quad \tilde{x}_{13} = \tilde{x}_{23} = 1, \quad \tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = \tilde{y}_3 = 1,$$

con tutte le altre variabili pari a 0. Il valore ottimo è $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) = 3$, come trovato nel Capitolo 3. I contenitori contengono una copia degli oggetti 1 e 4 (peso 10), tre copie dell'oggetto 3 (peso 9), e una copia degli oggetti 1 e 2 (peso 9). La soluzione ottima non è unica: anche la soluzione del Capitolo 3, con i contenitori $\{4, 1\}$, $\{1, 3, 3\}$ e $\{2, 3\}$, usa 3 contenitori.

10.6 Errori tipici

Attenzione

- **Scegliere m troppo piccolo.** Il numero m di contenitori deve essere un upper bound sul numero di contenitori di una soluzione ottima: con $m < z(\text{ILP}_{\text{BPP}})$ il modello non ha soluzioni ammissibili. Il valore $m = n$ è sempre valido.
- **Dimenticare di arrotondare per eccesso.** Il valore ottimo del modello ILP_{BPP} è intero, quindi il lower bound dei rilassamenti è $\lceil \sum_j w_j/c \rceil$; nell'Esempio 10.1 è $\lceil \frac{8}{5} \rceil = 2$, non $\frac{8}{5}$.
- **Credere che il modello conti solo i contenitori non vuoti.** I vincoli permettono $y_b = 1$ per un contenitore vuoto: è la funzione obiettivo che spegne questi contenitori, in ogni soluzione ottima.
- **Ignorare la simmetria.** Permutando gli indici dei contenitori si ottiene un'altra soluzione ottima con lo stesso riempimento: il modello ILP_{BPP} ha molte soluzioni ottime equivalenti.
- **Aspettarsi un rilassamento migliore da $y_b \leq 1$.** Il secondo rilassamento ha lo stesso valore ottimo del primo: i limiti superiori $y_b \leq 1$ non tagliano la soluzione ottima del primo rilassamento.

- **Dichiarare binarie le variabili del modello di cutting stock.** Nel modello ILP_{CSP} x_{jb} conta le copie dell'oggetto j nel contenitore b : con $x_{jb} \in \{0, 1\}$ le tre copie dell'oggetto 3 dell'esempio non potrebbero stare nello stesso contenitore.

10.7 In sintesi

In sintesi

- Il modello ILP_{BPP} ha $m \cdot n$ variabili di assegnamento x_{jb} e m variabili di attivazione y_b ; i vincoli di capacità le collegano.
- Entrambi i rilassamenti lineari hanno valore ottimo $z(\text{LP}_{\text{BPP}}) = \sum_j w_j/c$, con soluzione duale $\tilde{\mu}_j = w_j/c$ e $\tilde{\pi}_b = 1/c$.
- Poiché il valore ottimo è intero, $\lceil z(\text{LP}_{\text{BPP}}) \rceil$ è un lower bound sul numero di contenitori.
- Il rapporto fra $z(\text{LP}_{\text{BPP}})$ e $z(\text{ILP}_{\text{BPP}})$ è almeno $\frac{1}{2}$, e il valore $\frac{1}{2}$ si raggiunge asintoticamente; lo stesso vale per $\lceil z(\text{LP}_{\text{BPP}}) \rceil$.
- Il modello ILP_{CSP} ha la struttura del modello ILP_{BPP} , con mn variabili intere x_{jb} che contano le copie e le domande d_j come termini noti; sull'istanza del CSP del Capitolo 3 il suo valore ottimo è 3.

Quadro riassuntivo dell'Esempio 10.1. Bound su $z(\text{ILP}_{\text{BPP}})$ calcolati in questo capitolo:

Bound	Valore	Da
Primo rilassamento	$\frac{8}{5}$	$z(\text{LP-0}_{\text{BPP}})$
Secondo rilassamento	$\frac{8}{5}$	$z(\text{LP}_{\text{BPP}})$
Lower bound	2	$\lceil \frac{8}{5} \rceil$
Valore ottimo	2	schemi $\{1, 3\}$ e $\{2\}$

Qui il bound arrotondato coincide già con il valore ottimo.

Formulazioni dei problemi di colorazione

Prerequisiti

- Dal modulo *Programmazione lineare*, [Capitolo 9 «Teoria della dualità»](#): il duale di un problema LP, dualità debole e forte.
- Dal modulo *Programmazione lineare intera*, [Capitolo 1 «Programmazione lineare intera»](#) e [Capitolo 2 «Bound primali e duali»](#): problemi PLI, rilassamenti lineari e bound.
- Da questo modulo, [Capitolo 4 «Problemi di colorazione»](#): il problema, le sue ipotesi e la notazione sui grafi.

Obiettivi

Al termine di questo capitolo saremo in grado di:

- scrivere il modello PLI del problema della colorazione dei vertici e spiegare il ruolo delle variabili di attivazione y_c ;
- scrivere i due rilassamenti lineari e i loro duali, e calcolarne le soluzioni ottime;
- dimostrare che il valore ottimo dei rilassamenti lineari è 2 per ogni grafo con almeno uno spigolo;
- spiegare perché questo bound è molto debole, e perché il modello non basta per colorare un grafo.

11.1 Panoramica della famiglia

- I modelli PLI dei problemi di colorazione usano un upper bound k sul numero di colori e l'insieme $\mathcal{C} = \{1, 2, \dots, k\}$ dei colori che si possono usare.
- Le **variabili di assegnamento** binarie x_{vc} danno un colore $c \in \mathcal{C}$ a ogni vertice $v \in V$, e le **variabili di attivazione** binarie y_c dicono se il colore c è usato.
- Ogni spigolo e ogni colore danno un vincolo, che vieta lo stesso colore sui due estremi dello spigolo, e la funzione obiettivo minimizza il numero $\sum_{c \in \mathcal{C}} y_c$ di colori usati.

I modelli di colorazione sono **modelli di assegnamento**, come i modelli di packing: un vertice è assegnato a un colore come un oggetto è assegnato a un contenitore, e i vincoli sugli spigoli prendono il posto dei vincoli di capacità.

- La tabella elenca i membri della famiglia, con il nome del loro modello PLI e la sezione che lo scrive.

Problema	Modello	Variabili	Sezione
VCP	ILP _{VCP}	binarie x_{vc} e y_c	11.2

11.2 Un modello PLI per il problema della colorazione dei vertici

Il problema della colorazione dei vertici e le sue ipotesi sono definiti nel [Capitolo 4 «Problemi di colorazione»](#), [Sezione 4.2](#).

- Dato un grafo $G = (V, E)$, per un vertice $v \in V$ indichiamo con $\delta(v)$ l'insieme degli spigoli incidenti in v .
- Dato un upper bound $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ sul numero di colori usati in una qualunque soluzione ottima del VCP, introduciamo le seguenti $k \underbrace{|V|}_{=n}$ variabili binarie:

$$x_{vc} = \begin{cases} 1 & \text{se il vertice } v \text{ prende il colore } c, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall v \in \underbrace{\{1, 2, \dots, n\}}_{=V}, \quad \forall c \in \underbrace{\{1, 2, \dots, k\}}_{=\mathcal{C}}, \quad (11.1)$$

e le seguenti k variabili binarie:

$$y_c = \begin{cases} 1 & \text{se il colore } c \text{ è usato,} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall c \in \underbrace{\{1, 2, \dots, k\}}_{=\mathcal{C}}. \quad (11.2)$$

Il numero n di vertici è un upper bound valido sul numero minimo di colori necessari per colorare tutti i vertici poiché, nel caso peggiore, ogni vertice prende un colore diverso. Anche il numero di colori usati in una qualunque soluzione ammissibile del VCP è un upper bound valido.

Con queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema della colorazione dei vertici (VCP) è il seguente:

$$\min \sum_{c \in \mathcal{C}} y_c \quad (11.3a)$$

$$\text{soggetto a } \sum_{c \in \mathcal{C}} x_{vc} = 1, \quad \forall v \in V, \quad (11.3b)$$

$$-x_{uc} - x_{vc} + y_c \geq 0, \quad \forall c \in \mathcal{C}, \forall \{u, v\} \in E, \quad (11.3c)$$

$$x_{vc} \in \{0, 1\}, \quad \forall v \in V, \forall c \in \mathcal{C}, \quad (11.3d)$$

$$y_c \in \{0, 1\}, \quad \forall c \in \mathcal{C}. \quad (11.3e)$$

Questo modello PLI si chiama modello ILP_{VCP} .

- Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello ILP_{VCP} :
 - la funzione obiettivo lineare (11.3a) minimizza il numero totale di colori usati;
 - i vincoli (11.3b) garantiscono che ogni vertice prenda esattamente un colore (n vincoli lineari);
 - i vincoli (11.3c) garantiscono che, per ogni colore e ogni spigolo, i due vertici adiacenti non prendano entrambi quel colore, e che nessun vertice prenda un colore non usato ($k \underbrace{|E|}_{=m}$ vincoli lineari);
 - infine, i vincoli (11.3d) e (11.3e) definiscono le variabili del modello PLI.

Spiegazione del legame fra le variabili

- **Se il colore c è assegnato a un vertice, allora è usato.** L'implicazione logica è

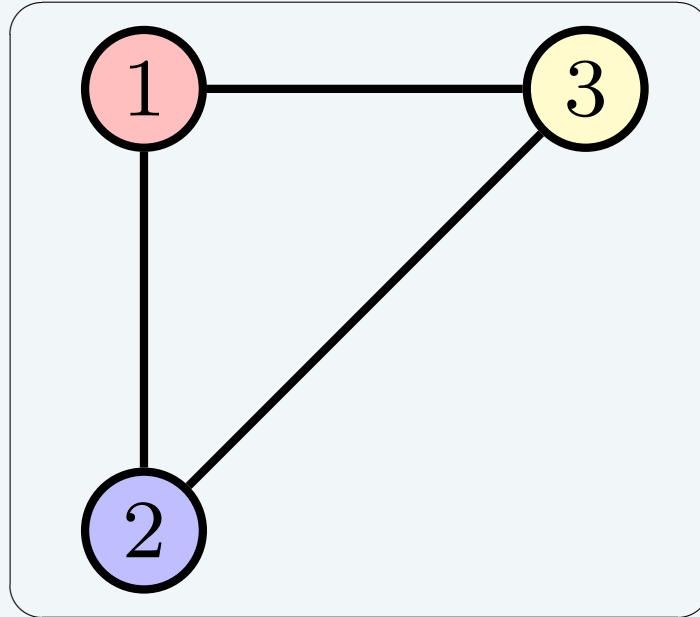
$$(x_{1c} \text{ OR } x_{2c} \text{ OR } \dots \text{ OR } x_{nc}) \implies y_c.$$

Ogni vertice ha uno spigolo incidente $\{u, v\}$, e il vincolo $x_{uc} + x_{vc} \leq y_c$ impone $y_c = 1$ non appena $x_{vc} = 1$.

- **Se il colore c non è usato, allora nessun vertice lo prende.** È la contronominale dell'implicazione precedente. Per $y_c = 0$ il vincolo sullo spigolo dà $x_{uc} = x_{vc} = 0$ per ogni spigolo $\{u, v\} \in E$.
- **Se il colore c è usato, allora qualche vertice lo prende, ma solo in una soluzione ottima.** I vincoli non lo impongono. Tuttavia, se $x_{vc} = 0$ per ogni v e $y_c = 1$, porre $y_c = 0$ mantiene soddisfatti tutti i vincoli e diminuisce di uno il valore obiettivo. Quindi, in ogni soluzione ottima, i colori non usati non sono contati.

Esempio 11.1: modello ILP_{VCP}

Consideriamo il seguente grafo $G = (V, E)$ con 3 vertici ($n = 3$) e 3 spigoli ($m = 3$):



L'insieme dei vertici V e l'insieme degli spigoli E sono:

$$V = \{ 1, 2, 3 \}, \quad E = \{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\} \}.$$

Chiamiamo questa istanza del VCP [Esempio 11.1](#).

Il modello ILP_{VCP} con $k = 3$ per questa istanza è:

$$\begin{array}{llllll}
 \min & & & & & y_1 & + & y_2 & + & y_3 \\
 \text{soggetto a} & x_{11} & + & x_{12} & + & x_{13} & & & & = & 1 \\
 & & & & & & x_{21} & + & x_{22} & + & x_{23} & & & = & 1 \\
 & & & & & & & & & & & x_{31} & + & x_{32} & + & x_{33} & & = & 1 \\
 & -x_{11} & & & & & -x_{21} & & & & & & + & y_1 & & & \geq & 0 \\
 & -x_{11} & & & & & & & & & -x_{31} & & + & y_1 & & \geq & 0 \\
 & & & & & & -x_{21} & & & & -x_{31} & & + & y_1 & & \geq & 0 \\
 & & & -x_{12} & & & & -x_{22} & & & & & & + & y_2 & & \geq & 0 \\
 & & & -x_{12} & & & & & & & & -x_{32} & & + & y_2 & & \geq & 0 \\
 & & & & & & & -x_{22} & & & & -x_{32} & & + & y_2 & & \geq & 0 \\
 & & & & & -x_{13} & & & & -x_{23} & & & & & + & y_3 & \geq & 0 \\
 & & & & & -x_{13} & & & & & & -x_{33} & & + & y_3 & \geq & 0 \\
 & & & & & & & & -x_{23} & & & -x_{33} & & + & y_3 & \geq & 0 \\
 & x_{11}, & x_{12}, & x_{13}, & x_{21}, & x_{22}, & x_{23}, & x_{31}, & x_{32}, & x_{33}, & y_1, & y_2, & y_3 & \in & \{0,1\}
 \end{array}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}$ (ILP_{VCP}) è:

$$\tilde{x}_{11} = 1, \quad \tilde{x}_{12} = \tilde{x}_{13} = \tilde{x}_{21} = 0, \quad \tilde{x}_{22} = 1, \quad \tilde{x}_{23} = \tilde{x}_{31} = \tilde{x}_{32} = 0, \quad \tilde{x}_{33} = 1, \quad \tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = \tilde{y}_3 = 1$$

Il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{VCP}})$ è 3.

La soluzione ottima associata del VCP è data dalle classi di colore $\tilde{Q}_1 = \{1\}$, $\tilde{Q}_2 = \{2\}$ e $\tilde{Q}_3 = \{3\}$. La partizione ottima è unica, ma le $3!$ permutazioni dei colori danno 6 soluzioni ottime diverse.

11.3 Un primo rilassamento lineare

Per ottenere un rilassamento lineare del modello ILP_{VCP} , rilassiamo i vincoli (11.3d) e (11.3e) con i seguenti:

$$x_{vc} \geq 0, \quad \forall v \in V, \forall c \in \mathcal{C}, \quad (11.4a)$$

$$y_c \geq 0, \quad \forall c \in \mathcal{C}. \quad (11.4b)$$

Questo modello PL si chiama modello LP-0_{VCP} .

Esempio 11.2: modello LP-0_{VCP}

Il modello LP-0_{VCP} per l'istanza del VCP dell'Esempio 11.1 è:

$$\begin{array}{llllll}
 \min & & & & & y_1 & + y_2 & + y_3 \\
 \text{soggetto a} & x_{11} & + x_{12} & + x_{13} & & & & = 1 \\
 & & & & x_{21} & + x_{22} & + x_{23} & = 1 \\
 & & & & & & x_{31} & + x_{32} & + x_{33} & = 1 \\
 & -x_{11} & & -x_{21} & & & + y_1 & & \geq 0 \\
 & -x_{11} & & & & -x_{31} & + y_1 & & \geq 0 \\
 & & & -x_{21} & & -x_{31} & + y_1 & & \geq 0 \\
 & & -x_{12} & & -x_{22} & & & + y_2 & \geq 0 \\
 & & -x_{12} & & & & -x_{32} & + y_2 & \geq 0 \\
 & & & & -x_{22} & & -x_{32} & + y_2 & \geq 0 \\
 & & & -x_{13} & & -x_{23} & & & + y_3 & \geq 0 \\
 & & & -x_{13} & & & -x_{33} & & + y_3 & \geq 0 \\
 & & & & & -x_{23} & & -x_{33} & + y_3 & \geq 0 \\
 & x_{11}, & x_{12}, & x_{13}, & x_{21}, & x_{22}, & x_{23}, & x_{31}, & x_{32}, & x_{33}, & y_1, & y_2, & y_3 & \geq 0
 \end{array}$$

Una soluzione ottima $\tilde{x}(\text{LP-0}_{\text{VCP}})$ è:

$$\tilde{x}_{11} = \tilde{x}_{12} = \tilde{x}_{21} = \tilde{x}_{22} = \tilde{x}_{31} = \tilde{x}_{32} = \frac{1}{2}, \quad \tilde{x}_{13} = \tilde{x}_{23} = \tilde{x}_{33} = 0, \quad \tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = 1, \quad \tilde{y}_3 = 0$$

Il valore ottimo $z(\text{LP-0}_{\text{VCP}})$ è 2.

Di conseguenza, abbiamo il lower bound:

$$2 \leq z(\text{ILP}_{\text{VCP}})$$

Con

- una variabile duale libera μ_v per ogni vincolo (11.3b) ($v \in V$)
- una variabile duale non negativa π_{ce} per ogni vincolo (11.3c) ($c \in \mathcal{C}$, $e = \{u, v\} \in E$)

il modello duale del modello LP-0_{VCP} è il seguente:

$$\max \sum_{v \in V} \mu_v \quad (11.5a)$$

$$\text{soggetto a } \mu_v - \sum_{e \in \delta(v)} \pi_{ce} \leq 0, \quad \forall v \in V, \forall c \in \mathcal{C}, \quad (11.5b)$$

$$\sum_{e \in E} \pi_{ce} \leq 1, \quad \forall c \in \mathcal{C}, \quad (11.5c)$$

$$\mu_v \geq 0, \quad \forall v \in V, \quad (11.5d)$$

$$\pi_{ce} \geq 0, \quad \forall c \in \mathcal{C}, \forall e \in E. \quad (11.5e)$$

Questo modello PL si chiama modello $D(\text{LP-0}_{\text{VCP}})$.

Esempio 11.3: modello $D(\text{LP-0}_{\text{VCP}})$

Il modello duale $D(\text{LP-0}_{\text{VCP}})$ per l'istanza del VCP dell'Esempio 11.1 è:

$$\begin{array}{rcll}
 \max & \mu_1 & + \mu_2 & + \mu_3 \\
 \text{soggetto a} & \mu_1 & & -\pi_{112} & -\pi_{113} & & & \leq 0 \\
 & \mu_1 & & & -\pi_{212} & -\pi_{213} & & \leq 0 \\
 & \mu_1 & & & & & -\pi_{312} & -\pi_{313} & \leq 0 \\
 & \mu_2 & & -\pi_{112} & & -\pi_{123} & & & \leq 0 \\
 & \mu_2 & & & -\pi_{212} & & -\pi_{223} & & \leq 0 \\
 & \mu_2 & & & & & -\pi_{312} & & -\pi_{323} & \leq 0 \\
 & \mu_3 & & -\pi_{113} & -\pi_{123} & & & & \leq 0 \\
 & \mu_3 & & & & -\pi_{213} & -\pi_{223} & & \leq 0 \\
 & \mu_3 & & & & & & -\pi_{313} & -\pi_{323} & \leq 0 \\
 & & \pi_{112} & +\pi_{113} & +\pi_{123} & & & & \leq 1 \\
 & & & & & \pi_{212} & +\pi_{213} & +\pi_{223} & \leq 1 \\
 & & & & & & & \pi_{312} & +\pi_{313} & +\pi_{323} & \leq 1 \\
 & \mu_1, & \mu_2, & \mu_3 & & & & & \geq 0 \\
 & & \pi_{112}, & \pi_{113}, & \pi_{123}, & \pi_{212}, & \pi_{213}, & \pi_{223}, & \pi_{312}, & \pi_{313}, & \pi_{323} & \geq 0
 \end{array}$$

Il valore ottimo $z(D(\text{LP-0}_{\text{VCP}}))$ è 2. Una soluzione ottima $(\tilde{\mu}, \tilde{\pi})$ di $D(\text{LP-0}_{\text{VCP}})$ è:

$$\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2 = 1, \quad \tilde{\mu}_3 = 0, \quad \tilde{\pi}_{112} = \tilde{\pi}_{212} = \tilde{\pi}_{312} = 1, \quad \text{tutti gli altri } \tilde{\pi}_{ce} = 0$$

Proposizione 11.1

Una soluzione ottima del modello primale LP-0_{VCP} è:

$$\tilde{x}_{v1} = \tilde{x}_{v2} = \frac{1}{2}, \quad \forall v \in V \quad \text{e} \quad \tilde{x}_{vc} = 0, \quad \forall v \in V, \forall c \in \{3, 4, \dots, k\}, \quad (11.6a)$$

$$\tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = 1 \quad \text{e} \quad \tilde{y}_c = 0, \quad \forall c \in \{3, 4, \dots, k\}, \quad (11.6b)$$

e una soluzione ottima del modello duale $D(\text{LP-0}_{\text{VCP}})$ è:

$$\tilde{\mu}_u = \tilde{\mu}_v = 1 \quad \text{e} \quad \tilde{\mu}_w = 0, \quad \forall w \in V \setminus \{u, v\}, \quad (11.7a)$$

$$\tilde{\pi}_{c\{u,v\}} = 1, \quad \forall c \in \mathcal{C} \quad \text{e} \quad \tilde{\pi}_{ce} = 0, \quad \forall c \in \mathcal{C}, e \in E \setminus \{\{u, v\}\}, \quad (11.7b)$$

dove $\{u, v\}$ è uno spigolo qualunque di E .

Corollario 11.2

Il valore ottimo dei modelli primale LP-0_{VCP} e duale $D(\text{LP-0}_{\text{VCP}})$ è:

$$z(\text{LP-0}_{\text{VCP}}) = 2 = z(D(\text{LP-0}_{\text{VCP}})) \quad (11.8)$$

- La dimostrazione procede in tre passi:
 1. mostriamo che (11.6) è una soluzione ammissibile del modello primale LP-0_{VCP} ;
 2. mostriamo che (11.7) è una soluzione ammissibile del modello duale $D(\text{LP-0}_{\text{VCP}})$;
 3. mostriamo che le due soluzioni ammissibili hanno lo stesso valore della funzione obiettivo.

Quindi, per la dualità debole della PL, (11.6) e (11.7) sono una coppia di soluzioni ottime primale e duale.

Dimostrazione.

1. Per ogni $v \in V$, abbiamo:

$$\sum_{c \in \mathcal{C}} \tilde{x}_{vc} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Quindi i vincoli (11.3b) sono soddisfatti.

Per $c \in \{1, 2\}$ e ogni $\{u, v\} \in E$, abbiamo:

$$\tilde{y}_c - \tilde{x}_{uc} - \tilde{x}_{vc} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

e per $c \in \{3, 4, \dots, k\}$ abbiamo $\tilde{y}_c - \tilde{x}_{uc} - \tilde{x}_{vc} = 0 - 0 - 0 = 0$. Quindi i vincoli (11.3c) sono soddisfatti.

Abbiamo $\tilde{x}_{vc} \geq 0$ e $\tilde{y}_c \geq 0$, per ogni $v \in V$ e ogni $c \in \mathcal{C}$, quindi i vincoli (11.4a) e (11.4b) sono soddisfatti.

Quindi (11.6) fornisce una soluzione ammissibile del modello primale LP-0_{VCP}.

2. Per ogni $c \in \mathcal{C}$, abbiamo:

$$\sum_{e \in E} \tilde{\pi}_{ce} = 1$$

Quindi i vincoli (11.5c) sono soddisfatti.

Per ogni $c \in \mathcal{C}$ e $w \in \{u, v\}$, abbiamo:

$$\tilde{\mu}_w - \sum_{e \in \delta(w)} \tilde{\pi}_{ce} = 1 - 1 = 0$$

Per ogni $c \in \mathcal{C}$ e $w \in V \setminus \{u, v\}$, abbiamo $\tilde{\mu}_w = 0$ e $\tilde{\pi}_{ce} = 0$ per ogni $e \in \delta(w)$ (poiché $\tilde{\pi}_{ce}$ è diverso da zero solo per $e = \{u, v\}$, che non è incidente in w), quindi

$$\tilde{\mu}_w - \sum_{e \in \delta(w)} \tilde{\pi}_{ce} = 0 - 0 = 0.$$

Quindi i vincoli (11.5b) sono soddisfatti.

Abbiamo $\tilde{\mu}_v \geq 0$, $\forall v \in V$ e $\tilde{\pi}_{ce} \geq 0$ per ogni $c \in \mathcal{C}$ e ogni $e \in E$. Quindi i vincoli (11.5d) e (11.5e) sono soddisfatti.

Quindi (11.7) fornisce una soluzione ammissibile del modello duale $D(\text{LP-0}_{\text{VCP}})$.

3. Per le funzioni obiettivo abbiamo:

$$\sum_{c \in \mathcal{C}} \tilde{y}_c = 1 + 1 = \sum_{v \in V} \tilde{\mu}_v$$

quindi i valori delle funzioni obiettivo primale e duale coincidono.

Quindi, per la dualità debole della PL, (11.6) e (11.7) sono una coppia di soluzioni ottime primale e duale.

□

- Riportiamo una dimostrazione alternativa, che non usa la formulazione duale ma ragiona direttamente sul valore minimo della funzione obiettivo imposto dai vincoli.

Proposizione 11.3

Una soluzione ottima del modello primale $LP-0_{VCP}$ è:

$$\tilde{x}_{v1} = \tilde{x}_{v2} = \frac{1}{2}, \quad \forall v \in V \quad \text{e} \quad \tilde{x}_{vc} = 0, \quad \forall v \in V, \forall c \in \{3, 4, \dots, k\}, \quad (11.9a)$$

$$\tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = 1 \quad \text{e} \quad \tilde{y}_c = 0, \quad \forall c \in \{3, 4, \dots, k\}, \quad (11.9b)$$

e il valore ottimo è

$$z(LP-0_{VCP}) = 2. \quad (11.10)$$

Dimostrazione. Sommando i vincoli sugli spigoli (11.3c) su tutti i $c \in \mathcal{C}$, per uno spigolo qualunque $\{u, v\} \in E$, otteniamo

$$\sum_{c \in \mathcal{C}} y_c - \sum_{c \in \mathcal{C}} x_{uc} - \sum_{c \in \mathcal{C}} x_{vc} \geq 0 \implies \sum_{c \in \mathcal{C}} y_c \geq \underbrace{\sum_{c \in \mathcal{C}} x_{uc}}_{\text{per (11.3b)=1}} + \underbrace{\sum_{c \in \mathcal{C}} x_{vc}}_{\text{per (11.3b)=1}} = 2,$$

quindi

$$\sum_{c \in \mathcal{C}} y_c \geq 2. \quad (11.11)$$

Quindi ogni soluzione ammissibile di $LP-0_{VCP}$ soddisfa (11.11).

Consideriamo ora il punto definito in (11.9). Per ogni $v \in V$, abbiamo

$$\sum_{c \in \mathcal{C}} \tilde{x}_{vc} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

quindi i vincoli (11.3b) valgono. Inoltre, per ogni $\{u, v\} \in E$ e $c \in \{1, 2\}$,

$$\tilde{y}_c - \tilde{x}_{uc} - \tilde{x}_{vc} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0,$$

quindi i vincoli (11.3c) valgono all'uguaglianza, mentre per ogni $c \geq 3$ entrambi i membri sono nulli. Infine, i vincoli (11.4a) e (11.4b) sono soddisfatti per costruzione. Quindi il punto definito in (11.9) è una soluzione ammissibile di $LP-0_{VCP}$.

Il valore obiettivo di (11.9) è

$$\sum_{c \in \mathcal{C}} \tilde{y}_c = 1 + 1 = 2,$$

che coincide con il lower bound (11.11). Quindi il punto (11.9) è una soluzione ottima con valore obiettivo (11.10). □

11.4 Un secondo rilassamento lineare

Per ottenere un rilassamento lineare del modello ILP_{VCP} , rilassiamo i vincoli (11.3d) e (11.3e) con i seguenti:

$$x_{vc} \geq 0, \quad \forall v \in V, \forall c \in \mathcal{C}, \quad (11.12a)$$

$$y_c \leq 1, \quad \forall c \in \mathcal{C}, \quad (11.12b)$$

$$y_c \geq 0, \quad \forall c \in \mathcal{C}. \quad (11.12c)$$

Questo modello PL si chiama modello LP_{VCP} .

Esempio 11.4: modello LP_{VCP}

Il modello LP_{VCP} per l'istanza del VCP dell'Esempio 11.1 è:

$$\begin{array}{llllllllllll}
 \min & & & & & & & & & y_1 & + y_2 & + y_3 \\
 \text{soggetto a} & x_{11} & + x_{12} & + x_{13} & & & & & & & & = 1 \\
 & & & & x_{21} & + x_{22} & + x_{23} & & & & & = 1 \\
 & & & & & & & x_{31} & + x_{32} & + x_{33} & & = 1 \\
 & -x_{11} & & & -x_{21} & & & & & + y_1 & & \geq 0 \\
 & -x_{11} & & & & & & -x_{31} & & + y_1 & & \geq 0 \\
 & & & & -x_{21} & & & -x_{31} & & + y_1 & & \geq 0 \\
 & & -x_{12} & & & -x_{22} & & & & + y_2 & & \geq 0 \\
 & & -x_{12} & & & & & -x_{32} & & + y_2 & & \geq 0 \\
 & & & & & -x_{22} & & -x_{32} & & + y_2 & & \geq 0 \\
 & & & -x_{13} & & & -x_{23} & & & & + y_3 & \geq 0 \\
 & & & -x_{13} & & & & & -x_{33} & & + y_3 & \geq 0 \\
 & & & & & & -x_{23} & & -x_{33} & & + y_3 & \geq 0 \\
 & & & & & & & & & y_1 & & \leq 1 \\
 & & & & & & & & & & y_2 & \leq 1 \\
 & & & & & & & & & & & y_3 \leq 1 \\
 & x_{11}, & x_{12}, & x_{13}, & x_{21}, & x_{22}, & x_{23}, & x_{31}, & x_{32}, & x_{33}, & y_1, & y_2, & y_3 \geq 0
 \end{array}$$

Una soluzione ottima $\tilde{x}(LP_{VCP})$ è:

$$\tilde{x}_{11} = \tilde{x}_{12} = \tilde{x}_{21} = \tilde{x}_{22} = \tilde{x}_{31} = \tilde{x}_{32} = \frac{1}{2}, \quad \tilde{x}_{13} = \tilde{x}_{23} = \tilde{x}_{33} = 0, \quad \tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = 1, \quad \tilde{y}_3 = 0$$

Il valore ottimo $z(LP_{VCP})$ è 2. Di conseguenza, abbiamo lo stesso lower bound.

Con

- una variabile duale libera μ_v per ogni vincolo (11.3b) ($v \in V$)
- una variabile duale non negativa π_{ce} per ogni vincolo (11.3c) ($c \in \mathcal{C}$, $e = \{u, v\} \in E$)
- una variabile duale non positiva λ_c per ogni vincolo (11.12b) ($\forall c \in \mathcal{C}$)

il modello duale del modello LP_{VCP} è il seguente:

$$\max \sum_{v \in V} \mu_v + \sum_{c \in \mathcal{C}} \lambda_c \quad (11.13a)$$

$$\text{soggetto a } \mu_v - \sum_{e \in \delta(v)} \pi_{ce} \leq 0, \quad \forall v \in V, \forall c \in \mathcal{C}, \quad (11.13b)$$

$$\sum_{e \in E} \pi_{ce} + \lambda_c \leq 1, \quad \forall c \in \mathcal{C}, \quad (11.13c)$$

$$\mu_v \geq 0, \quad \forall v \in V, \quad (11.13d)$$

$$\pi_{ce} \geq 0, \quad \forall c \in \mathcal{C}, \forall e \in E, \quad (11.13e)$$

$$\lambda_c \leq 0, \quad \forall c \in \mathcal{C}. \quad (11.13f)$$

Questo modello PL si chiama modello $D(LP_{VCP})$.

Esempio 11.5: modello $D(LP_{VCP})$

Il modello duale $D(LP_{VCP})$ per l'istanza del VCP dell'Esempio 11.1 è:

$$\begin{array}{llllll}
 \max & \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 & & & & +\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\
 \text{soggetto a} & \mu_1 & -\pi_{112} & -\pi_{113} & & \leq 0 \\
 & \mu_1 & & -\pi_{212} & -\pi_{213} & \leq 0 \\
 & \mu_1 & & & -\pi_{312} & -\pi_{313} \leq 0 \\
 & \mu_2 & -\pi_{112} & -\pi_{123} & & \leq 0 \\
 & \mu_2 & & -\pi_{212} & -\pi_{223} & \leq 0 \\
 & \mu_2 & & & -\pi_{312} & -\pi_{323} \leq 0 \\
 & \mu_3 & -\pi_{113} & -\pi_{123} & & \leq 0 \\
 & \mu_3 & & -\pi_{213} & -\pi_{223} & \leq 0 \\
 & \mu_3 & & & -\pi_{313} & -\pi_{323} \leq 0 \\
 & & \pi_{112} & +\pi_{113} & +\pi_{123} & +\lambda_1 \leq 1 \\
 & & & \pi_{212} & +\pi_{213} & +\pi_{223} +\lambda_2 \leq 1 \\
 & & & & \pi_{312} & +\pi_{313} +\pi_{323} +\lambda_3 \leq 1 \\
 & \mu_1, \mu_2, \mu_3 & & & & \geq 0 \\
 & & \pi_{112}, \pi_{113}, \pi_{123}, \pi_{212}, \pi_{213}, \pi_{223}, \pi_{312}, \pi_{313}, \pi_{323} & & & \geq 0 \\
 & & & & & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 0
 \end{array}$$

Il valore ottimo $z(D(LP_{VCP}))$ è 2. Una soluzione ottima $(\tilde{\mu}, \tilde{\pi}, \tilde{\lambda})$ di $D(LP_{VCP})$ è:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2 = 1, \quad \tilde{\mu}_3 = 0, \quad \tilde{\pi}_{112} = \tilde{\pi}_{212} = \tilde{\pi}_{312} = 1, \quad \text{tutti gli altri } \tilde{\pi}_{ce} = 0 \\
 \tilde{\lambda}_1 = 0, \quad \tilde{\lambda}_2 = 0, \quad \tilde{\lambda}_3 = 0
 \end{aligned}$$

- I vincoli:

$$x_{vc} \leq 1, \quad \forall v \in V, \forall c \in \mathcal{C},$$

sono anch'essi validi poiché, per ogni $v \in V$ e ogni $c \in \mathcal{C}$, abbiamo:

$$x_{vc} \in \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad x_{vc} \leq 1$$

ma sono implicati dai vincoli (11.3b).

Proposizione 11.4

Una soluzione ottima del modello primale LP_{VCP} è:

$$\tilde{x}_{v1} = \tilde{x}_{v2} = \frac{1}{2}, \quad \forall v \in V \quad \text{e} \quad \tilde{x}_{vc} = 0, \quad \forall v \in V, \forall c \in \{3, 4, \dots, k\}, \quad (11.14a)$$

$$\tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = 1 \quad \text{e} \quad \tilde{y}_c = 0, \quad \forall c \in \{3, 4, \dots, k\}, \quad (11.14b)$$

e una soluzione ottima del modello duale $D(LP_{VCP})$ è:

$$\tilde{\mu}_u = \tilde{\mu}_v = 1 \quad \text{e} \quad \tilde{\mu}_w = 0, \quad \forall w \in V \setminus \{u, v\}, \quad (11.15a)$$

$$\tilde{\pi}_{c\{u,v\}} = 1, \quad \forall c \in \mathcal{C}, \quad \tilde{\pi}_{ce} = 0, \quad \forall c \in \mathcal{C}, e \in E \setminus \{\{u, v\}\}, \quad \text{e} \quad \tilde{\lambda}_c = 0, \quad \forall c \in \mathcal{C}, \quad (11.15b)$$

dove $\{u, v\}$ è uno spigolo qualunque di E .

Dimostrazione. La dimostrazione è simile alla precedente. In più, occorre osservare che:

$$\tilde{y}_c \leq 1, \quad \forall c \in \mathcal{C}.$$

Di conseguenza, anche i vincoli (11.12b) sono soddisfatti. $\square$

Corollario 11.5

Il valore ottimo dei modelli primale LP_{VCP} e duale $D(\text{LP}_{\text{VCP}})$ è:

$$z(\text{LP}_{\text{VCP}}) = 2 = z(D(\text{LP}_{\text{VCP}})) \quad (11.16)$$

11.5 Errori tipici

Attenzione

- **Scegliere k troppo piccolo.** Il numero k di colori deve essere almeno il numero cromatico del grafo: con meno colori il modello non ha soluzioni ammissibili. Il valore $k = n$ è sempre valido.
- **Fidarsi del bound del rilassamento.** Il valore ottimo di entrambi i rilassamenti è 2 per ogni grafo con almeno uno spigolo, anche per il grafo completo su n vertici, il cui valore ottimo è n .
- **Credere che il modello conti solo i colori davvero usati.** I vincoli permettono $y_c = 1$ per un colore che nessun vertice prende: è la funzione obiettivo che spegne questi colori.
- **Ignorare la simmetria.** Permutando i colori di una soluzione ottima si ottiene un'altra soluzione ottima: una colorazione che usa q dei k colori ha $k!/(k-q)!$ copie equivalenti nel modello ILP_{VCP} ($k!$ quando usa tutti i colori).
- **Scrivere la soluzione duale con uno spigolo sbagliato.** I valori duali $\tilde{\pi}_{ce}$ sono diversi da zero solo per uno spigolo $e = \{u, v\}$, e per ogni colore c : tutti gli altri spigoli hanno valore zero.

11.6 In sintesi

In sintesi

- Il modello ILP_{VCP} ha $k \cdot n$ variabili x_{vc} (il vertice v prende il colore c) e k variabili y_c (il colore c è usato); i vincoli sugli spigoli vietano colori uguali su vertici adiacenti.
- I due rilassamenti lineari hanno lo stesso valore ottimo 2 per ogni grafo con almeno uno spigolo: basta mettere $\frac{1}{2}$ su due colori per tutti i vertici.
- La soluzione duale sceglie uno spigolo $\{u, v\}$ e dà valore 1 a μ_u , μ_v e $\pi_{\{u,v\}}$ per ogni colore.
- Il bound 2 è molto debole: una formulazione che deve colorare grafi ha bisogno di ulteriori disuguaglianze valide.

Quadro riassuntivo dell'Esempio 11.1 (triangolo). Bound su $z(\text{ILP}_{\text{VCP}})$ calcolati in questo capitolo:

Bound	Valore	Da
Primo rilassamento	2	$z(\text{LP-0}_{\text{VCP}})$
Secondo rilassamento	2	$z(\text{LP}_{\text{VCP}})$
Valore ottimo	3	classi di colore $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$

Qui il gap fra 2 e 3 è piccolo, ma cresce con la dimensione del grafo completo: 2 contro n .

Formulazioni dei problemi di clique

Prerequisiti

- Da questo modulo, [Capitolo 5 «Problemi di clique»](#): il problema, le sue ipotesi, clique, insiemi stabili, il grafo complementare e $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$.
- Da questo modulo, [Capitolo 4 «Problemi di colorazione»](#) e [Capitolo 11 «Formulazioni dei problemi di colorazione»](#): il numero cromatico $\chi(G)$ e un modello PLI con i suoi rilassamenti lineari.
- Dal modulo *Programmazione lineare intera*, [Capitolo 2 «Bound primali e duali»](#), [Capitolo 3 «Formulazioni ideali»](#) e [Capitolo 4 «Disuguaglianze valide»](#): rilassamenti lineari, formulazioni più forti e disuguaglianze valide.
- Dal modulo *Programmazione lineare*, [Capitolo 9 «Teoria della dualità»](#): il duale di un problema LP, la dualità debole e la dualità forte.

Obiettivi

Al termine di questo capitolo saremo in grado di:

- scrivere la formulazione sugli spigoli del problema della clique massima sui non-spigoli di G , cioè sugli spigoli di $\overline{G}$;
- spiegare perché il suo rilassamento lineare è debole: il punto $x_v = \frac{1}{2}$ è sempre ammissibile;
- scrivere la formulazione a clique e confrontare i due bound LP su un grafo piccolo;
- dimostrare $\omega(G) \leq z(\text{LP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}) \leq \chi(G)$ con la dualità LP e una formulazione di colorazione;
- scrivere la formulazione sugli spigoli e la formulazione a clique del problema dell'insieme stabile massimo;
- scrivere i modelli PLI dei problemi della clique massima pesata sui vertici e pesata sugli spigoli, linearizzando il prodotto $x_u x_v$ con le variabili y_{uv} .

12.1 Panoramica della famiglia

- I modelli PLI dei problemi di clique usano una **variabile binaria di selezione** x_v per ogni vertice $v \in V$, pari a 1 se il vertice è nella clique.
- Due vertici non adiacenti non possono essere selezionati entrambi: i **vincoli di conflitto** si scrivono sui non-spigoli di G , cioè sugli spigoli del grafo complementare $\overline{G}$, oppure sulle sue clique.
- La funzione obiettivo massimizza il numero di vertici selezionati o il loro peso totale; il problema pesato sugli spigoli aggiunge una variabile per spigolo.

I modelli di clique selezionano vertici con variabili binarie e vietano la selezione di due vertici non adiacenti. Gli stessi modelli, scritti sugli spigoli di G invece che di $\overline{G}$, selezionano insiemi stabili.

- La tabella elenca i membri della famiglia, con il nome dei loro modelli PLI e le sezioni che li scrivono.

Problema	Modelli	Vincoli di conflitto	Sezione
MCP	ILP_{MCP} (formulazione sugli spigoli)	sui non-spigoli di G	12.2
MCP	$\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}$ (formulazione a clique)	sugli insiemi stabili massimali di G	12.5
MSSP	$\text{ILP}_{\text{MSSP}}, \text{ILP}_{\text{MSSP}}^{\text{CL}}$	sugli spigoli e sulle clique di G	12.7
VWMCP	$\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{VW}}$	sui non-spigoli di G	12.8
EWMCP	$\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{EW}}$	sui non-spigoli di G	12.8

12.2 Un modello PLI per il problema della clique massima: la formulazione sugli spigoli

Il problema di questa sezione è il problema della clique massima (MCP), definito nel [Capitolo 5](#) «Problemi di clique», Sezione 5.2.

- Dato un grafo semplice $G = (V, E)$, con $V = \{1, 2, \dots, n\}$ e m spigoli, indichiamo con

$$\overline{E} = \{ \{u, v\} : u, v \in V, u \neq v, \{u, v\} \notin E \}$$

l'insieme dei **non-spigoli** di G , cioè gli spigoli del grafo complementare $\overline{G} = (V, \overline{E})$.

- Introduciamo le seguenti n **variabili binarie**:

$$x_v = \begin{cases} 1 & \text{se il vertice } v \text{ è selezionato nella clique} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall v \in V. \quad (12.1)$$

Con queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema della clique massima (MCP) è il seguente:

$$\max \sum_{v \in V} x_v \quad (12.2a)$$

$$\text{soggetto a } x_u + x_v \leq 1, \quad \forall \{u, v\} \in \overline{E}, \quad (12.2b)$$

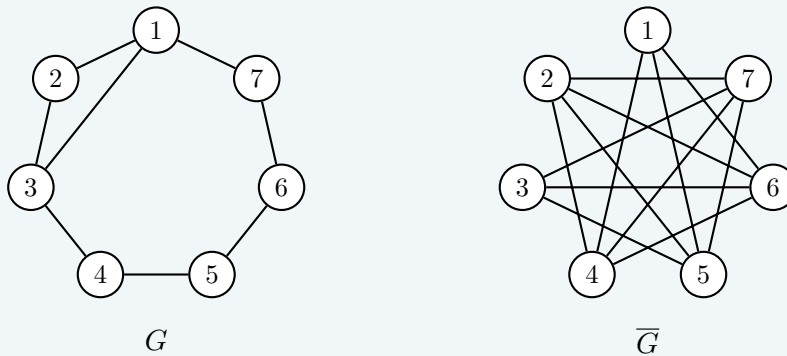
$$x_v \in \{0, 1\}, \quad \forall v \in V. \quad (12.2c)$$

Questo modello PLI si chiama modello ILP_{MCP} , o **formulazione sugli spigoli**.

- Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello ILP_{MCP} :
 - la funzione obiettivo lineare (12.2a) massimizza la cardinalità della clique selezionata;
 - i vincoli (12.2b) garantiscono che due vertici non adiacenti non siano selezionati entrambi ($|\overline{E}| = \binom{n}{2} - m$ vincoli lineari, uno per ogni spigolo di $\overline{G}$);
 - infine, i vincoli (12.2c) definiscono le variabili del modello PLI.
- Per ogni non-spigolo $\{u, v\}$, il vincolo $x_u + x_v \leq 1$ impone $x_u = 1 \Rightarrow x_v = 0$. Il viceversa è falso: $x_u = x_v = 0$ è ammissibile.
- Letto su $\overline{G}$, lo stesso modello è la **formulazione sugli spigoli del MSSP**: di ogni spigolo di $\overline{G}$ si seleziona al più un estremo.

Esempio 12.1: Istanza del MCP

Consideriamo il grafo G con 7 vertici formato dal ciclo $1, 2, \dots, 7, 1$ e dalla corda $\{1, 3\}$ (l'istanza di riferimento del Capitolo 5 «Problemi di clique»), e il suo complementare $\overline{G}$:



G ha $m = 8$ spigoli, e $\overline{G}$ ha i $\binom{7}{2} - 8 = 13$ non-spigoli di G :

$$\overline{E} = \{\{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{2, 7\}, \\ \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}, \{4, 7\}, \{5, 7\}\}.$$

Chiamiamo questa istanza del MCP [Esempio 12.1](#).

Esempio 12.2: Modello ILP_{MCP}

Il modello ILP_{MCP} per l'istanza del MCP dell'Esempio 12.1 ha 7 variabili binarie e un vincolo per ciascuno dei 13 spigoli di $\overline{G}$:

$$\begin{aligned}
 & \max \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \\
 & \text{soggetto a} \quad x_1 + x_4 \leq 1 \\
 & \quad x_1 + x_5 \leq 1 \\
 & \quad x_1 + x_6 \leq 1 \\
 & \quad x_2 + x_4 \leq 1 \\
 & \quad x_2 + x_5 \leq 1 \\
 & \quad x_2 + x_6 \leq 1 \\
 & \quad x_2 + x_7 \leq 1 \\
 & \quad x_3 + x_5 \leq 1 \\
 & \quad x_3 + x_6 \leq 1 \\
 & \quad x_3 + x_7 \leq 1 \\
 & \quad x_4 + x_6 \leq 1 \\
 & \quad x_4 + x_7 \leq 1 \\
 & \quad x_5 + x_7 \leq 1 \\
 & \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{ILP}_{\text{MCP}})$ è:

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = \tilde{x}_3 = 1, \quad \tilde{x}_4 = \tilde{x}_5 = \tilde{x}_6 = \tilde{x}_7 = 0$$

Il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{MCP}})$ è $3 = \omega(G)$. La soluzione ottima associata del MCP è la clique $\tilde{K} = \{1, 2, 3\}$, ed è l'unica soluzione ottima.

12.3 Un primo rilassamento lineare

Per ottenere un rilassamento lineare (LP) del modello ILP_{MCP} , rilassiamo i vincoli (12.2c) in vincoli di non negatività. Il modello PL ottenuto è il seguente:

$$\max \sum_{v \in V} x_v \quad (12.3a)$$

$$\text{soggetto a} \quad x_u + x_v \leq 1, \quad \forall \{u, v\} \in \overline{E}, \quad (12.3b)$$

$$x_v \geq 0, \quad \forall v \in V. \quad (12.3c)$$

Questo modello PL si chiama modello LP-0_{MCP} .

- Gli upper bound $x_v \leq 1$ non sono implicati in LP-0_{MCP} : se un vertice è adiacente a tutti gli altri, non compare in nessun vincolo (12.3b), e LP-0_{MCP} è illimitato. Nell'Esempio 12.1

ogni vertice ha un non-spigolo, e LP-0_{MCP} ha una soluzione ottima.

Esempio 12.3: Modello LP-0_{MCP}

Il modello LP-0_{MCP} per l'istanza del MCP dell'Esempio 12.1 è:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \\
 \text{soggetto a} \quad & x_1 + x_4 \leq 1 \\
 & x_1 + x_5 \leq 1 \\
 & x_1 + x_6 \leq 1 \\
 & x_2 + x_4 \leq 1 \\
 & x_2 + x_5 \leq 1 \\
 & x_2 + x_6 \leq 1 \\
 & x_2 + x_7 \leq 1 \\
 & x_3 + x_5 \leq 1 \\
 & x_3 + x_6 \leq 1 \\
 & x_3 + x_7 \leq 1 \\
 & x_4 + x_6 \leq 1 \\
 & x_4 + x_7 \leq 1 \\
 & x_5 + x_7 \leq 1 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
 \end{aligned}$$

Una soluzione ottima $\tilde{x}(\text{LP-0}_{\text{MCP}})$ è:

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = \tilde{x}_3 = \tilde{x}_4 = \tilde{x}_5 = \tilde{x}_6 = \tilde{x}_7 = \frac{1}{2}$$

Il valore ottimo $z(\text{LP-0}_{\text{MCP}})$ è $\frac{7}{2}$. Di conseguenza, abbiamo l'upper bound:

$$z(\text{ILP}_{\text{MCP}}) \leq \frac{7}{2}$$

Con una variabile duale non negativa π_{uv} per ogni vincolo (12.3b), il modello duale del modello LP-0_{MCP} è:

$$\min \sum_{\{u,v\} \in \bar{E}} \pi_{uv} \quad (12.4a)$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{u: \{u,v\} \in \bar{E}} \pi_{uv} \geq 1, \quad \forall v \in V, \quad (12.4b)$$

$$\pi_{uv} \geq 0, \quad \forall \{u,v\} \in \bar{E}. \quad (12.4c)$$

Questo modello PL si chiama modello $D(\text{LP-0}_{\text{MCP}})$.

- I vincoli (12.4b) chiedono che ogni vertice sia coperto da un peso totale almeno pari a uno

sugli spigoli di $\overline{G}$ incidenti in esso: il modello $D(LP-0_{MCP})$ è una **copertura frazionaria dei vertici con spigoli di $\overline{G}$** .

Esempio 12.4: Modello $D(LP-0_{MCP})$

Il modello duale $D(LP-0_{MCP})$ per l'istanza del MCP dell'Esempio 12.1 ha una variabile per ogni spigolo di $\overline{G}$ e un vincolo per ogni vertice:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \pi_{14} + \pi_{15} + \pi_{16} + \pi_{24} + \pi_{25} + \pi_{26} + \pi_{27} \\
 & + \pi_{35} + \pi_{36} + \pi_{37} + \pi_{46} + \pi_{47} + \pi_{57} \\
 \text{soggetto a} \quad & \pi_{14} + \pi_{15} + \pi_{16} \geq 1 \\
 & \pi_{24} + \pi_{25} + \pi_{26} + \pi_{27} \geq 1 \\
 & \pi_{35} + \pi_{36} + \pi_{37} \geq 1 \\
 & \pi_{14} + \pi_{24} + \pi_{46} + \pi_{47} \geq 1 \\
 & \pi_{15} + \pi_{25} + \pi_{35} + \pi_{57} \geq 1 \\
 & \pi_{16} + \pi_{26} + \pi_{36} + \pi_{46} \geq 1 \\
 & \pi_{27} + \pi_{37} + \pi_{47} + \pi_{57} \geq 1 \\
 & \pi_{14}, \pi_{15}, \pi_{16}, \dots, \pi_{57} \geq 0
 \end{aligned}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\pi}(D(LP-0_{MCP}))$ dà valore $\frac{1}{2}$ ai 7 spigoli del ciclo 1, 4, 7, 2, 5, 3, 6, 1 di $\overline{G}$:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\pi}_{14} = \tilde{\pi}_{47} = \tilde{\pi}_{27} = \tilde{\pi}_{25} = \tilde{\pi}_{35} = \tilde{\pi}_{36} = \tilde{\pi}_{16} &= \frac{1}{2}, \\
 \tilde{\pi}_{15} = \tilde{\pi}_{24} = \tilde{\pi}_{26} = \tilde{\pi}_{37} = \tilde{\pi}_{46} = \tilde{\pi}_{57} &= 0
 \end{aligned}$$

Ogni vertice sta su due spigoli del ciclo e riceve $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Il valore ottimo $z(D(LP-0_{MCP}))$ è $\frac{7}{2}$.

12.4 Un secondo rilassamento lineare

Per ottenere un rilassamento lineare del modello ILP_{MCP} , rilassiamo i vincoli (12.2c) nei bound $0 \leq x_v \leq 1$. Il modello PL ottenuto è il seguente:

$$\max \sum_{v \in V} x_v \tag{12.5a}$$

$$\text{soggetto a} \quad x_u + x_v \leq 1, \quad \forall \{u, v\} \in \overline{E}, \tag{12.5b}$$

$$x_v \leq 1, \quad \forall v \in V, \tag{12.5c}$$

$$x_v \geq 0, \quad \forall v \in V. \tag{12.5d}$$

Questo modello PL si chiama modello LP_{MCP} .

Esempio 12.5: Modello LP_{MCP}

Il modello LP_{MCP} per l'istanza del MCP dell'Esempio 12.1 è:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \\
 \text{soggetto a} \quad & x_1 + x_4 \leq 1 \\
 & x_1 + x_5 \leq 1 \\
 & x_1 + x_6 \leq 1 \\
 & x_2 + x_4 \leq 1 \\
 & x_2 + x_5 \leq 1 \\
 & x_2 + x_6 \leq 1 \\
 & x_2 + x_7 \leq 1 \\
 & x_3 + x_5 \leq 1 \\
 & x_3 + x_6 \leq 1 \\
 & x_3 + x_7 \leq 1 \\
 & x_4 + x_6 \leq 1 \\
 & x_4 + x_7 \leq 1 \\
 & x_5 + x_7 \leq 1 \\
 & x_1 \leq 1 \\
 & x_2 \leq 1 \\
 & x_3 \leq 1 \\
 & x_4 \leq 1 \\
 & x_5 \leq 1 \\
 & x_6 \leq 1 \\
 & x_7 \leq 1 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
 \end{aligned}$$

Una soluzione ottima $\tilde{x}(LP_{MCP})$ è:

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = \tilde{x}_3 = \tilde{x}_4 = \tilde{x}_5 = \tilde{x}_6 = \tilde{x}_7 = \frac{1}{2}$$

Il valore ottimo $z(LP_{MCP})$ è $\frac{7}{2}$. Di conseguenza, abbiamo l'upper bound:

$$z(ILP_{MCP}) \leq \frac{7}{2}$$

Con una variabile duale non negativa π_{uv} per ogni vincolo (12.5b) e una variabile duale non negativa λ_v per ogni vincolo (12.5c), il modello duale del modello LP_{MCP} è:

$$\min \sum_{\{u,v\} \in \bar{E}} \pi_{uv} + \sum_{v \in V} \lambda_v \quad (12.6a)$$

$$\text{soggetto a } \sum_{u: \{u,v\} \in \bar{E}} \pi_{uv} + \lambda_v \geq 1, \quad \forall v \in V, \quad (12.6b)$$

$$\pi_{uv} \geq 0, \quad \forall \{u,v\} \in \bar{E}, \quad (12.6c)$$

$$\lambda_v \geq 0, \quad \forall v \in V. \quad (12.6d)$$

Questo modello PL si chiama modello $D(\text{LP}_{\text{MCP}})$.

Esempio 12.6: Modello $D(\text{LP}_{\text{MCP}})$

Il modello duale $D(\text{LP}_{\text{MCP}})$ per l'istanza del MCP dell'Esempio 12.1 è:

$$\begin{aligned} \min \quad & \pi_{14} + \pi_{15} + \pi_{16} + \pi_{24} + \pi_{25} + \pi_{26} + \pi_{27} \\ & + \pi_{35} + \pi_{36} + \pi_{37} + \pi_{46} + \pi_{47} + \pi_{57} + \lambda_1 \\ & + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7 \\ \text{soggetto a} \quad & \pi_{14} + \pi_{15} + \pi_{16} + \lambda_1 \geq 1 \\ & \pi_{24} + \pi_{25} + \pi_{26} + \pi_{27} + \lambda_2 \geq 1 \\ & \pi_{35} + \pi_{36} + \pi_{37} + \lambda_3 \geq 1 \\ & \pi_{14} + \pi_{24} + \pi_{46} + \pi_{47} + \lambda_4 \geq 1 \\ & \pi_{15} + \pi_{25} + \pi_{35} + \pi_{57} + \lambda_5 \geq 1 \\ & \pi_{16} + \pi_{26} + \pi_{36} + \pi_{46} + \lambda_6 \geq 1 \\ & \pi_{27} + \pi_{37} + \pi_{47} + \pi_{57} + \lambda_7 \geq 1 \\ & \pi_{14}, \pi_{15}, \pi_{16}, \dots, \pi_{57} \geq 0 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7 \geq 0 \end{aligned}$$

Una soluzione ottima $(\tilde{\pi}, \tilde{\lambda})(D(\text{LP}_{\text{MCP}}))$ è la soluzione dell'Esempio 12.4 con $\tilde{\lambda}_v = 0$ per ogni $v \in V$:

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_{14} = \tilde{\pi}_{47} = \tilde{\pi}_{27} = \tilde{\pi}_{25} = \tilde{\pi}_{35} = \tilde{\pi}_{36} = \tilde{\pi}_{16} &= \frac{1}{2}, \\ \text{tutti gli altri } \tilde{\pi}_{uv} &= 0, \quad \tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2 = \dots = \tilde{\lambda}_7 = 0 \end{aligned}$$

Il valore ottimo $z(D(\text{LP}_{\text{MCP}}))$ è $\frac{7}{2}$.

Proposizione 12.1: Il bound LP può essere arbitrariamente debole

Per ogni grafo G con n vertici, $z(\text{LP}_{\text{MCP}}) \geq n/2$. Di conseguenza, il rapporto $z(\text{LP}_{\text{MCP}})/z(\text{ILP}_{\text{MCP}})$ non è limitato al variare dei grafi.

Dimostrazione. Poniamo $x_v = \frac{1}{2}$ per ogni vertice. Ogni vincolo (12.5b) diventa $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, e i bound (12.5c) e (12.5d) sono soddisfatti: è una soluzione ammissibile di LP_{MCP} di valore $n/2$. I grafi senza triangoli e con almeno uno spigolo hanno $\omega(G) = 2$ per ogni n ,

e per essi il rapporto è almeno $n/4$. □

- I dati sono interi e il valore ottimo del PLI è intero, quindi anche $\lfloor z(\text{LP}_{\text{MCP}}) \rfloor$ è un bound duale. Sull'Esempio 12.1 dà $\lfloor \frac{7}{2} \rfloor = 3 = \omega(G)$ per caso; su un grafo senza triangoli dà $\lfloor n/2 \rfloor$, contro $\omega(G) = 2$.
- Sul ciclo con 5 vertici C_5 , dove $\omega(C_5) = 2$, il punto $x_v = \frac{1}{2}$ dà $z(\text{LP}_{\text{MCP}}) = \frac{5}{2}$.

12.5 Disuguaglianze di clique: una formulazione più forte

Proposizione 12.2: disuguaglianze di clique

Sia $Q \subseteq V$ una clique di $\overline{G}$, cioè un insieme stabile di G . Allora

$$\sum_{v \in Q} x_v \leq 1 \quad (12.7)$$

è una **disuguaglianza valida** per ILP_{MCP} .

Dimostrazione. Una clique di G e un insieme stabile Q di G hanno al più un vertice in comune: due vertici comuni sarebbero insieme adiacenti e non adiacenti. Quindi ogni soluzione ammissibile di ILP_{MCP} seleziona al più un vertice di Q . □

- Le disuguaglianze (12.7) si chiamano **disuguaglianze di clique**, dalla clique Q di $\overline{G}$; lette su G , sono **disuguaglianze di insieme stabile**. I vincoli sui non-spigoli sono il caso $|Q| = 2$.
- Se $Q \subseteq Q'$, la disuguaglianza di Q' implica quella di Q , perché tutte le variabili sono non negative. Basta scrivere le disuguaglianze delle clique **massimali** di $\overline{G}$, la cui famiglia indichiamo con $\mathcal{Q}$.

Con le variabili (12.1), un secondo modello PLI per il problema della clique massima (MCP) è il seguente:

$$\max \sum_{v \in V} x_v \quad (12.8a)$$

$$\text{soggetto a } \sum_{v \in Q} x_v \leq 1, \quad \forall Q \in \mathcal{Q}, \quad (12.8b)$$

$$x_v \in \{0, 1\}, \quad \forall v \in V. \quad (12.8c)$$

Questo modello PLI si chiama modello $\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}$, o **formulazione a clique**.

- Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello $\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}$:
 - la funzione obiettivo lineare (12.8a) massimizza la cardinalità della clique selezionata;

- i vincoli (12.8b) garantiscono che di ogni clique massimale di $\overline{G}$ sia selezionato al più un vertice ($|Q|$ vincoli lineari);
- infine, i vincoli (12.8c) definiscono le variabili del modello PLI.
- Ogni spigolo di $\overline{G}$ sta in una clique massimale, quindi ogni vincolo (12.2b) è implicato da un vincolo (12.8b): i due modelli hanno le stesse soluzioni ammissibili.
- La famiglia $\mathcal{Q}$ può essere molto grande: Moon e Moser (1965) hanno mostrato grafi con $3^{n/3}$ clique massimali. In pratica le disuguaglianze si aggiungono solo quando sono violate, come nel [Capitolo 4 «Disuguaglianze valide»](#) del modulo *Programmazione lineare intera*.

Esempio 12.7: Modello $\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}$

Le clique massimali di $\overline{G}$ nell'Esempio 12.1 sono i 5 triangoli e i 2 spigoli

$$\mathcal{Q} = \{\{1, 4, 6\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 4, 7\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 5, 7\}, \{1, 5\}, \{3, 6\}\},$$

e danno 7 vincoli invece di 13. Il modello $\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}$ per questa istanza del MCP è:

$$\begin{array}{llllllll} \max & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +x_7 \\ \text{soggetto a} & x_1 & & & +x_4 & & +x_6 & \leq 1 \\ & & x_2 & & +x_4 & & +x_6 & \leq 1 \\ & & & x_2 & +x_4 & & & +x_7 \leq 1 \\ & & & & x_2 & +x_5 & & +x_7 \leq 1 \\ & & & & & x_3 & +x_5 & +x_7 \leq 1 \\ & & & & & & x_1 & +x_5 \leq 1 \\ & & & & & & & x_3 & +x_6 \leq 1 \\ & & & & & & & & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7 \in \{0, 1\} \end{array}$$

Una soluzione ottima $\tilde{x}(\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}})$ è:

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = \tilde{x}_3 = 1, \quad \tilde{x}_4 = \tilde{x}_5 = \tilde{x}_6 = \tilde{x}_7 = 0$$

Il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}})$ è $3 = \omega(G)$.

Per ottenere un rilassamento lineare del modello $\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}$, rilassiamo i vincoli (12.8c) in vincoli di non negatività. Il modello PL ottenuto è il seguente:

$$\max \sum_{v \in V} x_v \quad (12.9a)$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{v \in Q} x_v \leq 1, \quad \forall Q \in \mathcal{Q}, \quad (12.9b)$$

$$x_v \geq 0, \quad \forall v \in V. \quad (12.9c)$$

Questo modello PL si chiama modello $\text{LP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}$.

- Ogni vertice sta in qualche clique massimale di $\overline{G}$, quindi i vincoli (12.9b) implicano $x_v \leq 1$: i bound (12.5c) non servono.
- Ogni vincolo (12.5b) è implicato da un vincolo (12.9b). Quindi la regione ammissibile di $\text{LP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}$ è contenuta in quella di LP_{MCP} , e

$$\omega(G) \leq z(\text{LP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}) \leq z(\text{LP}_{\text{MCP}}).$$

Esempio 12.8: Modello $\text{LP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}$

Il modello $\text{LP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}$ per l'istanza del MCP dell'Esempio 12.1 è:

$$\begin{array}{llllllll} \max & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +x_7 \\ \text{soggetto a} & x_1 & & & +x_4 & & +x_6 & \leq 1 \\ & & x_2 & & +x_4 & & +x_6 & \leq 1 \\ & & & x_2 & +x_4 & & & +x_7 \leq 1 \\ & & & & x_2 & & +x_5 & +x_7 \leq 1 \\ & & & & & x_3 & +x_5 & +x_7 \leq 1 \\ & & & & & & x_1 & +x_5 \leq 1 \\ & & & & & & & x_3 & +x_6 \leq 1 \\ & & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{array}$$

Il punto $\bar{x}_v = \frac{1}{2}$ non è più ammissibile: $\bar{x}_1 + \bar{x}_4 + \bar{x}_6 = \frac{3}{2} > 1$. Sommando i tre vincoli di $\{1, 4, 6\}$, $\{2, 5, 7\}$ e $\{3, 5, 7\}$ otteniamo

$$\sum_{v=1}^7 x_v + x_5 + x_7 \leq 3 \implies \sum_{v=1}^7 x_v \leq 3.$$

Una soluzione ottima $\tilde{x}(\text{LP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}})$ è:

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = \tilde{x}_3 = 1, \quad \tilde{x}_4 = \tilde{x}_5 = \tilde{x}_6 = \tilde{x}_7 = 0$$

Il valore ottimo $z(\text{LP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}})$ è $3 = \omega(G)$: il bound LP scende da $\frac{7}{2}$ a 3 e chiude il gap.

- Le disuguaglianze di clique non chiudono sempre il gap. Su C_5 il complementare è ancora un ciclo con 5 vertici, le cui clique massimali sono i suoi spigoli: le due formulazioni coincidono e $z(\text{LP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}) = \frac{5}{2} > 2 = \omega(C_5)$.
- Se C è un ciclo di $\overline{G}$ con un numero dispari di vertici e senza corde, allora $\sum_{v \in C} x_v \leq (|C| - 1)/2$ è una disuguaglianza valida (una **disuguaglianza di ciclo dispari**): un insieme stabile di $\overline{G}$ prende al più $(|C| - 1)/2$ vertici di C . Per C_5 si scrive $x_1 + \dots + x_5 \leq 2$ e chiude il gap.

12.6 La relazione con la colorazione dei vertici

- In una colorazione di G i vertici di una clique hanno colori a due a due diversi, quindi (Capitolo 4 «Problemi di colorazione»)

$$\omega(G) \leq \chi(G).$$

Qui collochiamo il bound LP della formulazione a clique fra i due numeri.

- Le clique massimali di $\overline{G}$ sono gli **insiemi stabili massimali** di G , e una classe di colore è un insieme stabile. Introduciamo le seguenti $|Q|$ **variabili binarie**:

$$y_Q = \begin{cases} 1 & \text{se l'insieme stabile } Q \text{ è una classe di colore} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall Q \in \mathcal{Q}. \quad (12.10)$$

Con queste variabili, un modello PLI per il problema della colorazione dei vertici (VCP) è il seguente:

$$\min \sum_{Q \in \mathcal{Q}} y_Q \quad (12.11a)$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{Q \in \mathcal{Q}: v \in Q} y_Q \geq 1, \quad \forall v \in V, \quad (12.11b)$$

$$y_Q \in \{0, 1\}, \quad \forall Q \in \mathcal{Q}. \quad (12.11c)$$

Questo modello PLI si chiama modello $\text{ILP}_{\text{VCP}}^{\text{ST}}$, o **formulazione a insiemi stabili** del VCP.

- Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello $\text{ILP}_{\text{VCP}}^{\text{ST}}$:
 - la funzione obiettivo lineare (12.11a) minimizza il numero di classi di colore;
 - i vincoli (12.11b) garantiscono che ogni vertice appartenga ad almeno un insieme stabile scelto (n vincoli lineari);
 - infine, i vincoli (12.11c) definiscono le variabili del modello PLI.
- Il suo valore ottimo è $\chi(G)$: un vertice coperto da due insiemi scelti si tiene in uno solo dei due, e ogni sottoinsieme di un insieme stabile è stabile, quindi gli insiemi scelti danno una colorazione con lo stesso numero di colori.

Con una variabile duale non negativa π_Q per ogni vincolo (12.9b), il modello duale del modello $\text{LP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}$ è:

$$\min \sum_{Q \in \mathcal{Q}} \pi_Q \quad (12.12a)$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{Q \in \mathcal{Q}: v \in Q} \pi_Q \geq 1, \quad \forall v \in V, \quad (12.12b)$$

$$\pi_Q \geq 0, \quad \forall Q \in \mathcal{Q}. \quad (12.12c)$$

Questo modello PL si chiama modello $D(LP_{MCP}^{CL})$.

Proposizione 12.3: bound di clique dalla dualità LP

Il modello duale $D(LP_{MCP}^{CL})$ è il rilassamento lineare del modello ILP_{VCP}^{ST} , con le variabili π_Q al posto di y_Q . Quindi

$$\omega(G) \leq z(LP_{MCP}^{CL}) \leq \chi(G).$$

Dimostrazione. Rilassando i vincoli (12.11c) in $y_Q \geq 0$ si ottiene esattamente il modello (12.12), con y_Q al posto di π_Q . Per la dualità forte $z(LP_{MCP}^{CL}) = z(D(LP_{MCP}^{CL}))$. La prima disuguaglianza vale perché LP_{MCP}^{CL} è un rilassamento del MCP. La seconda vale perché $D(LP_{MCP}^{CL})$ è un rilassamento del modello ILP_{VCP}^{ST} , un problema di minimo con valore ottimo $\chi(G)$. $\square$

- Il valore comune $z(LP_{MCP}^{CL})$ si chiama **numero cromatico frazionario** di G . La formulazione a clique del MCP e la formulazione a insiemi stabili del VCP sono due facce dello stesso problema LP.

Esempio 12.9: Modello $D(LP_{MCP}^{CL})$

Il modello duale $D(LP_{MCP}^{CL})$ per l'istanza del MCP dell'Esempio 12.1 ha una variabile per ogni insieme stabile massimale di G (π_{146} per $Q = \{1, 4, 6\}$, e così via):

$$\begin{aligned} \min \quad & \pi_{146} + \pi_{246} + \pi_{247} + \pi_{257} + \pi_{357} + \pi_{15} + \pi_{36} \\ \text{soggetto a} \quad & \pi_{146} + \pi_{15} \geq 1 \\ & \pi_{246} + \pi_{247} + \pi_{257} \geq 1 \\ & \pi_{357} + \pi_{36} \geq 1 \\ & \pi_{146} + \pi_{246} + \pi_{247} \geq 1 \\ & \pi_{257} + \pi_{357} + \pi_{15} \geq 1 \\ & \pi_{146} + \pi_{246} + \pi_{36} \geq 1 \\ & \pi_{247} + \pi_{257} + \pi_{357} \geq 1 \\ & \pi_{146}, \pi_{246}, \pi_{247}, \pi_{257}, \pi_{357}, \pi_{15}, \pi_{36} \geq 0 \end{aligned}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\pi}(D(LP_{MCP}^{CL}))$ dà valore 1 ai moltiplicatori usati nell'Esempio 12.8:

$$\tilde{\pi}_{146} = \tilde{\pi}_{257} = \tilde{\pi}_{357} = 1, \quad \tilde{\pi}_{246} = \tilde{\pi}_{247} = \tilde{\pi}_{15} = \tilde{\pi}_{36} = 0$$

Il valore ottimo $z(D(LP_{MCP}^{CL}))$ è 3.

Esempio 12.10: la catena $\omega \leq z(\text{LP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}) \leq \chi$

- Sull'Esempio 12.1, il modello $\text{ILP}_{\text{VCP}}^{\text{ST}}$ è:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & y_{146} + y_{246} + y_{247} + y_{257} + y_{357} + y_{15} + y_{36} \\
 \text{soggetto a} \quad & y_{146} + y_{15} \geq 1 \\
 & y_{246} + y_{247} + y_{257} \geq 1 \\
 & y_{357} + y_{36} \geq 1 \\
 & y_{146} + y_{246} + y_{247} \geq 1 \\
 & y_{257} + y_{357} + y_{15} \geq 1 \\
 & y_{146} + y_{246} + y_{36} \geq 1 \\
 & y_{247} + y_{257} + y_{357} \geq 1 \\
 & y_{146}, y_{246}, y_{247}, y_{257}, y_{357}, y_{15}, y_{36} \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

Il punto intero $\tilde{y}_{146} = \tilde{y}_{257} = \tilde{y}_{357} = 1$, con tutte le altre variabili pari a 0, è la soluzione dell'Esempio 12.9: è una colorazione con 3 colori, le classi $\{1, 4, 6\}$, $\{2, 5, 7\}$ e $\{3\}$. Quindi $\chi(G) = 3$, e la catena diventa $3 \leq 3 \leq 3$.

- Su C_5 , con vertici $1, \dots, 5$, gli insiemi stabili massimali sono i 5 non-spigoli. Ponendo $\pi_Q = \frac{1}{2}$ su ciascuno di essi ogni vertice riceve in totale 1, quindi il duale ha valore $\frac{5}{2}$, come il primale. La catena diventa

$$\omega(C_5) = 2 < z(\text{LP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}) = \frac{5}{2} < \chi(C_5) = 3.$$

12.7 Insiemi stabili sul grafo complementare

Il problema di questa sezione è il problema dell'insieme stabile massimo (MSSP), definito nel Capitolo 5 «Problemi di clique», Sezione 5.2.

- Dato un grafo semplice $G = (V, E)$, con $V = \{1, 2, \dots, n\}$ e m spigoli, introduciamo le seguenti n **variabili binarie**:

$$x_v = \begin{cases} 1 & \text{se il vertice } v \text{ è selezionato nell'insieme stabile} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall v \in V. \quad (12.13)$$

Con queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema dell'insieme stabile massimo (MSSP) è il seguente:

$$\max \sum_{v \in V} x_v \quad (12.14a)$$

$$\text{soggetto a} \quad x_u + x_v \leq 1, \quad \forall \{u, v\} \in E, \quad (12.14b)$$

$$x_v \in \{0, 1\}, \quad \forall v \in V. \quad (12.14c)$$

Questo modello PLI si chiama modello ILP_{MSSP} , o **formulazione sugli spigoli** del MSSP.

- Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello ILP_{MSSP} :
 - la funzione obiettivo lineare (12.14a) massimizza la cardinalità dell'insieme stabile selezionato;
 - i vincoli (12.14b) garantiscono che due vertici adiacenti non siano selezionati entrambi (m vincoli lineari, uno per ogni spigolo di G);
 - infine, i vincoli (12.14c) definiscono le variabili del modello PLI.
- Il modello ILP_{MSSP} su G è il modello ILP_{MCP} su $\bar{G}$: i non-spigoli di $\bar{G}$ sono gli spigoli di G . È l'identità $\alpha(G) = \omega(\bar{G})$ scritta come modello.

Esempio 12.11: Modello ILP_{MSSP}

Consideriamo il grafo G dell'Esempio 12.1, il ciclo $1, 2, \dots, 7, 1$ con la corda $\{1, 3\}$, e cerchiamo un insieme stabile massimo di G . Il modello ILP_{MSSP} ha 7 variabili binarie e un vincolo per ciascuno degli 8 spigoli di G :

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \\
 \text{soggetto a} \quad & x_1 + x_2 \leq 1 \\
 & x_1 + x_3 \leq 1 \\
 & x_1 + x_7 \leq 1 \\
 & x_2 + x_3 \leq 1 \\
 & x_3 + x_4 \leq 1 \\
 & x_4 + x_5 \leq 1 \\
 & x_5 + x_6 \leq 1 \\
 & x_6 + x_7 \leq 1 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

Una soluzione ottima $\tilde{x}(\text{ILP}_{\text{MSSP}})$ è:

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_4 = \tilde{x}_6 = 1, \quad \tilde{x}_2 = \tilde{x}_3 = \tilde{x}_5 = \tilde{x}_7 = 0$$

Il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{MSSP}})$ è $3 = \alpha(G)$. La soluzione ottima non è unica: gli insiemi stabili massimi di G sono $\{1, 4, 6\}$, $\{2, 4, 6\}$, $\{2, 4, 7\}$, $\{2, 5, 7\}$ e $\{3, 5, 7\}$, i cinque triangoli di $\bar{G}$.

- Un insieme stabile e una clique di G hanno al più un vertice in comune, quindi per ogni clique K di G la **disuguaglianza di clique** $\sum_{v \in K} x_v \leq 1$ è valida, e implica i vincoli (12.14b) degli spigoli di K . Come per il MCP, basta scrivere le disuguaglianze della famiglia $\mathcal{K}$ delle clique **massimali** di G .

Con le variabili (12.13), un secondo modello PLI per il problema dell'insieme stabile massimo

(MSSP) è il seguente:

$$\max \sum_{v \in V} x_v \quad (12.15a)$$

$$\text{soggetto a } \sum_{v \in K} x_v \leq 1, \quad \forall K \in \mathcal{K}, \quad (12.15b)$$

$$x_v \in \{0, 1\}, \quad \forall v \in V. \quad (12.15c)$$

Questo modello PLI si chiama modello $\text{ILP}_{\text{MSSP}}^{\text{CL}}$, o **formulazione a clique** del MSSP.

- Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello $\text{ILP}_{\text{MSSP}}^{\text{CL}}$:
 - la funzione obiettivo lineare (12.15a) massimizza la cardinalità dell'insieme stabile selezionato;
 - i vincoli (12.15b) garantiscono che di ogni clique massimale di G sia selezionato al più un vertice ($|\mathcal{K}|$ vincoli lineari);
 - infine, i vincoli (12.15c) definiscono le variabili del modello PLI.
- Il modello $\text{ILP}_{\text{MSSP}}^{\text{CL}}$ su G è il modello $\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}$ su $\overline{G}$, e il suo rilassamento lineare è forte almeno quanto quello del modello ILP_{MSSP} .

Esempio 12.12: Modello $\text{ILP}_{\text{MSSP}}^{\text{CL}}$

Le clique massimali del grafo G dell'Esempio 12.1 sono il triangolo $\{1, 2, 3\}$ e i cinque spigoli $\{3, 4\}$, $\{4, 5\}$, $\{5, 6\}$, $\{6, 7\}$, $\{1, 7\}$. Il modello $\text{ILP}_{\text{MSSP}}^{\text{CL}}$ sostituisce i tre vincoli del triangolo con un solo vincolo, e ha 6 vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \\ \text{soggetto a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\ & x_3 + x_4 \leq 1 \\ & x_4 + x_5 \leq 1 \\ & x_5 + x_6 \leq 1 \\ & x_6 + x_7 \leq 1 \\ & x_1 + x_7 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

La soluzione ottima $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_4 = \tilde{x}_6 = 1$ dell'Esempio 12.11 è ottima anche qui, con valore $z(\text{ILP}_{\text{MSSP}}^{\text{CL}}) = 3$. I rilassamenti lineari sono diversi (Gurobi): la formulazione sugli spigoli, con $0 \leq x_v \leq 1$, ha valore ottimo $\frac{7}{2}$ in $x_v = \frac{1}{2}$, mentre la formulazione a clique ha valore ottimo 3, raggiunto da $x_2 = x_5 = x_7 = 1$.

12.8 Modelli PLI per le varianti pesate

I problemi di questa sezione sono i problemi della clique massima pesata sui vertici (VWMCP) e pesata sugli spigoli (EWMCP), definiti nel [Capitolo 5 «Problemi di clique»](#), [Sezione 5.5](#), con le loro istanze di riferimento.

12.8.1 Il problema della clique massima pesata sui vertici

- Dato un grafo semplice $G = (V, E)$ e un vettore dei pesi dei vertici $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^n$, usiamo le n **variabili binarie** (12.1) della formulazione sugli spigoli:

$$x_v = \begin{cases} 1 & \text{se il vertice } v \text{ è selezionato nella clique} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall v \in V.$$

Con queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema della clique massima pesata sui vertici (VWMCP) è il seguente:

$$\max \sum_{v \in V} w_v x_v \quad (12.16a)$$

$$\text{soggetto a } x_u + x_v \leq 1, \quad \forall \{u, v\} \in \overline{E}, \quad (12.16b)$$

$$x_v \in \{0, 1\}, \quad \forall v \in V. \quad (12.16c)$$

Questo modello PLI si chiama modello $\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{VW}}$.

- Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello $\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{VW}}$:
 - la funzione obiettivo lineare (12.16a) massimizza il peso totale $w(K)$ della clique selezionata;
 - i vincoli (12.16b) garantiscono che due vertici non adiacenti non siano selezionati entrambi ($|\overline{E}| = \binom{n}{2} - m$ vincoli lineari);
 - infine, i vincoli (12.16c) definiscono le variabili del modello PLI.
- Cambia solo la funzione obiettivo: le soluzioni ammissibili sono le clique di G , come nel modello ILP_{MCP} , e con $w_v = 1$ per ogni vertice i due modelli coincidono. Anche qui sono valide le disuguaglianze di clique di $\overline{G}$.

Esempio 12.13: Modello $\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{VW}}$

Consideriamo il grafo G con 8 vertici su una circonferenza, in cui ogni vertice è adiacente a tutti gli altri tranne quello opposto: G ha 24 spigoli, e $\overline{G}$ ha i 4 spigoli $\{1, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 7\}, \{4, 8\}$. I pesi dei vertici sono:

	$v = 1$	$v = 2$	$v = 3$	$v = 4$	$v = 5$	$v = 6$	$v = 7$	$v = 8$
w_v	5	8	9	5	6	5	5	9

È l'istanza del VWMCP del [Capitolo 5 «Problemi di clique»](#). Il modello $\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{VW}}$ ha 8 variabili binarie e un vincolo per ciascuno dei 4 spigoli di $\overline{G}$:

$$\begin{aligned}
 & \max \quad 5x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 5x_4 + 6x_5 + 5x_6 + 5x_7 + 9x_8 \\
 & \text{soggetto a} \quad x_1 + x_5 \leq 1 \\
 & \quad \quad \quad x_2 + x_6 \leq 1 \\
 & \quad \quad \quad x_3 + x_7 \leq 1 \\
 & \quad \quad \quad x_4 + x_8 \leq 1 \\
 & \quad \quad \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{VW}})$ è:

$$\tilde{x}_2 = \tilde{x}_3 = \tilde{x}_5 = \tilde{x}_8 = 1, \quad \tilde{x}_1 = \tilde{x}_4 = \tilde{x}_6 = \tilde{x}_7 = 0$$

Il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{VW}})$ è $8 + 9 + 6 + 9 = 32$, come indicato nel Capitolo 5 «Problemi di clique». La soluzione ottima associata è la clique $\tilde{K} = \{2, 3, 5, 8\}$, ed è l'unica soluzione ottima: ogni vincolo tiene il vertice più pesante della sua coppia.

12.8.2 Il problema della clique massima pesata sugli spigoli

- Dato un grafo semplice $G = (V, E)$ e un vettore dei pesi degli spigoli $\mathbf{r} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^m$, il peso di uno spigolo si raccoglie solo se entrambi i suoi estremi sono selezionati: il prodotto $x_u x_v$ non è lineare. Introduciamo le n **variabili binarie** (12.1) e le seguenti m **variabili binarie**:

$$y_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{se gli estremi di } \{u, v\} \text{ sono entrambi nella clique} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall \{u, v\} \in E. \quad (12.17)$$

Con queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema della clique massima pesata sugli spigoli (EWMCP) è il seguente:

$$\max \quad \sum_{\{u,v\} \in E} r_{uv} y_{uv} \quad (12.18a)$$

$$\text{soggetto a} \quad y_{uv} \leq x_u, \quad \forall \{u, v\} \in E, \quad (12.18b)$$

$$y_{uv} \leq x_v, \quad \forall \{u, v\} \in E, \quad (12.18c)$$

$$x_u + x_v \leq 1, \quad \forall \{u, v\} \in \overline{E}, \quad (12.18d)$$

$$x_v \in \{0, 1\}, \quad \forall v \in V, \quad (12.18e)$$

$$y_{uv} \in \{0, 1\}, \quad \forall \{u, v\} \in E. \quad (12.18f)$$

Questo modello PLI si chiama modello $\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{EW}}$.

- Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello $\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{EW}}$:
 - la funzione obiettivo lineare (12.18a) massimizza il peso totale $r(K)$ degli spigoli con entrambi gli estremi nella clique selezionata;

- i vincoli (12.18b) e (12.18c) permettono $y_{uv} = 1$ solo se entrambi gli estremi sono selezionati ($2m$ vincoli lineari);
 - i vincoli (12.18d) garantiscono che i vertici selezionati formino una clique ($\binom{n}{2} - m$ vincoli lineari);
 - infine, i vincoli (12.18e) e (12.18f) definiscono le variabili del modello PLI.
- I vincoli (12.18b) e (12.18c) modellano l'implicazione $y_{uv} = 1 \Rightarrow x_u = x_v = 1$. L'implicazione inversa $x_u = x_v = 1 \Rightarrow y_{uv} = 1$, cioè $y_{uv} \geq x_u + x_v - 1$, non serve: poiché $r_{uv} > 0$, in ogni soluzione ottima y_{uv} prende il valore massimo consentito, $\min\{x_u, x_v\}$.

Esempio 12.14: Modello $\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{EW}}$

Consideriamo il grafo G dell'Esempio 12.13, con i pesi degli spigoli dell'istanza dell'EWMCP del Capitolo 5 «Problemi di clique»; sono i coefficienti della funzione obiettivo qui sotto. Il modello $\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{EW}}$ ha $8 + 24 = 32$ variabili binarie, 48 vincoli $y_{uv} \leq x_u$, $y_{uv} \leq x_v$ e 4 vincoli sui non-spigoli:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & y_{12} + 4y_{13} + 5y_{14} + 4y_{16} + 3y_{17} + 3y_{18} \\
 & + 2y_{23} + 5y_{24} + 6y_{25} + 9y_{27} + 4y_{28} + 3y_{34} \\
 & + 6y_{35} + y_{36} + 6y_{38} + 4y_{45} + 7y_{46} + 2y_{47} \\
 & + 5y_{56} + 7y_{57} + 3y_{58} + y_{67} + 2y_{68} + 8y_{78} \\
 \text{soggetto a} \quad & y_{12} \leq x_1 \quad y_{12} \leq x_2 \quad y_{13} \leq x_1 \quad y_{13} \leq x_3 \\
 & y_{14} \leq x_1 \quad y_{14} \leq x_4 \quad y_{16} \leq x_1 \quad y_{16} \leq x_6 \\
 & y_{17} \leq x_1 \quad y_{17} \leq x_7 \quad y_{18} \leq x_1 \quad y_{18} \leq x_8 \\
 & y_{23} \leq x_2 \quad y_{23} \leq x_3 \quad y_{24} \leq x_2 \quad y_{24} \leq x_4 \\
 & y_{25} \leq x_2 \quad y_{25} \leq x_5 \quad y_{27} \leq x_2 \quad y_{27} \leq x_7 \\
 & y_{28} \leq x_2 \quad y_{28} \leq x_8 \quad y_{34} \leq x_3 \quad y_{34} \leq x_4 \\
 & y_{35} \leq x_3 \quad y_{35} \leq x_5 \quad y_{36} \leq x_3 \quad y_{36} \leq x_6 \\
 & y_{38} \leq x_3 \quad y_{38} \leq x_8 \quad y_{45} \leq x_4 \quad y_{45} \leq x_5 \\
 & y_{46} \leq x_4 \quad y_{46} \leq x_6 \quad y_{47} \leq x_4 \quad y_{47} \leq x_7 \\
 & y_{56} \leq x_5 \quad y_{56} \leq x_6 \quad y_{57} \leq x_5 \quad y_{57} \leq x_7 \\
 & y_{58} \leq x_5 \quad y_{58} \leq x_8 \quad y_{67} \leq x_6 \quad y_{67} \leq x_7 \\
 & y_{68} \leq x_6 \quad y_{68} \leq x_8 \quad y_{78} \leq x_7 \quad y_{78} \leq x_8 \\
 & x_1 + x_5 \leq 1 \quad x_2 + x_6 \leq 1 \quad x_3 + x_7 \leq 1 \quad x_4 + x_8 \leq 1 \\
 & x_1, x_2, \dots, x_8 \in \{0, 1\} \\
 & y_{12}, y_{13}, \dots, y_{78} \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

Una soluzione ottima $(\tilde{x}, \tilde{y})(\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{EW}})$ è:

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}_2 = \tilde{x}_5 = \tilde{x}_7 = \tilde{x}_8 = 1, \quad \tilde{x}_1 = \tilde{x}_3 = \tilde{x}_4 = \tilde{x}_6 = 0, \\
 \tilde{y}_{25} = \tilde{y}_{27} = \tilde{y}_{28} = \tilde{y}_{57} = \tilde{y}_{58} = \tilde{y}_{78} = 1, \quad \text{tutte le altre } \tilde{y}_{uv} = 0
 \end{aligned}$$

Il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{EW}})$ è $6 + 9 + 4 + 7 + 3 + 8 = 37$, come indicato nel Capitolo 5 «Problemi di clique». La soluzione ottima associata è la clique $\tilde{K} = \{2, 5, 7, 8\}$, ed è l'unica soluzione ottima.

12.9 Errori tipici

Attenzione

- **Scrivere i vincoli sugli spigoli di G .** La formulazione sugli spigoli del MCP ha un vincolo per ogni *non-spigolo* di G ; sugli spigoli di G gli stessi vincoli descrivono gli insiemi stabili di G .
- **Fidarsi del bound LP della formulazione sugli spigoli.** Il punto $x_v = \frac{1}{2}$ è sempre ammissibile, quindi $z(\text{LP}_{\text{MCP}}) \geq n/2$ anche quando $\omega(G) = 2$.
- **Dimenticare i bound $x_v \leq 1$ nella formulazione sugli spigoli.** Un vertice adiacente a tutti gli altri non compare in nessun vincolo, e LP-0_{MCP} diventa illimitato. Nella formulazione a clique i bound sono implicati.
- **Credere che le disuguaglianze di clique chiudano ogni gap.** Su C_5 coincidono con i vincoli sui non-spigoli, e serve la disuguaglianza di ciclo dispari.
- **Usare clique non massimali di $\overline{G}$.** Le loro disuguaglianze sono valide ma dominate: le clique massimali danno i vincoli più forti di questa famiglia.
- **Confondere i grafi del MCP e del MSSP.** Il modello ILP_{MSSP} ha un vincolo per ogni spigolo di G , il modello ILP_{MCP} uno per ogni spigolo di $\overline{G}$.
- **Scrivere $y_{uv} = x_u x_v$ nel modello pesato sugli spigoli.** Il prodotto non è lineare: i vincoli $y_{uv} \leq x_u$ e $y_{uv} \leq x_v$ lo sostituiscono, e i pesi positivi rendono $y_{uv} = 1$ ogni volta che entrambi gli estremi sono selezionati.

12.10 In sintesi

In sintesi

- La formulazione sugli spigoli ILP_{MCP} ha una variabile binaria per vertice e un vincolo $x_u + x_v \leq 1$ per spigolo di $\overline{G}$: è la formulazione sugli spigoli del MSSP su $\overline{G}$.
- Il suo rilassamento lineare è debole: $x_v = \frac{1}{2}$ è ammissibile e $z(\text{LP}_{\text{MCP}}) \geq n/2$.
- Le disuguaglianze di clique $\sum_{v \in Q} x_v \leq 1$, per le clique massimali Q di $\overline{G}$, danno una formulazione più forte con $\omega(G) \leq z(\text{LP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}) \leq z(\text{LP}_{\text{MCP}})$.
- Il duale di $\text{LP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}$ è il rilassamento lineare di una formulazione di colorazione, quindi $\omega(G) \leq z(\text{LP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}) \leq \chi(G)$.
- Il modello ILP_{MSSP} ha un vincolo $x_u + x_v \leq 1$ per spigolo di G ; con le clique massimali di G diventa la formulazione a clique. Sull'Esempio 12.1 il valore ottimo è $\alpha(G) = 3$.

- Il modello pesato sui vertici cambia solo la funzione obiettivo; il modello pesato sugli spigoli aggiunge una variabile y_{uv} per spigolo, con $y_{uv} \leq x_u$ e $y_{uv} \leq x_v$. Sulle istanze del Capitolo 5 «Problemi di clique» i loro valori ottimi sono 32 e 37.

Cruscotto (massimizzazione). Bound su $\omega(G)$ calcolati in questo capitolo:

istanza	$z(\text{LP}_{\text{MCP}})$	$z(\text{LP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}})$	$\omega(G)$
Esempio 12.1 (ciclo con una corda)	$\frac{7}{2}$	3	3
C_5	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	2 (disuguaglianza di ciclo dispari)

Formulazioni dei problemi di routing

Prerequisiti

- Dal modulo *Programmazione lineare intera*, [Capitolo 1 «Programmazione lineare intera»](#) e [Capitolo 2 «Bound primali e duali»](#): problemi PLI, rilassamenti lineari e bound.
- Da questo modulo, [Capitolo 6 «Problemi di routing»](#): il problema, le sue ipotesi, i giri, la matrice delle distanze e l'istanza dell'Esempio 6.1.

Obiettivi

Alla fine di questo capitolo saremo in grado di:

- scrivere il modello PLI del problema del commesso viaggiatore con le variabili di posizione di Miller-Tucker-Zemlin (MTZ) e spiegare come eliminano i sottogiri;
- scrivere il modello PLI con i vincoli di eliminazione dei sottogiri di Dantzig-Fulkerson-Johnson (DFJ) e dimostrarne la correttezza;
- contare le variabili e i vincoli dei due modelli;
- confrontare i rilassamenti lineari dei due modelli sulla stessa istanza;
- scrivere il modello PLI del TSP asimmetrico e spiegare perché il TSP metrico ha gli stessi modelli del TSP.

13.1 Panoramica della famiglia

- Dato l'insieme $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, n\}$ delle città, i modelli di questo capitolo usano l'insieme degli archi orientati

$$A = \{(i, j) : i, j \in \mathcal{V}, i \neq j\}.$$

Ogni lato $\{i, j\}$ del problema simmetrico è rappresentato dai due archi opposti (i, j) e (j, i) , che hanno lo stesso costo $d_{ij} = d_{ji}$.

- I modelli PLI dei problemi di routing usano una **variabile di arco** binaria x_{ij} per ogni arco $(i, j) \in A$, uguale a 1 se il giro va dalla città i alla città j .
- I **vincoli di grado** impongono che da ogni città esca esattamente un arco e che in ogni città entri esattamente un arco; i modelli differiscono nei vincoli che eliminano i sottogiri.

I modelli di routing sono modelli di assegnamento sugli archi, con i vincoli di grado, più vincoli che vietano i sottogiri. La funzione obiettivo minimizza la distanza totale $\sum_{(i,j) \in A} d_{ij} x_{ij}$.

- La tabella elenca i membri della famiglia, con i nomi dei loro modelli PLI e le sezioni che li scrivono.

Problema	Modello	Eliminazione dei sottogiri	Sezione
TSP	ILP_{TSP}^{MTZ}	variabili di posizione u_i	13.3
TSP	ILP_{TSP}^{DFJ}	un vincolo per ogni sottoinsieme di città	13.4
TSP metrico	$ILP_{TSP}^{MTZ}, ILP_{TSP}^{DFJ}$	i modelli del TSP	13.6
ATSP	ILP_{ATSP}	i vincoli dei modelli del TSP	13.6

13.2 Modelli PLI per il problema del commesso viaggiatore

Il problema del commesso viaggiatore e la sua istanza di riferimento (Esempio 6.1) sono definiti nel [Capitolo 6 «Problemi di routing», Sezione 6.2](#).

- Il TSP ha due modelli PLI classici sulle variabili di arco x_{ij} : il modello di Miller, Tucker e Zemlin (MTZ) della Sezione 13.3, con variabili di posizione, e il modello di Dantzig, Fulkerson e Johnson (DFJ) della Sezione 13.4, con vincoli di eliminazione dei sottogiri.
- La Sezione 13.5 confronta i rilassamenti lineari dei due modelli.

13.3 Un modello con variabili di posizione (MTZ)

- Introduciamo le seguenti $n(n-1)$ **variabili binarie**:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'arco } (i, j) \text{ è percorso dal giro} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall (i, j) \in A,$$

e le seguenti $n-1$ **variabili continue**:

$$u_i = \text{posizione della città } i \text{ dopo la partenza dalla città } 1, \quad \forall i \in \mathcal{V} \setminus \{1\}.$$

La città 1 serve solo come città di riferimento: un giro non ha una città di partenza privilegiata.

Usando queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema del commesso viaggiatore (TSP) è il seguente:

$$\min \sum_{i \in \mathcal{V}} \sum_{\substack{j \in \mathcal{V} \\ j \neq i}} d_{ij} x_{ij} \quad (13.1a)$$

$$\text{soggetto a } \sum_{\substack{j \in \mathcal{V} \\ j \neq i}} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in \mathcal{V}, \quad (13.1b)$$

$$\sum_{\substack{i \in \mathcal{V} \\ i \neq j}} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in \mathcal{V}, \quad (13.1c)$$

$$u_i - u_j + (n-1)x_{ij} \leq n-2, \quad \forall i, j \in \mathcal{V} \setminus \{1\}, i \neq j, \quad (13.1d)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in A, \quad (13.1e)$$

$$1 \leq u_i \leq n-1, \quad \forall i \in \mathcal{V} \setminus \{1\}. \quad (13.1f)$$

Questo modello PLI si chiama modello $\text{ILP}_{\text{TSP}}^{\text{MTZ}}$, o **modello MTZ**.

- Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello $\text{ILP}_{\text{TSP}}^{\text{MTZ}}$:
 - la funzione obiettivo lineare (13.1a) minimizza la distanza totale percorsa dal giro;
 - i vincoli (13.1b) garantiscono che da ogni città esca esattamente un arco (n vincoli lineari);
 - i vincoli (13.1c) garantiscono che in ogni città entri esattamente un arco (n vincoli lineari);
 - i vincoli (13.1d) collegano le variabili di arco con le variabili di posizione ed eliminano i sottogiri che non contengono la città 1 ($(n-1)(n-2)$ vincoli lineari);
 - infine, i vincoli (13.1e) e (13.1f) definiscono le variabili del modello PLI.

Spiegazione del legame fra le variabili

- Per ogni coppia di città i, j diverse dalla città 1, se l'arco (i, j) è percorso, allora la posizione della città j supera di almeno un'unità la posizione della città i . Questa relazione logica è l'implicazione

$$x_{ij} = 1 \implies u_j \geq u_i + 1.$$

- La sua contronominale è

$$u_j < u_i + 1 \implies x_{ij} = 0.$$

In particolare, un arco da una città verso una città nella stessa posizione o in una posizione precedente non può essere percorso.

- Entrambe le implicazioni sono imposte dai vincoli lineari (13.1d). Se $x_{ij} = 1$, allora il vincolo dà $u_i - u_j + (n - 1) \leq n - 2$, ossia $u_j \geq u_i + 1$.
- Viceversa, se $u_j < u_i + 1$, allora il vincolo dà $(n - 1)x_{ij} \leq n - 2 + u_j - u_i < n - 1$. Poiché x_{ij} è binaria, questo impone $x_{ij} = 0$.
- Quando $x_{ij} = 0$, il vincolo diventa $u_i - u_j \leq n - 2$, che è sempre soddisfatto perché entrambe le posizioni appartengono a $[1, n - 1]$. Di conseguenza, $n - 1$ è il più piccolo coefficiente big-M possibile per questi bound.

Proposizione 13.1: I vincoli MTZ eliminano i sottogiri

I vincoli (13.1b)–(13.1f) sono soddisfatti da una soluzione intera se e solo se i suoi archi selezionati formano un unico giro che passa per tutte le città.

Dimostrazione. I vincoli (13.1b) e (13.1c) fanno degli archi selezionati una collezione di cicli orientati disgiunti nei vertici che coprono tutte le città. Supponiamo che uno di questi cicli non contenga la città 1 e visiti, nell'ordine, $i_1, i_2, \dots, i_k$. Poiché ogni arco (i_r, i_{r+1}) è selezionato, l'implicazione precedente dà

$$u_{i_{r+1}} \geq u_{i_r} + 1 \quad r = 1, \dots, k,$$

dove $i_{k+1} = i_1$. Sommando le disuguaglianze otteniamo $u_{i_1} \geq u_{i_1} + k$, una contraddizione. Quindi nessun ciclo può evitare la città 1, e la collezione è un unico giro.

Viceversa, consideriamo un giro qualsiasi e facciamolo partire dalla città 1. Per ogni città $i \neq 1$, poniamo u_i uguale alla posizione in cui la città i è visitata dopo la partenza dalla città 1. I bound (13.1f) valgono. Se un arco selezionato (i, j) ha $i, j \neq 1$, allora la città j segue immediatamente la città i , quindi $u_j = u_i + 1$ e (13.1d) vale. Se l'arco non è selezionato, il vincolo (13.1d) vale grazie ai bound sulle posizioni. Quindi il giro definisce una soluzione intera ammissibile. $\square$

Esempio 13.1: Istanza del TSP

Consideriamo l'insieme $\mathcal{V} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ di 5 città ($n = 5$), con la matrice delle distanze

d_{ij}	1	2	3	4	5
1	—	5	2	2	9
2	5	—	4	3	4
3	2	4	—	4	7
4	2	3	4	—	7
5	9	4	7	7	—

È l'istanza dell'Esempio 6.1 del [Capitolo 6 «Problemi di routing»](#). Chiamiamo questa istanza del TSP [Esempio 13.1](#).

Esempio 13.2: Modello $\text{ILP}_{\text{TSP}}^{\text{MTZ}}$

Il modello $\text{ILP}_{\text{TSP}}^{\text{MTZ}}$ per l'istanza del TSP dell'[Esempio 13.1](#) ha 20 variabili di arco, 4 variabili di posizione, 10 vincoli di grado e 12 vincoli (13.1d):

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 5x_{12} + 2x_{13} + 2x_{14} + 9x_{15} + 5x_{21} + 4x_{23} + 3x_{24} \\
 & + 4x_{25} + 2x_{31} + 4x_{32} + 4x_{34} + 7x_{35} + 2x_{41} + 3x_{42} \\
 & + 4x_{43} + 7x_{45} + 9x_{51} + 4x_{52} + 7x_{53} + 7x_{54} \\
 \text{soggetto a} \quad & x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1 \\
 & x_{21} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1 \\
 & x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{35} = 1 \\
 & x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{45} = 1 \\
 & x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} = 1 \\
 & x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1 \\
 & x_{12} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 1 \\
 & x_{13} + x_{23} + x_{43} + x_{53} = 1 \\
 & x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{54} = 1 \\
 & x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 1 \\
 & u_2 - u_3 + 4x_{23} \leq 3 \\
 & u_2 - u_4 + 4x_{24} \leq 3 \\
 & u_2 - u_5 + 4x_{25} \leq 3 \\
 & u_3 - u_2 + 4x_{32} \leq 3 \\
 & u_3 - u_4 + 4x_{34} \leq 3 \\
 & u_3 - u_5 + 4x_{35} \leq 3 \\
 & u_4 - u_2 + 4x_{42} \leq 3 \\
 & u_4 - u_3 + 4x_{43} \leq 3 \\
 & u_4 - u_5 + 4x_{45} \leq 3 \\
 & u_5 - u_2 + 4x_{52} \leq 3 \\
 & u_5 - u_3 + 4x_{53} \leq 3 \\
 & u_5 - u_4 + 4x_{54} \leq 3 \\
 & x_{12}, x_{13}, x_{14}, \dots, x_{54} \in \{0, 1\} \\
 & u_2, u_3, u_4, u_5 \geq 1 \\
 & u_2, u_3, u_4, u_5 \leq 4
 \end{aligned}$$

Una soluzione ottima $(\tilde{x}, \tilde{u})(\text{ILP}_{\text{TSP}}^{\text{MTZ}})$ è:

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}_{13} = \tilde{x}_{35} = \tilde{x}_{52} = \tilde{x}_{24} = \tilde{x}_{41} = 1, \quad \text{tutte le altre } \tilde{x}_{ij} = 0, \\
 \tilde{u}_3 = 1, \quad \tilde{u}_5 = 2, \quad \tilde{u}_2 = 3, \quad \tilde{u}_4 = 4
 \end{aligned}$$

Il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{TSP}}^{\text{MTZ}})$ è 18. La soluzione ottima associata del TSP è il giro $\tilde{\sigma} = (1, 3, 5, 2, 4)$, di lunghezza $L(\tilde{\sigma}) = 2 + 7 + 4 + 3 + 2 = 18$; è l'unico giro ottimo, a meno del verso di percorrenza.

13.4 Un modello con vincoli di eliminazione dei sottogiri (DFJ)

- Il secondo modello usa solo le $n(n-1)$ variabili di arco x_{ij} del modello MTZ: non ci sono variabili di posizione. I sottogiri sono vietati direttamente, con un vincolo per ogni sottoinsieme di città.

Usando queste variabili, un secondo modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema del commesso viaggiatore (TSP) è il seguente:

$$\min \sum_{i \in \mathcal{V}} \sum_{\substack{j \in \mathcal{V} \\ j \neq i}} d_{ij} x_{ij} \quad (13.2a)$$

$$\text{soggetto a } \sum_{\substack{j \in \mathcal{V} \\ j \neq i}} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in \mathcal{V}, \quad (13.2b)$$

$$\sum_{\substack{i \in \mathcal{V} \\ i \neq j}} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in \mathcal{V}, \quad (13.2c)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{\substack{j \in S \\ j \neq i}} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad \forall S \subseteq \mathcal{V} \setminus \{1\}, |S| \geq 2, \quad (13.2d)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in A. \quad (13.2e)$$

Questo modello PLI si chiama modello $\text{ILP}_{\text{TSP}}^{\text{DFJ}}$, o **modello DFJ**.

- Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello $\text{ILP}_{\text{TSP}}^{\text{DFJ}}$:
 - la funzione obiettivo (13.2a) e i vincoli di grado (13.2b) e (13.2c) sono quelli del modello MTZ;
 - i vincoli (13.2d) si chiamano **vincoli di eliminazione dei sottogiri**: un giro non può contenere tutti gli $|S|$ archi di un ciclo sulle città di S , quindi usa al più $|S| - 1$ archi dentro S ($2^{n-1} - n$ vincoli lineari);
 - infine, i vincoli (13.2e) definiscono le variabili del modello PLI.
- Il numero $2^{n-1} - n$ dei vincoli (13.2d) è esponenziale in n : per $n = 5$ sono 11, per $n = 20$ sono 524 268.

Proposizione 13.2: Vincoli di eliminazione dei sottogiri

I vincoli (13.2b)–(13.2e) sono soddisfatti da una soluzione intera se e solo se i suoi archi selezionati formano un unico giro che passa per tutte le città.

Dimostrazione. Sia dato un giro e sia $S \subseteq \mathcal{V} \setminus \{1\}$ con $|S| \geq 2$. Se il giro usasse $|S|$ archi dentro S , questi archi formerebbero un ciclo sulle città di S , che non è l'intero giro perché $1 \notin S$: una contraddizione. Quindi (13.2d) vale, e i vincoli di grado valgono per definizione di giro.

Viceversa, i vincoli (13.2b) e (13.2c) fanno degli archi selezionati una collezione di cicli orientati disgiunti nei vertici. Se ci fosse più di un ciclo, uno di essi non conterrebbe la città 1. Sia S l'insieme delle sue città: allora $|S| \geq 2$ e il ciclo usa $|S|$ archi dentro S , il che viola (13.2d). Quindi c'è un unico ciclo, un giro. $\square$

Esempio 13.3: Modello $\text{ILP}_{\text{TSP}}^{\text{DFJ}}$

Il modello $\text{ILP}_{\text{TSP}}^{\text{DFJ}}$ per l'istanza del TSP dell'Esempio 13.1 ha 20 variabili di arco, 10 vincoli di grado e 11 vincoli (13.2d), uno per ogni sottoinsieme $S \subseteq \{2, 3, 4, 5\}$ con almeno due città:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 5x_{12} + 2x_{13} + 2x_{14} + 9x_{15} + 5x_{21} + 4x_{23} + 3x_{24} \\
 & + 4x_{25} + 2x_{31} + 4x_{32} + 4x_{34} + 7x_{35} + 2x_{41} + 3x_{42} \\
 & + 4x_{43} + 7x_{45} + 9x_{51} + 4x_{52} + 7x_{53} + 7x_{54} \\
 \text{soggetto a} \quad & x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1 \\
 & x_{21} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1 \\
 & x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{35} = 1 \\
 & x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{45} = 1 \\
 & x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} = 1 \\
 & x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1 \\
 & x_{12} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 1 \\
 & x_{13} + x_{23} + x_{43} + x_{53} = 1 \\
 & x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{54} = 1 \\
 & x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 1 \\
 & x_{23} + x_{32} \leq 1 \\
 & x_{24} + x_{42} \leq 1 \\
 & x_{25} + x_{52} \leq 1 \\
 & x_{34} + x_{43} \leq 1 \\
 & x_{35} + x_{53} \leq 1 \\
 & x_{45} + x_{54} \leq 1 \\
 & x_{23} + x_{24} + x_{32} + x_{34} + x_{42} + x_{43} \leq 2 \\
 & x_{23} + x_{25} + x_{32} + x_{35} + x_{52} + x_{53} \leq 2 \\
 & x_{24} + x_{25} + x_{42} + x_{45} + x_{52} + x_{54} \leq 2 \\
 & x_{34} + x_{35} + x_{43} + x_{45} + x_{53} + x_{54} \leq 2 \\
 & x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{32} + x_{34} + x_{35} + x_{42} + x_{43} + x_{45} + x_{52} + x_{53} + x_{54} \leq 3 \\
 & x_{12}, x_{13}, x_{14}, \dots, x_{54} \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

Il sottogiro $2 \rightarrow 5 \rightarrow 2$ insieme al sottogiro $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ soddisfa i vincoli di grado ma viola il vincolo $x_{25} + x_{52} \leq 1$ di $S = \{2, 5\}$. Una soluzione ottima $\tilde{x}(\text{ILP}_{\text{TSP}}^{\text{DFJ}})$ è il giro

$\tilde{\sigma} = (1, 3, 5, 2, 4)$:

$$\tilde{x}_{13} = \tilde{x}_{35} = \tilde{x}_{52} = \tilde{x}_{24} = \tilde{x}_{41} = 1, \text{ tutte le altre } \tilde{x}_{ij} = 0$$

Il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{TSP}}^{\text{DFJ}})$ è 18.

13.5 Rilassamenti lineari

13.5.1 Il rilassamento di assegnamento

Tenendo solo i vincoli di grado dei due modelli e rilassando i vincoli di binarietà in vincoli di non negatività, otteniamo il seguente modello LP:

$$\min \sum_{i \in \mathcal{V}} \sum_{\substack{j \in \mathcal{V} \\ j \neq i}} d_{ij} x_{ij} \quad (13.3a)$$

$$\text{soggetto a } \sum_{\substack{j \in \mathcal{V} \\ j \neq i}} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in \mathcal{V}, \quad (13.3b)$$

$$\sum_{\substack{i \in \mathcal{V} \\ i \neq j}} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in \mathcal{V}, \quad (13.3c)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall (i, j) \in A. \quad (13.3d)$$

Questo modello LP si chiama modello LP-0_{TSP} , o **rilassamento di assegnamento**.

- Aggiungere gli upper bound $x_{ij} \leq 1$ non cambia questo rilassamento, né i due rilassamenti seguenti: per ogni arco (i, j) , la non negatività e l'equazione di grado (13.3b) danno

$$x_{ij} \leq \sum_{\substack{k \in \mathcal{V} \\ k \neq i}} x_{ik} = 1.$$

Esempio 13.4: Modello LP-0_{TSP}

Il modello LP-0_{TSP} per l'istanza del TSP dell'Esempio 13.1 è:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 5x_{12} + 2x_{13} + 2x_{14} + 9x_{15} + 5x_{21} + 4x_{23} + 3x_{24} \\
 & + 4x_{25} + 2x_{31} + 4x_{32} + 4x_{34} + 7x_{35} + 2x_{41} + 3x_{42} \\
 & + 4x_{43} + 7x_{45} + 9x_{51} + 4x_{52} + 7x_{53} + 7x_{54} \\
 \text{soggetto a} \quad & x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1 \\
 & x_{21} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1 \\
 & x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{35} = 1 \\
 & x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{45} = 1 \\
 & x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} = 1 \\
 & x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1 \\
 & x_{12} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 1 \\
 & x_{13} + x_{23} + x_{43} + x_{53} = 1 \\
 & x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{54} = 1 \\
 & x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 1 \\
 & x_{12}, x_{13}, x_{14}, \dots, x_{54} \geq 0
 \end{aligned}$$

Una soluzione ottima $\tilde{x}(\text{LP-0}_{\text{TSP}})$ è:

$$\tilde{x}_{13} = \tilde{x}_{34} = \tilde{x}_{41} = \tilde{x}_{25} = \tilde{x}_{52} = 1, \text{ tutte le altre } \tilde{x}_{ij} = 0$$

È intera, ma è formata dai due sottogiri $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ e $2 \rightarrow 5 \rightarrow 2$. Il valore ottimo $z(\text{LP-0}_{\text{TSP}})$ è 16. Di conseguenza, abbiamo il lower bound:

$$16 \leq z(\text{ILP}_{\text{TSP}}^{\text{MTZ}}) = z(\text{ILP}_{\text{TSP}}^{\text{DFJ}})$$

13.5.2 Il rilassamento del modello MTZ

Per ottenere un rilassamento lineare del modello $\text{ILP}_{\text{TSP}}^{\text{MTZ}}$, rilassiamo i vincoli (13.1e) in vincoli di non negatività; le variabili di posizione mantengono i loro bound. Il modello LP ottenuto è il seguente:

$$\min \sum_{i \in \mathcal{V}} \sum_{\substack{j \in \mathcal{V} \\ j \neq i}} d_{ij} x_{ij} \quad (13.4a)$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{\substack{j \in \mathcal{V} \\ j \neq i}} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in \mathcal{V}, \quad (13.4b)$$

$$\sum_{\substack{i \in \mathcal{V} \\ i \neq j}} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in \mathcal{V}, \quad (13.4c)$$

$$u_i - u_j + (n-1)x_{ij} \leq n-2, \quad \forall i, j \in \mathcal{V} \setminus \{1\}, i \neq j, \quad (13.4d)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall (i, j) \in A, \quad (13.4e)$$

$$1 \leq u_i \leq n-1, \quad \forall i \in \mathcal{V} \setminus \{1\}. \quad (13.4f)$$

Questo modello LP si chiama modello $\text{LP}_{\text{TSP}}^{\text{MTZ}}$.

Proposizione 13.3: Una regione debole del rilassamento MTZ

Sia (x, u) tale da soddisfare le equazioni di grado (13.4b)–(13.4c), con $x_{ij} \geq 0$. Se

$$x_{ij} \leq \frac{n-2}{n-1} \quad \forall i, j \in \mathcal{V} \setminus \{1\}, i \neq j,$$

allora (x, u) è ammissibile per $\text{LP}_{\text{TSP}}^{\text{MTZ}}$ dopo aver posto $u_i = 1$ per ogni $i \neq 1$.

Dimostrazione. Con $u_i = u_j = 1$, ogni vincolo (13.4d) diventa

$$(n-1)x_{ij} \leq n-2,$$

che è esattamente l'upper bound assunto. Anche i bound (13.4f) sulle variabili di posizione valgono. $\square$

- La proposizione mostra perché la formulazione compatta MTZ può avere un lower bound debole: molte soluzioni frazionarie del rilassamento di assegnamento soddisfano già i vincoli di ordinamento.

Esempio 13.5: Modello $\text{LP}_{\text{TSP}}^{\text{MTZ}}$

Il modello $\text{LP}_{\text{TSP}}^{\text{MTZ}}$ per l'istanza del TSP dell'Esempio 13.1 è:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 5x_{12} + 2x_{13} + 2x_{14} + 9x_{15} + 5x_{21} + 4x_{23} + 3x_{24} \\
 & + 4x_{25} + 2x_{31} + 4x_{32} + 4x_{34} + 7x_{35} + 2x_{41} + 3x_{42} \\
 & + 4x_{43} + 7x_{45} + 9x_{51} + 4x_{52} + 7x_{53} + 7x_{54} \\
 \text{soggetto a} \quad & x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1 \\
 & x_{21} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1 \\
 & x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{35} = 1 \\
 & x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{45} = 1 \\
 & x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} = 1 \\
 & x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1 \\
 & x_{12} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 1 \\
 & x_{13} + x_{23} + x_{43} + x_{53} = 1 \\
 & x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{54} = 1 \\
 & x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 1 \\
 & u_2 - u_3 + 4x_{23} \leq 3 \\
 & u_2 - u_4 + 4x_{24} \leq 3 \\
 & u_2 - u_5 + 4x_{25} \leq 3 \\
 & u_3 - u_2 + 4x_{32} \leq 3 \\
 & u_3 - u_4 + 4x_{34} \leq 3 \\
 & u_3 - u_5 + 4x_{35} \leq 3 \\
 & u_4 - u_2 + 4x_{42} \leq 3 \\
 & u_4 - u_3 + 4x_{43} \leq 3 \\
 & u_4 - u_5 + 4x_{45} \leq 3 \\
 & u_5 - u_2 + 4x_{52} \leq 3 \\
 & u_5 - u_3 + 4x_{53} \leq 3 \\
 & u_5 - u_4 + 4x_{54} \leq 3 \\
 & x_{12}, x_{13}, x_{14}, \dots, x_{54} \geq 0 \\
 & u_2, u_3, u_4, u_5 \geq 1 \\
 & u_2, u_3, u_4, u_5 \leq 4
 \end{aligned}$$

Una soluzione ottima $(\tilde{x}, \tilde{u})(\text{LP}_{\text{TSP}}^{\text{MTZ}})$ è:

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}_{13} = 1, \quad \tilde{x}_{31} = \tilde{x}_{34} = \tilde{x}_{41} = \frac{1}{2}, \quad \tilde{x}_{25} = \tilde{x}_{52} = \frac{3}{4}, \\
 \tilde{x}_{24} = \tilde{x}_{42} = \tilde{x}_{45} = \tilde{x}_{54} = \frac{1}{4}, \quad \text{tutte le altre } \tilde{x}_{ij} = 0, \\
 \tilde{u}_2 = \tilde{u}_3 = \tilde{u}_4 = \tilde{u}_5 = 1
 \end{aligned}$$

Tutti gli archi fra le città 2, 3, 4, 5 hanno valore al più $\frac{3}{4} = \frac{n-2}{n-1}$, come nella Proposizione 13.3.

Il valore ottimo $z(\text{LP}_{\text{TSP}}^{\text{MTZ}})$ è 17. Di conseguenza, abbiamo il lower bound:

$$17 \leq z(\text{ILP}_{\text{TSP}}^{\text{MTZ}})$$

13.5.3 Il rilassamento del modello DFJ

Per ottenere un rilassamento lineare del modello $\text{ILP}_{\text{TSP}}^{\text{DFJ}}$, rilassiamo i vincoli (13.2e) in vincoli di non negatività. Il modello LP ottenuto è il seguente:

$$\min \sum_{i \in \mathcal{V}} \sum_{\substack{j \in \mathcal{V} \\ j \neq i}} d_{ij} x_{ij} \quad (13.5a)$$

$$\text{soggetto a } \sum_{\substack{j \in \mathcal{V} \\ j \neq i}} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in \mathcal{V}, \quad (13.5b)$$

$$\sum_{\substack{i \in \mathcal{V} \\ i \neq j}} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in \mathcal{V}, \quad (13.5c)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{\substack{j \in S \\ j \neq i}} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad \forall S \subseteq \mathcal{V} \setminus \{1\}, |S| \geq 2, \quad (13.5d)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall (i, j) \in A. \quad (13.5e)$$

Questo modello LP si chiama modello $\text{LP}_{\text{TSP}}^{\text{DFJ}}$.

- Il modello MTZ è prezioso perché ha solo $O(n^2)$ variabili e vincoli. Il modello DFJ ha un rilassamento più forte, ma un numero esponenziale di vincoli: in pratica, i vincoli di eliminazione dei sottogiri si aggiungono solo quando sono violati dalla soluzione corrente del rilassamento.

Esempio 13.6: Modello $\text{LP}_{\text{TSP}}^{\text{DFJ}}$

Il modello $\text{LP}_{\text{TSP}}^{\text{DFJ}}$ per l'istanza del TSP dell'Esempio 13.1 è:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 5x_{12} + 2x_{13} + 2x_{14} + 9x_{15} + 5x_{21} + 4x_{23} + 3x_{24} \\
 & + 4x_{25} + 2x_{31} + 4x_{32} + 4x_{34} + 7x_{35} + 2x_{41} + 3x_{42} \\
 & + 4x_{43} + 7x_{45} + 9x_{51} + 4x_{52} + 7x_{53} + 7x_{54} \\
 \text{soggetto a} \quad & x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1 \\
 & x_{21} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1 \\
 & x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{35} = 1 \\
 & x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{45} = 1 \\
 & x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} = 1 \\
 & x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1 \\
 & x_{12} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 1 \\
 & x_{13} + x_{23} + x_{43} + x_{53} = 1 \\
 & x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{54} = 1 \\
 & x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 1 \\
 & x_{23} + x_{32} \leq 1 \\
 & x_{24} + x_{42} \leq 1 \\
 & x_{25} + x_{52} \leq 1 \\
 & x_{34} + x_{43} \leq 1 \\
 & x_{35} + x_{53} \leq 1 \\
 & x_{45} + x_{54} \leq 1 \\
 & x_{23} + x_{24} + x_{32} + x_{34} + x_{42} + x_{43} \leq 2 \\
 & x_{23} + x_{25} + x_{32} + x_{35} + x_{52} + x_{53} \leq 2 \\
 & x_{24} + x_{25} + x_{42} + x_{45} + x_{52} + x_{54} \leq 2 \\
 & x_{34} + x_{35} + x_{43} + x_{45} + x_{53} + x_{54} \leq 2 \\
 & x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{32} + x_{34} + x_{35} + x_{42} + x_{43} + x_{45} + x_{52} + x_{53} + x_{54} \leq 3 \\
 & x_{12}, x_{13}, x_{14}, \dots, x_{54} \geq 0
 \end{aligned}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{LP}_{\text{TSP}}^{\text{DFJ}})$ è il giro $\tilde{\sigma} = (1, 3, 5, 2, 4)$:

$$\tilde{x}_{13} = \tilde{x}_{35} = \tilde{x}_{52} = \tilde{x}_{24} = \tilde{x}_{41} = 1, \text{ tutte le altre } \tilde{x}_{ij} = 0$$

Il valore ottimo $z(\text{LP}_{\text{TSP}}^{\text{DFJ}})$ è 18: su questa istanza il rilassamento chiude il gap.

Esempio 13.7: Confronto fra i rilassamenti

Per l'istanza del TSP dell'Esempio 13.1, i tre rilassamenti danno i seguenti lower bound sul valore ottimo 18:

Rilassamento	Valore ottimo
LP-0 _{TSP} (rilassamento di assegnamento)	16
LP _{TSP} ^{MTZ}	17
LP _{TSP} ^{DFJ}	18

I vincoli di ordinamento alzano il bound da 16 a 17; i vincoli di eliminazione dei sottogiri chiudono il gap su questa istanza.

13.6 Modelli PLI per il TSP metrico e asimmetrico

I problemi di questa sezione sono il problema del commesso viaggiatore asimmetrico (ATSP) e il TSP metrico, definiti nel [Capitolo 6 «Problemi di routing», Sezione 6.6](#).

- Dato l'insieme $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, n\}$ delle città e l'insieme A degli archi orientati, ogni arco (i, j) ha la sua distanza d_{ij} , che può differire da d_{ji} . Introduciamo le seguenti $n(n-1)$ **variabili binarie**:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'arco } (i, j) \text{ è percorso dal giro} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall (i, j) \in A.$$

Usando queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema del commesso viaggiatore asimmetrico (ATSP) è il seguente:

$$\min \sum_{i \in \mathcal{V}} \sum_{\substack{j \in \mathcal{V} \\ j \neq i}} d_{ij} x_{ij} \quad (13.6a)$$

$$\text{soggetto a } \sum_{\substack{j \in \mathcal{V} \\ j \neq i}} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in \mathcal{V}, \quad (13.6b)$$

$$\sum_{\substack{i \in \mathcal{V} \\ i \neq j}} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in \mathcal{V}, \quad (13.6c)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{\substack{j \in S \\ j \neq i}} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad \forall S \subseteq \mathcal{V} \setminus \{1\}, |S| \geq 2, \quad (13.6d)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in A. \quad (13.6e)$$

Questo modello PLI si chiama modello ILP_{ATSP}.

- Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello ILP_{ATSP}:
 - la funzione obiettivo lineare (13.6a) minimizza la distanza totale percorsa lungo gli archi del giro, ciascun arco con la sua distanza;

- i vincoli (13.6b) e (13.6c) garantiscono che da ogni città esca esattamente un arco e che in ogni città entri esattamente un arco ($2n$ vincoli lineari);
 - i vincoli (13.6d) sono i vincoli di eliminazione dei sottogiri ($2^{n-1} - n$ vincoli lineari);
 - infine, i vincoli (13.6e) definiscono le variabili del modello PLI.
- Il modello ILP_{ATSP} è il modello $\text{ILP}_{\text{TSP}}^{\text{DFJ}}$ con le distanze degli archi: la sua dimostrazione di correttezza, la Proposizione 13.2, non usa mai $d_{ij} = d_{ji}$. Per lo stesso motivo anche il modello $\text{ILP}_{\text{TSP}}^{\text{MTZ}}$ è un modello PLI dell'ATSP.
 - Un giro e lo stesso giro percorso al contrario usano archi opposti: nell'ATSP sono soluzioni diverse, in generale di lunghezze diverse.
 - Il TSP metrico, definito nel [Capitolo 6 «Problemi di routing»](#), ha gli stessi modelli PLI del TSP: la disuguaglianza triangolare è una proprietà delle distanze, non un vincolo del modello. L'istanza dell'[Esempio 13.1](#) è metrica, quindi i modelli $\text{ILP}_{\text{TSP}}^{\text{MTZ}}$ e $\text{ILP}_{\text{TSP}}^{\text{DFJ}}$ scritti per essa sono già modelli di un'istanza del TSP metrico.

Esempio 13.8: Modello ILP_{ATSP}

Consideriamo l'insieme $\mathcal{V} = \{1, 2, 3, 4\}$ di 4 città ($n = 4$), con la matrice delle distanze asimmetrica

d_{ij}	1	2	3	4
1	–	2	7	7
2	2	–	4	2
3	9	7	–	1
4	2	4	1	–

Per esempio, $d_{13} = 7$ e $d_{31} = 9$. Il modello ILP_{ATSP} per questa istanza dell'ATSP ha 12 variabili di arco, 8 vincoli di grado e 4 vincoli di eliminazione dei sottogiri, uno per ogni sottoinsieme $S \subseteq \{2, 3, 4\}$ con almeno due città:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 2x_{12} + 7x_{13} + 7x_{14} + 2x_{21} + 4x_{23} + 2x_{24} \\
 & + 9x_{31} + 7x_{32} + x_{34} + 2x_{41} + 4x_{42} + x_{43} \\
 \text{soggetto a} \quad & x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \\
 & x_{21} + x_{23} + x_{24} = 1 \\
 & x_{31} + x_{32} + x_{34} = 1 \\
 & x_{41} + x_{42} + x_{43} = 1 \\
 & x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1 \\
 & x_{12} + x_{32} + x_{42} = 1 \\
 & x_{13} + x_{23} + x_{43} = 1 \\
 & x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1 \\
 & x_{23} + x_{32} \leq 1 \\
 & x_{24} + x_{42} \leq 1 \\
 & x_{34} + x_{43} \leq 1 \\
 & x_{23} + x_{24} + x_{32} + x_{34} + x_{42} + x_{43} \leq 2 \\
 & x_{12}, x_{13}, x_{14}, \dots, x_{43} \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

I due sottogiri $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ e $3 \rightarrow 4 \rightarrow 3$, di lunghezza totale $2 + 2 + 1 + 1 = 6$, soddisfano i vincoli di grado ma violano il vincolo $x_{34} + x_{43} \leq 1$ di $S = \{3, 4\}$. Una soluzione ottima $\tilde{x}(\text{ILP}_{\text{ATSP}})$ è il giro $\tilde{\sigma} = (1, 2, 3, 4)$:

$$\tilde{x}_{12} = \tilde{x}_{23} = \tilde{x}_{34} = \tilde{x}_{41} = 1, \text{ tutte le altre } \tilde{x}_{ij} = 0$$

Il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{ATSP}})$ è $2 + 4 + 1 + 2 = 9$, e il giro ottimo è unico. Lo stesso giro percorso al contrario, $(1, 4, 3, 2)$, ha lunghezza $7 + 1 + 7 + 2 = 17$.

13.7 Errori tipici

Attenzione

- **Scrivere i vincoli MTZ per la città 1.** I vincoli (13.1d) si scrivono solo per le coppie di città diverse dalla città 1: la città 1 non ha variabile di posizione.
- **Usare un big-M minore di $n - 1$.** Scritto come $u_i - u_j + Mx_{ij} \leq M - 1$, il vincolo con $M < n - 1$ taglia giri ammissibili: quando $x_{ij} = 0$ richiede $u_i - u_j \leq M - 1 < n - 2$, mentre due posizioni possono differire di $n - 2$; $M = n - 1$ è il più piccolo valore valido.
- **Prendere $S = \mathcal{V}$ nei vincoli di eliminazione dei sottogiri.** Un giro usa $|\mathcal{V}|$ archi dentro $\mathcal{V}$: il vincolo taglierebbe ogni giro. Gli insiemi S sono sottoinsiemi propri delle città, con almeno due città.
- **Fidarsi del bound MTZ.** Per la Proposizione 13.3, molte soluzioni frazionarie del rilassamento di assegnamento sono ammissibili per il rilassamento MTZ: la formulazione compatta non è forte.

- **Elencare tutti i vincoli di eliminazione dei sottogiri.** Il loro numero è $2^{n-1} - n$: non si scrivono tutti insieme, ma si aggiungono quando sono violati.
- **Identificare un giro con il suo inverso nell'ATSP.** Con distanze asimmetriche i due versi di un giro sono soluzioni diverse: nell'Esempio 13.8 hanno lunghezze 9 e 17.
- **Aggiungere la disuguaglianza triangolare come vincolo.** Nel TSP metrico la disuguaglianza triangolare vale per i dati d_{ij} ; le variabili del modello sono le stesse del TSP.

13.8 In sintesi

In sintesi

- I due modelli hanno le stesse variabili di arco x_{ij} e gli stessi vincoli di grado; differiscono nel modo in cui vietano i sottogiri.
- Il modello MTZ aggiunge $n - 1$ variabili di posizione e $(n - 1)(n - 2)$ vincoli: è compatto, ma il suo rilassamento è debole.
- Il modello DFJ aggiunge $2^{n-1} - n$ vincoli di eliminazione dei sottogiri: il rilassamento è più forte, e i vincoli si generano quando servono.
- Entrambi i modelli sono corretti: una soluzione intera è ammissibile se e solo se i suoi archi formano un unico giro.
- Entrambi i modelli sono scritti sugli archi, quindi sono anche modelli dell'ATSP: il modello ILP_{ATSP} è il modello DFJ in cui è ammesso $d_{ij} \neq d_{ji}$. Il TSP metrico ha gli stessi modelli del TSP.
- Dal modulo *Programmazione lineare intera*, il Capitolo 8 «Branch-and-cut» mostra come i vincoli di eliminazione dei sottogiri si aggiungono solo quando sono violati.

Quadro riassuntivo dell'istanza del capitolo. Lower bound sul valore ottimo 18 calcolati in questo capitolo:

Bound	Valore	Da
Rilassamento di assegnamento	16	$z(LP-0_{TSP})$
Rilassamento MTZ	17	$z(LP_{TSP}^{MTZ})$
Rilassamento DFJ	18	$z(LP_{TSP}^{DFJ})$
Valore ottimo	18	giro $\sigma = (1, 3, 5, 2, 4)$

Formulazioni dei problemi di scheduling

Prerequisiti

- Dal modulo *Programmazione lineare*, [Capitolo 9 «Teoria della dualità»](#): il duale di un problema LP, dualità debole e forte.
- Dal modulo *Programmazione lineare intera*, [Capitolo 1 «Programmazione lineare intera»](#) e [Capitolo 2 «Bound primali e duali»](#): problemi ILP, rilassamenti lineari e bound.
- Da questo modulo, [Capitolo 7 «Problemi di scheduling»](#): il problema, la sua ipotesi, il makespan e l'istanza dell'Esempio 7.1.

Obiettivi

Alla fine di questo capitolo saremo in grado di:

- scrivere il modello PLI di $P||C_{\max}$ e spiegare come la variabile di makespan è collegata ai carichi delle macchine;
- scrivere i rilassamenti lineari e i loro duali, e dimostrare che il loro valore ottimo è $\sum_j t_j/m$;
- dimostrare che il bound LP vale almeno $1/m$ del valore ottimo, e che il fattore è tight;
- usare le disuguaglianze valide e i vincoli di rottura delle simmetrie del modello.

14.1 Panoramica della famiglia

- I modelli PLI dei problemi di scheduling su macchine parallele usano l'insieme $\mathcal{H} = \{1, 2, \dots, m\}$ delle macchine e una **variabile di assegnamento** binaria x_{jh} per ogni lavoro $j \in \mathcal{J}$ e ogni macchina $h \in \mathcal{H}$.
- Una variabile continua $C_{\max}$ rappresenta il makespan: un vincolo per ogni macchina impone che $C_{\max}$ sia almeno pari al carico della macchina.
- La funzione obiettivo minimizza $C_{\max}$, quindi all'ottimo è uguale al carico massimo.

I modelli di scheduling sono modelli di assegnamento dei lavori alle macchine, come i modelli di packing assegnano gli oggetti ai contenitori; l'obiettivo min-max è linearizzato con la variabile di makespan $C_{\max}$.

- La tabella elenca i membri della famiglia, con il nome del loro modello PLI e la sezione che lo scrive.

Problema	Modello	Variabili	Sezione
$P C_{\max}$	ILP $_{P C_{\max}}$	x_{jh} binarie e $C_{\max}$ continua	14.2

14.2 Un modello PLI per il problema di scheduling su macchine parallele identiche

Il problema di questa sezione è lo scheduling su macchine parallele identiche ($P||C_{\max}$), definito nel [Capitolo 7 «Problemi di scheduling»](#).

- Date m macchine identiche e un insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, \dots, n\}$ di n lavori, con tempi di processamento t_j , indichiamo con $\mathcal{H} = \{1, 2, \dots, m\}$ l'insieme delle macchine.
- Introduciamo le seguenti nm **variabili binarie**:

$$x_{jh} = \begin{cases} 1 & \text{se il lavoro } j \text{ è assegnato alla macchina } h \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall j \in \mathcal{J}, \forall h \in \mathcal{H},$$

e una **variabile continua non negativa**:

$$C_{\max} = \text{makespan della schedula.}$$

Usando queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema di scheduling su macchine parallele identiche ($P||C_{\max}$) è il seguente:

$$\min \quad C_{\max} \quad (14.1a)$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{h \in \mathcal{H}} x_{jh} = 1, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \quad (14.1b)$$

$$-\sum_{j \in \mathcal{J}} t_j x_{jh} + C_{\max} \geq 0, \quad \forall h \in \mathcal{H}, \quad (14.1c)$$

$$x_{jh} \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \forall h \in \mathcal{H}, \quad (14.1d)$$

$$C_{\max} \geq 0. \quad (14.1e)$$

Questo modello PLI si chiama modello $\text{ILP}_{P\|C_{\max}}$.

- Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello $\text{ILP}_{P\|C_{\max}}$:
 - la funzione obiettivo lineare (14.1a) minimizza il makespan;
 - i vincoli (14.1b) garantiscono che ogni lavoro sia assegnato a esattamente una macchina (n vincoli lineari);
 - i vincoli (14.1c) collegano le variabili di assegnamento con la variabile di makespan. In particolare, garantiscono che il makespan sia maggiore o uguale al carico di ogni macchina (m vincoli lineari);
 - infine, i vincoli (14.1d) e (14.1e) definiscono le variabili del modello PLI.

Spiegazione del legame fra le variabili

- Per ogni macchina h , il makespan e il suo carico devono soddisfare la relazione diretta

$$C_{\max} \geq \sum_{j \in \mathcal{J}} t_j x_{jh},$$

che è imposta dal vincolo (14.1c).

- Poiché il vincolo vale per ogni macchina, esso impone

$$C_{\max} \geq \max_{h \in \mathcal{H}} \left\{ \sum_{j \in \mathcal{J}} t_j x_{jh} \right\}.$$

- In ogni soluzione ottima vale l'uguaglianza. Infatti, se $C_{\max}$ fosse maggiore del carico massimo, sostituendo $C_{\max}$ con il carico massimo tutti i vincoli (14.1c) resterebbero soddisfatti e il valore obiettivo diminuirebbe di una quantità positiva, il che contraddice l'ottimalità.
- Quando a una macchina non è assegnato alcun lavoro, il suo carico è zero.

Esempio 14.1: Modello $\text{ILP}_{P\|C_{\max}}$

Consideriamo $m = 3$ macchine ($\mathcal{H} = \{1, 2, 3\}$) e un insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, \dots, 7\}$ di 7 lavori ($n = 7$), con i seguenti tempi di processamento:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$	$j = 7$
t_j	5	5	4	4	3	3	3

È l'istanza dell'Esempio 7.1 del [Capitolo 7 «Problemi di scheduling»](#); la chiamiamo [Esempio 14.1](#). Il modello $\text{ILP}_{P\|C_{\max}}$ per questa istanza è:

$$\begin{array}{llll}
 \min & C_{\max} & & \\
 \text{soggetto a} & x_{11} + x_{12} + x_{13} & = & 1 \\
 & x_{21} + x_{22} + x_{23} & = & 1 \\
 & x_{31} + x_{32} + x_{33} & = & 1 \\
 & x_{41} + x_{42} + x_{43} & = & 1 \\
 & x_{51} + x_{52} + x_{53} & = & 1 \\
 & x_{61} + x_{62} + x_{63} & = & 1 \\
 & x_{71} + x_{72} + x_{73} & = & 1 \\
 & -5x_{11} - 5x_{21} - 4x_{31} - 4x_{41} - 3x_{51} - 3x_{61} - 3x_{71} + C_{\max} & \geq & 0 \\
 & -5x_{12} - 5x_{22} - 4x_{32} - 4x_{42} - 3x_{52} - 3x_{62} - 3x_{72} + C_{\max} & \geq & 0 \\
 & -5x_{13} - 5x_{23} - 4x_{33} - 4x_{43} - 3x_{53} - 3x_{63} - 3x_{73} + C_{\max} & \geq & 0 \\
 & x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots, x_{73} & \in & \{0, 1\} \\
 & C_{\max} & \geq & 0
 \end{array}$$

Una soluzione ottima $(\tilde{x}, \tilde{C}_{\max})(\text{ILP}_{P\|C_{\max}})$ è:

$$\tilde{x}_{11} = \tilde{x}_{31} = \tilde{x}_{22} = \tilde{x}_{42} = \tilde{x}_{53} = \tilde{x}_{63} = \tilde{x}_{73} = 1, \text{ tutte le altre } \tilde{x}_{jh} = 0, \quad \tilde{C}_{\max} = 9$$

Assegna i lavori $\{1, 3\}$ alla macchina 1, $\{2, 4\}$ alla macchina 2 e $\{5, 6, 7\}$ alla macchina 3, con carichi 9, 9 e 9. Il valore ottimo $z(\text{ILP}_{P\|C_{\max}})$ è 9, poiché raggiunge il lower bound

$$\max \left\{ \max_{j \in \mathcal{J}} t_j, \left\lceil \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} t_j}{m} \right\rceil \right\} = \max\{5, \lceil 27/3 \rceil\} = 9.$$

14.3 Un primo rilassamento lineare

Per ottenere un rilassamento lineare (LP) del modello $\text{ILP}_{P\|C_{\max}}$, rilassiamo i vincoli (14.1d) in vincoli di non negatività. Il modello LP ottenuto è il seguente:

$$\min \quad C_{\max} \quad (14.2a)$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{h \in \mathcal{H}} x_{jh} = 1, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \quad (14.2b)$$

$$-\sum_{j \in \mathcal{J}} t_j x_{jh} + C_{\max} \geq 0, \quad \forall h \in \mathcal{H}, \quad (14.2c)$$

$$x_{jh} \geq 0, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \forall h \in \mathcal{H}, \quad (14.2d)$$

$$C_{\max} \geq 0. \quad (14.2e)$$

Questo modello LP si chiama modello $\text{LP-0}_{P\|C_{\max}}$.

Esempio 14.2: Modello $\text{LP-0}_{P\|C_{\max}}$

Il modello $\text{LP-0}_{P\|C_{\max}}$ per l'istanza dell'Esempio 14.1 è:

$$\begin{array}{llll} \min & C_{\max} & & \\ \text{soggetto a} & x_{11} + x_{12} + x_{13} & = & 1 \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} & = & 1 \\ & x_{31} + x_{32} + x_{33} & = & 1 \\ & x_{41} + x_{42} + x_{43} & = & 1 \\ & x_{51} + x_{52} + x_{53} & = & 1 \\ & x_{61} + x_{62} + x_{63} & = & 1 \\ & x_{71} + x_{72} + x_{73} & = & 1 \\ & -5x_{11} - 5x_{21} - 4x_{31} - 4x_{41} - 3x_{51} - 3x_{61} - 3x_{71} + C_{\max} & \geq & 0 \\ & -5x_{12} - 5x_{22} - 4x_{32} - 4x_{42} - 3x_{52} - 3x_{62} - 3x_{72} + C_{\max} & \geq & 0 \\ & -5x_{13} - 5x_{23} - 4x_{33} - 4x_{43} - 3x_{53} - 3x_{63} - 3x_{73} + C_{\max} & \geq & 0 \\ & x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots, x_{73} & \geq & 0 \\ & C_{\max} & \geq & 0 \end{array}$$

Una soluzione ottima $(\tilde{x}, \tilde{C}_{\max})(\text{LP-0}_{P\|C_{\max}})$ è:

$$\tilde{x}_{jh} = \frac{1}{3}, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \forall h \in \mathcal{H}, \quad \tilde{C}_{\max} = 9$$

Il valore ottimo $z(\text{LP-0}_{P\|C_{\max}})$ è 9. Di conseguenza, abbiamo il lower bound:

$$9 \leq z(\text{ILP}_{P\|C_{\max}})$$

Usando una variabile duale libera μ_j per ogni vincolo (14.2b) e una variabile duale non negativa π_h per ogni vincolo (14.2c), il modello duale del modello $LP-0_{P\|C_{\max}}$ è:

$$\max \sum_{j \in \mathcal{J}} \mu_j \quad (14.3a)$$

$$\text{soggetto a } \mu_j - t_j \pi_h \leq 0, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \forall h \in \mathcal{H}, \quad (14.3b)$$

$$\sum_{h \in \mathcal{H}} \pi_h \leq 1, \quad (14.3c)$$

$$\mu_j \geq 0, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \quad (14.3d)$$

$$\pi_h \geq 0, \quad \forall h \in \mathcal{H}. \quad (14.3e)$$

Questo modello LP si chiama modello $D(LP-0_{P\|C_{\max}})$.

Esempio 14.3: Modello $D(LP-0_{P\|C_{\max}})$

Il modello duale $D(LP-0_{P\|C_{\max}})$ per l'istanza dell'Esempio 14.1 è:

$$\begin{array}{llll}
 \max & \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5 + \mu_6 + \mu_7 & & \\
 \text{soggetto a} & \mu_1 - 5\pi_1 & \leq & 0 \\
 & \mu_1 - 5\pi_2 & \leq & 0 \\
 & \mu_1 - 5\pi_3 & \leq & 0 \\
 & \mu_2 - 5\pi_1 & \leq & 0 \\
 & \mu_2 - 5\pi_2 & \leq & 0 \\
 & \mu_2 - 5\pi_3 & \leq & 0 \\
 & \mu_3 - 4\pi_1 & \leq & 0 \\
 & \mu_3 - 4\pi_2 & \leq & 0 \\
 & \mu_3 - 4\pi_3 & \leq & 0 \\
 & \mu_4 - 4\pi_1 & \leq & 0 \\
 & \mu_4 - 4\pi_2 & \leq & 0 \\
 & \mu_4 - 4\pi_3 & \leq & 0 \\
 & \mu_5 - 3\pi_1 & \leq & 0 \\
 & \mu_5 - 3\pi_2 & \leq & 0 \\
 & \mu_5 - 3\pi_3 & \leq & 0 \\
 & \mu_6 - 3\pi_1 & \leq & 0 \\
 & \mu_6 - 3\pi_2 & \leq & 0 \\
 & \mu_6 - 3\pi_3 & \leq & 0 \\
 & \mu_7 - 3\pi_1 & \leq & 0 \\
 & \mu_7 - 3\pi_2 & \leq & 0 \\
 & \mu_7 - 3\pi_3 & \leq & 0 \\
 & \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 & \leq & 1 \\
 & \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6, \mu_7 & \geq & 0 \\
 & \pi_1, \pi_2, \pi_3 & \geq & 0
 \end{array}$$

Una soluzione ottima $(\tilde{\mu}, \tilde{\pi})(D(\text{LP-}0_{P\|C_{\max}}))$ è:

$$\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2 = \frac{5}{3}, \quad \tilde{\mu}_3 = \tilde{\mu}_4 = \frac{4}{3}, \quad \tilde{\mu}_5 = \tilde{\mu}_6 = \tilde{\mu}_7 = 1, \quad \tilde{\pi}_1 = \tilde{\pi}_2 = \tilde{\pi}_3 = \frac{1}{3}$$

Il valore ottimo $z(D(\text{LP-}0_{P\|C_{\max}}))$ è 9.

Proposizione 14.1: Valore ottimo di $\text{LP-}0_{P\|C_{\max}}$

Per ogni istanza di $P\|C_{\max}$,

$$z(\text{LP-}0_{P\|C_{\max}}) = \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} t_j}{m}.$$

Dimostrazione. Poniamo $x_{jh} = 1/m$ per ogni lavoro e ogni macchina, e poniamo

$$C_{\max} = \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} t_j}{m}.$$

Ogni vincolo (14.2b) è soddisfatto e ogni macchina ha il carico indicato, quindi questa è una soluzione primale ammissibile. Nel duale, poniamo

$$\pi_h = \frac{1}{m} \quad \forall h \in \mathcal{H}, \quad \mu_j = \frac{t_j}{m} \quad \forall j \in \mathcal{J}.$$

I vincoli (14.3b) valgono all'uguaglianza, $\sum_h \pi_h = 1$, e il valore obiettivo duale è

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} \mu_j = \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} t_j}{m}.$$

Per la dualità debole della PL, le due soluzioni sono ottime, e il valore ottimo è il valore comune delle funzioni obiettivo. $\square$

14.4 Un secondo rilassamento lineare

Per ottenere un rilassamento lineare del modello $ILP_{P\|C_{\max}}$, rilassiamo i vincoli (14.1d) nei bound $0 \leq x_{jh} \leq 1$. Il modello LP ottenuto è il seguente:

$$\min \quad C_{\max} \tag{14.4a}$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{h \in \mathcal{H}} x_{jh} = 1, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \tag{14.4b}$$

$$- \sum_{j \in \mathcal{J}} t_j x_{jh} + C_{\max} \geq 0, \quad \forall h \in \mathcal{H}, \tag{14.4c}$$

$$x_{jh} \leq 1, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \forall h \in \mathcal{H}, \tag{14.4d}$$

$$x_{jh} \geq 0, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \forall h \in \mathcal{H}, \tag{14.4e}$$

$$C_{\max} \geq 0. \tag{14.4f}$$

Questo modello LP si chiama modello $LP_{P\|C_{\max}}$.

- I vincoli (14.4d) non cambiano il rilassamento: per (14.4b) e (14.4e), ogni x_{jh} vale al più uno. Quindi

$$z(LP_{P\|C_{\max}}) = z(LP-0_{P\|C_{\max}}) = \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} t_j}{m}.$$

Esempio 14.4: Modello $LP_{P\|C_{\max}}$

Il modello $LP_{P\|C_{\max}}$ per l'istanza dell'Esempio 14.1 è:

$$\begin{array}{llll}
 \min & C_{\max} & & \\
 \text{soggetto a} & x_{11} + x_{12} + x_{13} & = & 1 \\
 & x_{21} + x_{22} + x_{23} & = & 1 \\
 & x_{31} + x_{32} + x_{33} & = & 1 \\
 & x_{41} + x_{42} + x_{43} & = & 1 \\
 & x_{51} + x_{52} + x_{53} & = & 1 \\
 & x_{61} + x_{62} + x_{63} & = & 1 \\
 & x_{71} + x_{72} + x_{73} & = & 1 \\
 & -5x_{11} - 5x_{21} - 4x_{31} - 4x_{41} - 3x_{51} - 3x_{61} - 3x_{71} + C_{\max} & \geq & 0 \\
 & -5x_{12} - 5x_{22} - 4x_{32} - 4x_{42} - 3x_{52} - 3x_{62} - 3x_{72} + C_{\max} & \geq & 0 \\
 & -5x_{13} - 5x_{23} - 4x_{33} - 4x_{43} - 3x_{53} - 3x_{63} - 3x_{73} + C_{\max} & \geq & 0 \\
 & x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots, x_{73} & \leq & 1 \\
 & x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots, x_{73} & \geq & 0 \\
 & C_{\max} & \geq & 0
 \end{array}$$

Una soluzione ottima $(\tilde{x}, \tilde{C}_{\max})(\text{LP}_{P\|C_{\max}})$ è la soluzione dell'Esempio 14.2:

$$\tilde{x}_{jh} = \frac{1}{3}, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \quad \forall h \in \mathcal{H}, \quad \tilde{C}_{\max} = 9$$

Il valore ottimo $z(\text{LP}_{P\|C_{\max}})$ è 9. Di conseguenza, abbiamo lo stesso lower bound.

Usando una variabile duale libera μ_j per ogni vincolo (14.4b), una variabile duale non negativa π_h per ogni vincolo (14.4c) e una variabile duale non positiva λ_{jh} per ogni vincolo (14.4d), il modello duale del modello $\text{LP}_{P\|C_{\max}}$ è:

$$\max \quad \sum_{j \in \mathcal{J}} \mu_j + \sum_{j \in \mathcal{J}} \sum_{h \in \mathcal{H}} \lambda_{jh} \quad (14.5a)$$

$$\text{soggetto a} \quad \mu_j - t_j \pi_h + \lambda_{jh} \leq 0, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \quad \forall h \in \mathcal{H}, \quad (14.5b)$$

$$\sum_{h \in \mathcal{H}} \pi_h \leq 1, \quad (14.5c)$$

$$\mu_j \geq 0, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \quad (14.5d)$$

$$\pi_h \geq 0, \quad \forall h \in \mathcal{H}, \quad (14.5e)$$

$$\lambda_{jh} \leq 0, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \quad \forall h \in \mathcal{H}. \quad (14.5f)$$

Questo modello LP si chiama modello $D(\text{LP}_{P\|C_{\max}})$.

Esempio 14.5: Modello $D(LP_{P||C_{\max}})$

Il modello duale $D(LP_{P||C_{\max}})$ per l'istanza dell'Esempio 14.1 è:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5 + \mu_6 + \mu_7 + \lambda_{11} \\
 & + \lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{21} + \lambda_{22} + \lambda_{23} + \lambda_{31} + \lambda_{32} + \lambda_{33} \\
 & + \lambda_{41} + \lambda_{42} + \lambda_{43} + \lambda_{51} + \lambda_{52} + \lambda_{53} + \lambda_{61} + \lambda_{62} \\
 & + \lambda_{63} + \lambda_{71} + \lambda_{72} + \lambda_{73} \\
 \text{soggetto a} \quad & \mu_1 - 5\pi_1 + \lambda_{11} \leq 0 \\
 & \mu_1 - 5\pi_2 + \lambda_{12} \leq 0 \\
 & \mu_1 - 5\pi_3 + \lambda_{13} \leq 0 \\
 & \mu_2 - 5\pi_1 + \lambda_{21} \leq 0 \\
 & \mu_2 - 5\pi_2 + \lambda_{22} \leq 0 \\
 & \mu_2 - 5\pi_3 + \lambda_{23} \leq 0 \\
 & \mu_3 - 4\pi_1 + \lambda_{31} \leq 0 \\
 & \mu_3 - 4\pi_2 + \lambda_{32} \leq 0 \\
 & \mu_3 - 4\pi_3 + \lambda_{33} \leq 0 \\
 & \mu_4 - 4\pi_1 + \lambda_{41} \leq 0 \\
 & \mu_4 - 4\pi_2 + \lambda_{42} \leq 0 \\
 & \mu_4 - 4\pi_3 + \lambda_{43} \leq 0 \\
 & \mu_5 - 3\pi_1 + \lambda_{51} \leq 0 \\
 & \mu_5 - 3\pi_2 + \lambda_{52} \leq 0 \\
 & \mu_5 - 3\pi_3 + \lambda_{53} \leq 0 \\
 & \mu_6 - 3\pi_1 + \lambda_{61} \leq 0 \\
 & \mu_6 - 3\pi_2 + \lambda_{62} \leq 0 \\
 & \mu_6 - 3\pi_3 + \lambda_{63} \leq 0 \\
 & \mu_7 - 3\pi_1 + \lambda_{71} \leq 0 \\
 & \mu_7 - 3\pi_2 + \lambda_{72} \leq 0 \\
 & \mu_7 - 3\pi_3 + \lambda_{73} \leq 0 \\
 & \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \leq 1 \\
 & \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6, \mu_7 \geq 0 \\
 & \pi_1, \pi_2, \pi_3 \geq 0 \\
 & \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13}, \dots, \lambda_{73} \leq 0
 \end{aligned}$$

Una soluzione ottima $(\tilde{\mu}, \tilde{\pi}, \tilde{\lambda})(D(LP_{P||C_{\max}}))$ è la soluzione dell'Esempio 14.3 con $\tilde{\lambda}_{jh} = 0$ per ogni lavoro e ogni macchina:

$$\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2 = \frac{5}{3}, \quad \tilde{\mu}_3 = \tilde{\mu}_4 = \frac{4}{3}, \quad \tilde{\mu}_5 = \tilde{\mu}_6 = \tilde{\mu}_7 = 1, \quad \tilde{\pi}_1 = \tilde{\pi}_2 = \tilde{\pi}_3 = \frac{1}{3}, \quad \tilde{\lambda}_{jh} = 0$$

Il valore ottimo $z(D(LP_{P||C_{\max}}))$ è 9.

14.4.1 Alcune proprietà teoriche importanti

Proposizione 14.2: Rapporto nel caso peggiore del bound LP

Per ogni istanza di $P\|C_{\max}$,

$$\frac{z(\text{LP}_{P\|C_{\max}})}{z(\text{ILP}_{P\|C_{\max}})} \geq \frac{1}{m}.$$

Dimostrazione. Assegnando ogni lavoro a una sola macchina otteniamo una schedula ammissibile di makespan $\sum_j t_j$. Quindi $z(\text{ILP}_{P\|C_{\max}}) \leq \sum_j t_j$. Per la Proposizione 14.1,

$$\frac{z(\text{LP}_{P\|C_{\max}})}{z(\text{ILP}_{P\|C_{\max}})} \geq \frac{\sum_j t_j}{\sum_j t_j} = \frac{1}{m}.$$

□

Proposizione 14.3: Il rapporto $1/m$ è raggiunto asintoticamente

Per un numero fissato $m \geq 2$ di macchine, esistono istanze per cui

$$\frac{z(\text{LP}_{P\|C_{\max}})}{z(\text{ILP}_{P\|C_{\max}})} \rightarrow \frac{1}{m}.$$

Dimostrazione. Per $M \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, consideriamo un lavoro di tempo di processamento M e m lavori di tempo di processamento uno. Il lavoro lungo da solo impone $z(\text{ILP}_{P\|C_{\max}}) \geq M$. La schedula che assegna il lavoro lungo da solo alla macchina 1 e gli m lavori unitari alle altre $m - 1$ macchine ha carichi al più $2 \leq M$, quindi il makespan M è ammissibile. Quindi $z(\text{ILP}_{P\|C_{\max}}) = M$. La Proposizione 14.1 dà

$$z(\text{LP}_{P\|C_{\max}}) = \frac{M + m}{m}.$$

Di conseguenza,

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{z(\text{LP}_{P\|C_{\max}})}{z(\text{ILP}_{P\|C_{\max}})} = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) = \frac{1}{m}.$$

□

Esempio 14.6: Un gap di integralità

Consideriamo due macchine e tre lavori con tempi di processamento $(3, 3, 2)$. La Proposizione 14.1 dà $z(\text{LP}_{P\|C_{\max}}) = 8/2 = 4$. In ogni schedula intera una macchina esegue almeno due dei tre lavori, quindi il suo carico è almeno $3+2 = 5$; la schedula $\{3, 2\}, \{3\}$ lo raggiunge,

quindi $z(\text{ILP}_{P\|C_{\max}}) = 5$. L'assegnamento frazionario

$$x_{j1} = x_{j2} = \frac{1}{2} \quad \forall j \in \{1, 2, 3\}$$

ha carico quattro su entrambe le macchine, mentre l'ottimo intero ha carichi cinque e tre.

14.5 Considerazioni aggiuntive

- Per ogni lavoro j , la disuguaglianza

$$C_{\max} \geq t_j \quad (14.6)$$

è una **disuguaglianza valida** per il modello (14.1). In ogni schedula intera, il lavoro j è assegnato a una macchina, il cui carico, e quindi il makespan, vale almeno t_j (n vincoli lineari);

- La disuguaglianza

$$C_{\max} \geq \left\lceil \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} t_j}{m} \right\rceil \quad (14.7)$$

è anch'essa una **disuguaglianza valida** per il modello (14.1): gli m carichi delle macchine hanno somma $\sum_j t_j$, quindi il loro massimo vale almeno la loro media ed è intero in ogni schedula intera (un vincolo lineare);

- Le macchine sono identiche. I vincoli

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} t_j x_{jh} \geq \sum_{j \in \mathcal{J}} t_j x_{j,h+1} \quad \forall h \in \{1, \dots, m-1\} \quad (14.8)$$

sono **vincoli che preservano l'ottimalità**: non sono validi per ogni assegnamento ammissibile, ma le macchine di ogni schedula si possono rinumerare in modo che i carichi siano non crescenti, senza cambiare il makespan.

- I vincoli (14.8) eliminano le rinumerazioni equivalenti delle macchine solo quando i carichi sono distinti. Con carichi uguali non ne eliminano nessuna: nell'istanza del capitolo tutte le schedule ottime hanno carichi 9, 9, 9, e tutte le 12 soluzioni ottime del modello li soddisfano.

14.6 Errori tipici

Attenzione

- **Usare solo il bound LP.** Il valore $\sum_j t_j/m$ ignora il lavoro più lungo: con un lavoro molto lungo è molto più piccolo del valore ottimo. Bisogna aggiungere la disuguaglianza valida $C_{\max} \geq t_j$.
- **Dimenticare l'arrotondamento per eccesso.** Tutti i tempi di processamento sono interi, quindi $C_{\max}$ è intero in ogni schedula intera: il lower bound è $\lceil \sum_j t_j/m \rceil$.
- **Credere che i vincoli di simmetria eliminino tutte le soluzioni equivalenti.** Eliminano le rinumerazioni delle macchine solo quando i carichi sono distinti; con carichi uguali non ne eliminano nessuna.
- **Dimenticare il verso dei vincoli di carico.** I vincoli (14.1c) limitano $C_{\max}$ dal basso: è la minimizzazione che rende $C_{\max}$ uguale al carico massimo.
- **Confondere gli indici.** La variabile x_{jh} ha il lavoro j come primo indice e la macchina h come secondo.

14.7 In sintesi

In sintesi

- Il modello ILP $P_{\|C_{\max}}$ ha $n \cdot m$ variabili di assegnamento x_{jh} e la variabile di makespan $C_{\max}$, collegate da un vincolo di carico per ogni macchina.
- Il rilassamento lineare ha valore ottimo $z(\text{LP}_{P_{\|C_{\max}}}) = \sum_j t_j/m$, raggiunto assegnando ogni lavoro con valore $1/m$ a ogni macchina; la soluzione duale è $\tilde{\pi}_h = 1/m$ e $\tilde{\mu}_j = t_j/m$.
- Il rapporto fra $z(\text{LP}_{P_{\|C_{\max}}})$ e $z(\text{ILP}_{P_{\|C_{\max}}})$ vale almeno $1/m$, e $1/m$ è raggiunto asintoticamente.
- Le disuguaglianze valide $C_{\max} \geq t_j$ e $C_{\max} \geq \lceil \sum_j t_j/m \rceil$ rafforzano il modello.

Quadro riassuntivo dell'istanza del capitolo ($m = 3$, $t = (5, 5, 4, 4, 3, 3, 3)$). Lower bound sul valore ottimo 9:

Bound	Valore	Da
Rilassamento lineare	9	$\sum_j t_j/m = 27/3$
Disuguaglianze valide	9	$\max\{5, \lceil 27/3 \rceil\}$
Valore ottimo	9	carichi 9, 9, 9

Sull'istanza del gap di integralità ($m = 2$, $t = (3, 3, 2)$) il bound LP vale 4 e il valore ottimo è 5.

Formulazioni dei problemi di lot sizing

Prerequisiti

- Dal modulo *Programmazione lineare intera*, [Capitolo 1 «Programmazione lineare intera»](#) e [Capitolo 2 «Bound primali e duali»](#): problemi ILP, rilassamenti lineari e lower bound.
- Da questo modulo, [Capitolo 8 «Problemi di lot sizing»](#): il problema, le sue ipotesi, i piani e l'istanza di riferimento.

Obiettivi

Alla fine di questo capitolo saremo in grado di:

- scrivere la formulazione big-M del problema di lot sizing capacitato e calcolare un valore debole e un valore forte di big-M;
- scrivere la formulazione a cammino minimo e interpretarne le variabili come gli archi di una rete;
- rappresentare un piano di produzione come combinazione di cammini della rete;
- confrontare i bound LP delle formulazioni sull'istanza di riferimento;
- scrivere il modello PLI del problema di lot sizing senza capacità;
- estendere la formulazione big-M a più prodotti con tempi di setup, alla scorta iniziale, agli straordinari e alla domanda non soddisfatta, e calcolare i valori forti di big-M di ogni modello.

15.1 Panoramica della famiglia

- I modelli big- M dei problemi di lot sizing usano, per ogni periodo $t \in T$, una **variabile di produzione** intera x_t , una **variabile di scorta** intera s_t e una **variabile di setup** binaria y_t .
- I **vincoli di bilanciamento del flusso** collegano le scorte di periodi consecutivi alla produzione e alla domanda; le variabili di setup sono collegate alla produzione da vincoli big- M .
- La funzione obiettivo minimizza il costo totale di setup, di produzione e di mantenimento a scorta. La formulazione a cammino minimo del CLS sostituisce le variabili di produzione e di scorta con gli archi di una rete.

I modelli di lot sizing sono modelli di flusso sui periodi, con variabili di setup binarie che attivano la produzione. I membri della famiglia aggiungono prodotti, tempi di setup, una scorta iniziale, straordinari o domanda non soddisfatta agli stessi vincoli di bilanciamento e big- M .

- La tabella elenca i membri della famiglia, con i nomi dei loro modelli e le sezioni che li scrivono.

Problema	Modelli	Formulazione	Sezione
CLS	ILP _{CLSP}	formulazione big- M	15.3
CLS	MIP ^{SP} _{CLSP}	formulazione a cammino minimo	15.5
ULS	ILP _{ULS}	big- M , senza capacità	15.7
MLS	ILP ^P _{CLSP}	big- M , tempi di setup	15.7
LS-SI	ILP ^{SI} _{CLSP}	big- M , variabili di scorta iniziale	15.7
LS-OT	ILP ^{OT} _{CLSP}	big- M , variabili di straordinario	15.7
LS-UD	ILP ^{UD} _{CLSP}	big- M , variabili di domanda non soddisfatta	15.7

15.2 Modelli PLI per il problema di lot sizing capacitato

Il problema di lot sizing capacitato e la sua istanza di riferimento (Esempio 8.1) sono definiti nel [Capitolo 8 «Problemi di lot sizing», Sezione 8.2](#).

- Il CLS ha due formulazioni: la formulazione big- M ILP_{CLSP} della Sezione 15.3 e la formulazione a cammino minimo MIP_{CLSP}^{SP} della Sezione 15.5.
- La Sezione 15.6 confronta i bound dei loro rilassamenti lineari sull'istanza di riferimento.

15.3 Una formulazione con un legame big-M

- Dato un insieme $T = \{1, 2, \dots, m\}$ di periodi con domande d_t , per $j \leq t$ scriviamo $D_{j,t} = \sum_{k=j}^t d_k$ per la domanda totale dei periodi $j, j+1, \dots, t$.
- Introduciamo le seguenti **variabili intere** e **variabili binarie**, per ogni periodo $t \in T$:

$$x_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ (produzione)}, \quad s_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ (scorta alla fine del periodo)},$$

$$y_t = \begin{cases} 1 & \text{se c'è un setup nel periodo } t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La scorta all'inizio dell'orizzonte è la costante s_0 .

- Le variabili di setup sono collegate alle quantità dall'implicazione logica

$$x_t > 0 \implies y_t = 1,$$

modellata dal **vincolo big-M** $x_t \leq M_t y_t$, dove M_t è un upper bound sulla produzione del periodo t .

- Se si ignorano i setup, il piano migliore produce in ogni periodo esattamente la sua domanda: non ha scorte e, nell'istanza di riferimento, ha costo 0. È un lower bound molto debole: i costi di setup vanno modellati.

Usando queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema di lot sizing capacitato (CLS) è il seguente:

$$\min \sum_{t \in T} (sc_t y_t + vc_t x_t + hc_t s_t) \quad (15.1a)$$

$$\text{soggetto a } s_{t-1} + x_t = d_t + s_t, \quad \forall t \in T, \quad (15.1b)$$

$$x_t \leq M_t y_t, \quad \forall t \in T, \quad (15.1c)$$

$$x_t \leq cap_t, \quad \forall t \in T, \quad (15.1d)$$

$$s_0 = s_m = 0, \quad (15.1e)$$

$$x_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall t \in T, \quad (15.1f)$$

$$s_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall t \in T, \quad (15.1g)$$

$$y_t \in \{0, 1\}, \quad \forall t \in T. \quad (15.1h)$$

Questo modello PLI si chiama modello ILP_{CLSP} , o **formulazione big-M**.

- Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello ILP_{CLSP} :
 - la funzione obiettivo lineare (15.1a) minimizza il costo dei setup, della produzione e del mantenimento a scorta;
 - i vincoli (15.1b) sono i **vincoli di bilanciamento del flusso**: la domanda del periodo t è soddisfatta dalla produzione del periodo e dalla scorta del periodo precedente, e l'eccedenza diventa la scorta alla fine del periodo t (m vincoli lineari);
 - i vincoli (15.1c) collegano le quantità con i setup, e i vincoli (15.1d) sono i vincoli di capacità (m vincoli lineari ciascuno);
 - il vincolo (15.1e) impone una scorta vuota all'inizio e alla fine dell'orizzonte;
 - infine, i vincoli (15.1f), (15.1g) e (15.1h) definiscono le variabili del modello PLI.

15.3.1 Valori deboli e forti di big-M

- **Un valore debole.** Poiché $s_m = 0$ e le scorte sono non negative, la produzione del periodo t non può superare la domanda dei periodi $t, \dots, m$: $M_t^{\text{dem}} = D_{t,m}$ è un valore valido.
- **Un secondo valore.** Per i vincoli di capacità (15.1d), anche $M_t^{\text{cap}} = \text{cap}_t$ è valido.
- **Un valore forte.** Il valore migliore è il più piccolo dei due:

$$M_t = \min \{ \text{cap}_t, D_{t,m} \}.$$

Più piccolo è il valore di big-M, più forte è il rilassamento lineare: il vincolo $x_t \leq M_t y_t$ taglia i valori frazionari di y_t inferiori a x_t/M_t . Un valore troppo piccolo, però, taglia piani ammissibili.

Esempio 15.1: L'istanza di riferimento

Consideriamo $m = 5$ periodi, con i seguenti dati:

periodo t	1	2	3	4	5
domanda d_t	2	1	3	4	1
capacità cap_t	4	4	4	4	4
costo di setup sc_t	50	50	50	50	50
costo di produzione vc_t	0	0	0	0	0
costo di mantenimento hc_t	10	10	10	10	10

È l'istanza dell'Esempio 8.1 del [Capitolo 8 «Problemi di lot sizing»](#). I valori di big-M sono:

periodo t	1	2	3	4	5
$M_t^{\text{dem}} = D_{t,5}$	11	9	8	5	1
$M_t^{\text{cap}} = \text{cap}_t$	4	4	4	4	4
M_t	4	4	4	4	1

Chiamiamo questa istanza del CLS [Esempio 15.1](#).

Esempio 15.2: Modello ILP_{CLSP}

Il modello ILP_{CLSP} con i valori forti di big-M per l'istanza del CLS dell'[Esempio 15.1](#) è ($s_0 = 0$ è una costante e non compare):

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 50 y_1 + 50 y_2 + 50 y_3 + 50 y_4 + 50 y_5 + 10 s_1 + 10 s_2 \\
 & + 10 s_3 + 10 s_4 + 10 s_5 \\
 \text{soggetto a} \quad & x_1 - s_1 = 2 \\
 & s_1 + x_2 - s_2 = 1 \\
 & s_2 + x_3 - s_3 = 3 \\
 & s_3 + x_4 - s_4 = 4 \\
 & s_4 + x_5 - s_5 = 1 \\
 & x_1 - 4 y_1 \leq 0 \\
 & x_2 - 4 y_2 \leq 0 \\
 & x_3 - 4 y_3 \leq 0 \\
 & x_4 - 4 y_4 \leq 0 \\
 & x_5 - y_5 \leq 0 \\
 & x_1 \leq 4 \\
 & x_2 \leq 4 \\
 & x_3 \leq 4 \\
 & x_4 \leq 4 \\
 & x_5 \leq 4 \\
 & s_5 = 0 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\
 & s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\
 & y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

Una soluzione ottima $(\tilde{y}, \tilde{x}, \tilde{s})(\text{ILP}_{\text{CLSP}})$ è:

$$\tilde{y} = (1, 0, 1, 1, 0), \quad \tilde{x} = (3, 0, 4, 4, 0), \quad \tilde{s} = (1, 0, 1, 1, 0)$$

Il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{CLSP}})$ è $3 \cdot 50 + 3 \cdot 10 = 180$, il costo del piano ottimo trovato per enumerazione nel [Capitolo 8 «Problemi di lot sizing»](#). I valori deboli di big-M danno la stessa soluzione ottima.

15.4 Il rilassamento lineare della formulazione big-M

Per ottenere un rilassamento lineare (LP) del modello ILP_{CLSP} , rilassiamo i vincoli (15.1f)–(15.1h) in vincoli di non negatività e nei bound $y_t \leq 1$. Il modello LP ottenuto è il seguente:

$$\min \sum_{t \in T} (sc_t y_t + vc_t x_t + hc_t s_t) \quad (15.2a)$$

$$\text{soggetto a } s_{t-1} + x_t = d_t + s_t, \quad \forall t \in T, \quad (15.2b)$$

$$x_t \leq M_t y_t, \quad \forall t \in T, \quad (15.2c)$$

$$x_t \leq cap_t, \quad \forall t \in T, \quad (15.2d)$$

$$s_0 = s_m = 0, \quad (15.2e)$$

$$y_t \leq 1, \quad \forall t \in T, \quad (15.2f)$$

$$x_t \geq 0, \quad \forall t \in T, \quad (15.2g)$$

$$s_t \geq 0, \quad \forall t \in T, \quad (15.2h)$$

$$y_t \geq 0, \quad \forall t \in T. \quad (15.2i)$$

Questo modello LP si chiama modello $\text{LP}_{\text{CLSP}}^{\text{dem}}$, $\text{LP}_{\text{CLSP}}^{\text{cap}}$ o $\text{LP}_{\text{CLSP}}^{\text{strong}}$, quando i valori di big-M sono M_t^{dem} , M_t^{cap} o i valori forti M_t .

Esempio 15.3: Valori di big-M e bound LP

Il modello LP (15.2) per l'istanza del CLS dell'Esempio 15.1 è:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 50 y_1 + 50 y_2 + 50 y_3 + 50 y_4 + 50 y_5 + 10 s_1 + 10 s_2 \\
 & + 10 s_3 + 10 s_4 + 10 s_5 \\
 \text{soggetto a} \quad & x_1 - s_1 = 2 \\
 & s_1 + x_2 - s_2 = 1 \\
 & s_2 + x_3 - s_3 = 3 \\
 & s_3 + x_4 - s_4 = 4 \\
 & s_4 + x_5 - s_5 = 1 \\
 & x_1 - M_1 y_1 \leq 0 \\
 & x_2 - M_2 y_2 \leq 0 \\
 & x_3 - M_3 y_3 \leq 0 \\
 & x_4 - M_4 y_4 \leq 0 \\
 & x_5 - M_5 y_5 \leq 0 \\
 & x_1 \leq 4 \\
 & x_2 \leq 4 \\
 & x_3 \leq 4 \\
 & x_4 \leq 4 \\
 & x_5 \leq 4 \\
 & s_5 = 0 \\
 & y_1 \leq 1 \\
 & y_2 \leq 1 \\
 & y_3 \leq 1 \\
 & y_4 \leq 1 \\
 & y_5 \leq 1 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \\
 & s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \geq 0 \\
 & y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0
 \end{aligned}$$

con i valori $M_1, \dots, M_5$ della tabella dell'Esempio 15.1. Le tre scelte danno le seguenti soluzioni ottime $(\tilde{y}, \tilde{x}, \tilde{s})$, con $\tilde{s}_5 = 0$:

Modello	$\tilde{y}$	$\tilde{x}$	$(\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_4)$	valore ottimo
$\text{LP}_{\text{CLSP}}^{\text{dem}}$	$(\frac{2}{11}, \frac{1}{9}, \frac{1}{2}, \frac{4}{5}, 0)$	$(2, 1, 4, 4, 0)$	$(0, 0, 1, 1)$	$\frac{9865}{99} \approx 99.65$
$\text{LP}_{\text{CLSP}}^{\text{cap}}$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1, \frac{1}{4})$	$(2, 1, 3, 4, 1)$	$(0, 0, 0, 0)$	$\frac{275}{2} = 137.5$
$\text{LP}_{\text{CLSP}}^{\text{strong}}$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1, 1, 0)$	$(2, 1, 4, 4, 0)$	$(0, 0, 1, 1)$	$\frac{315}{2} = 157.5$

In ogni soluzione $\tilde{y}_t = \tilde{x}_t / M_t$: più piccolo è M_t , maggiore è il costo dei setup pagato dal rilassamento. La soluzione ottima intera dell'Esempio 15.2 ha valore $z(\text{ILP}_{\text{CLSP}}) = 180$.

15.5 Una formulazione a cammino minimo

- La seconda formulazione non decide direttamente le quantità. Per ogni $t, k \in T$, con $k \geq t$, introduciamo la seguente **variabile continua**: $zv_{tk} \geq 0$, la frazione della domanda $D_{t,k}$ dei periodi $t, \dots, k$ prodotta nel periodo t .
- Produrre nel periodo t la domanda dei periodi $t, \dots, k$ costa la produzione di $D_{t,k}$ unità e il mantenimento a scorta delle unità che attendono il loro periodo:

$$cv_{tk} = vc_t D_{t,k} + \sum_{s=t+1}^k \sum_{u=t}^{s-1} hc_u d_s.$$

Usando queste variabili e le variabili binarie y_t , un modello di programmazione lineare intera mista (MIP) per il CLS è il seguente:

$$\min \sum_{t \in T} sc_t y_t + \sum_{t \in T} \sum_{k=t}^m cv_{tk} zv_{tk} \quad (15.3a)$$

$$\text{soggetto a } \sum_{k=1}^m zv_{1k} = 1, \quad (15.3b)$$

$$\sum_{u=1}^{t-1} zv_{u,t-1} - \sum_{k=t}^m zv_{tk} = 0, \quad \forall t \in T \setminus \{1\}, \quad (15.3c)$$

$$\sum_{k=t}^m zv_{tk} \leq y_t, \quad \forall t \in T, \quad (15.3d)$$

$$\sum_{k=t}^m D_{t,k} zv_{tk} \leq cap_t, \quad \forall t \in T, \quad (15.3e)$$

$$zv_{tk} \geq 0, \quad \forall t, k \in T, k \geq t, \quad (15.3f)$$

$$y_t \in \{0, 1\}, \quad \forall t \in T. \quad (15.3g)$$

Questo modello MIP si chiama modello MIP_{CLSP}^{SP} , o **formulazione a cammino minimo**.

- Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello MIP_{CLSP}^{SP} :
 - la funzione obiettivo lineare (15.3a) minimizza il costo dei setup e degli archi del piano;
 - i vincoli (15.3b) e (15.3c) sono i vincoli di flusso di una rete (m vincoli lineari);
 - i vincoli (15.3d) impongono il setup se il prodotto è prodotto nel periodo t , e i vincoli (15.3e) impongono le capacità (m vincoli lineari ciascuno);
 - infine, i vincoli (15.3f) e (15.3g) definiscono le variabili del modello MIP.
- La rete è disegnata nella Figura 15.1: i nodi sono $0, 1, \dots, m$, e la variabile zv_{tk} è l'arco dal nodo $t-1$ al nodo k , con costo cv_{tk} . Un'unità di flusso esce dal nodo 0 (vincolo (15.3b)), e il flusso si conserva negli altri nodi (vincoli (15.3c)).

- Un cammino dal nodo 0 al nodo m è un piano che produce solo quando la scorta è vuota: ogni arco $(t-1, k)$ è una produzione nel periodo t per i periodi $t, \dots, k$. Per questo la formulazione si chiama formulazione a cammino minimo: rilassate le capacità, il piano ottimo è un cammino minimo.
- I vincoli (15.3d) collegano gli archi con i setup con il coefficiente 1 invece di un valore di big-M. Nei vincoli (15.3e) la quantità prodotta nel periodo t è $x_t = \sum_k D_{t,k} z v_{tk}$.
- I cammini sono i mattoni elementari, e un piano che non è un cammino è una **combinazione di cammini**: le quantità sono intere, ma le variabili $z v_{tk}$ possono essere frazionarie.

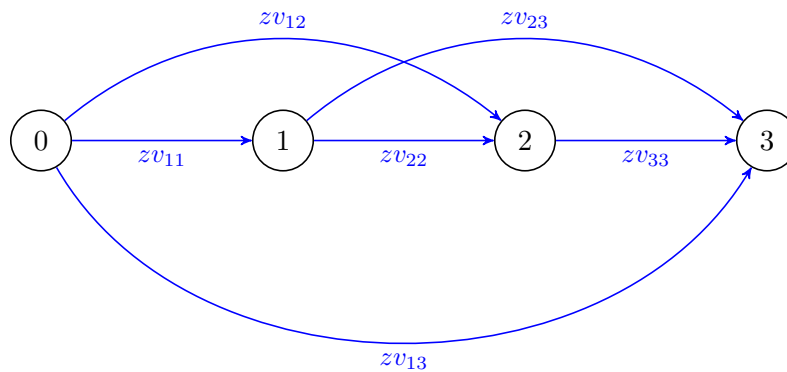


Figura 15.1: Rete delle variabili $z v_{tk}$ per $m = 3$: la variabile $z v_{tk}$ è l'arco dal nodo $t-1$ al nodo k .

Esempio 15.4: Modello $\text{MIP}_{\text{CLSP}}^{\text{SP}}$ e combinazioni di cammini

Per l'istanza del CLS dell'Esempio 15.1 le domande $D_{t,k}$ e i costi cv_{tk} sono (il costo di produzione è nullo, quindi cv_{tk} è solo costo di mantenimento a scorta):

$t \backslash k$	$D_{t,k}$					cv_{tk}				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1	2	3	6	10	11	0	10	70	190	230
2		1	4	8	9		0	30	110	140
3			3	7	8			0	40	60
4				4	5				0	10
5					1					0

Il modello $\text{MIP}_{\text{CLSP}}^{\text{SP}}$ per questa istanza è:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 50 y_1 + 50 y_2 + 50 y_3 + 50 y_4 + 50 y_5 + 10 z v_{12} + 70 z v_{13} \\
 & + 190 z v_{14} + 230 z v_{15} + 30 z v_{23} + 110 z v_{24} + 140 z v_{25} + 40 z v_{34} \\
 & + 60 z v_{35} + 10 z v_{45} \\
 \text{soggetto a} \quad & z v_{11} + z v_{12} + z v_{13} + z v_{14} + z v_{15} = 1 \\
 & z v_{11} - z v_{22} - z v_{23} - z v_{24} - z v_{25} = 0 \\
 & z v_{12} + z v_{22} - z v_{33} - z v_{34} - z v_{35} = 0 \\
 & z v_{13} + z v_{23} + z v_{33} - z v_{44} - z v_{45} = 0 \\
 & z v_{14} + z v_{24} + z v_{34} + z v_{44} - z v_{55} = 0 \\
 & z v_{11} + z v_{12} + z v_{13} + z v_{14} + z v_{15} - y_1 \leq 0 \\
 & z v_{22} + z v_{23} + z v_{24} + z v_{25} - y_2 \leq 0 \\
 & z v_{33} + z v_{34} + z v_{35} - y_3 \leq 0 \\
 & z v_{44} + z v_{45} - y_4 \leq 0 \\
 & z v_{55} - y_5 \leq 0 \\
 & 2 z v_{11} + 3 z v_{12} + 6 z v_{13} + 10 z v_{14} + 11 z v_{15} \leq 4 \\
 & z v_{22} + 4 z v_{23} + 8 z v_{24} + 9 z v_{25} \leq 4 \\
 & 3 z v_{33} + 7 z v_{34} + 8 z v_{35} \leq 4 \\
 & 4 z v_{44} + 5 z v_{45} \leq 4 \\
 & z v_{55} \leq 4 \\
 & z v_{11}, z v_{12}, z v_{13}, \dots, z v_{55} \geq 0 \\
 & y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

Una soluzione ottima $(\tilde{z}v, \tilde{y})(\text{MIP}_{\text{CLSP}}^{\text{SP}})$ è:

$$\tilde{z}v_{12} = 1, \quad \tilde{z}v_{33} = \frac{4}{5}, \quad \tilde{z}v_{35} = \frac{1}{5}, \quad \tilde{z}v_{45} = \frac{4}{5}, \quad \tilde{y} = (1, 0, 1, 1, 0),$$

e tutte le altre variabili $z v_{tk}$ sono nulle. È il piano ottimo $\tilde{x} = (3, 0, 4, 4, 0)$, che non è un cammino: nel periodo 3 produce 4 unità, più della domanda 3 del periodo 3 e meno della domanda 7 dei periodi 3 e 4. È la combinazione, con pesi $\frac{4}{5}$ e $\frac{1}{5}$, dei cammini $0 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5$ (piano $(3, 0, 3, 5, 0)$) e $0 \rightarrow 2 \rightarrow 5$ (piano $(3, 0, 8, 0, 0)$). Le quantità sono $x_1 = D_{1,2} z v_{12} = 3$, $x_3 = 3 \cdot \frac{4}{5} + 8 \cdot \frac{1}{5} = 4$ e $x_4 = 5 \cdot \frac{4}{5} = 4$. Il valore ottimo $z(\text{MIP}_{\text{CLSP}}^{\text{SP}})$ è

$$\underbrace{3 \cdot 50}_{\text{setup}} + \underbrace{10 \cdot 1 + 0 \cdot \frac{4}{5} + 60 \cdot \frac{1}{5} + 10 \cdot \frac{4}{5}}_{=30} = 180.$$

Per ottenere un rilassamento lineare del modello $\text{MIP}_{\text{CLSP}}^{\text{SP}}$, rilassiamo i vincoli (15.3g) nei bound $0 \leq y_t \leq 1$. Il modello LP ottenuto è il seguente:

$$\min \sum_{t \in T} s c_t y_t + \sum_{t \in T} \sum_{k=t}^m c v_{tk} z v_{tk} \quad (15.4a)$$

$$\text{soggetto a } \sum_{k=1}^m z v_{1k} = 1, \quad (15.4b)$$

$$\sum_{u=1}^{t-1} z v_{u,t-1} - \sum_{k=t}^m z v_{tk} = 0, \quad \forall t \in T \setminus \{1\}, \quad (15.4c)$$

$$\sum_{k=t}^m z v_{tk} \leq y_t, \quad \forall t \in T, \quad (15.4d)$$

$$\sum_{k=t}^m D_{t,k} z v_{tk} \leq \text{cap}_t, \quad \forall t \in T, \quad (15.4e)$$

$$y_t \leq 1, \quad \forall t \in T, \quad (15.4f)$$

$$z v_{tk} \geq 0, \quad \forall t, k \in T, \ k \geq t, \quad (15.4g)$$

$$y_t \geq 0, \quad \forall t \in T. \quad (15.4h)$$

Questo modello LP si chiama modello $\text{LP}_{\text{CLSP}}^{\text{SP}}$.

Esempio 15.5: Modello $\text{LP}_{\text{CLSP}}^{\text{SP}}$

Il modello $\text{LP}_{\text{CLSP}}^{\text{SP}}$ per l'istanza del CLS dell'Esempio 15.1 è:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 50 y_1 + 50 y_2 + 50 y_3 + 50 y_4 + 50 y_5 + 10 z v_{12} + 70 z v_{13} \\
 & + 190 z v_{14} + 230 z v_{15} + 30 z v_{23} + 110 z v_{24} + 140 z v_{25} + 40 z v_{34} \\
 & + 60 z v_{35} + 10 z v_{45} \\
 \text{soggetto a} \quad & z v_{11} + z v_{12} + z v_{13} + z v_{14} + z v_{15} = 1 \\
 & z v_{11} - z v_{22} - z v_{23} - z v_{24} - z v_{25} = 0 \\
 & z v_{12} + z v_{22} - z v_{33} - z v_{34} - z v_{35} = 0 \\
 & z v_{13} + z v_{23} + z v_{33} - z v_{44} - z v_{45} = 0 \\
 & z v_{14} + z v_{24} + z v_{34} + z v_{44} - z v_{55} = 0 \\
 & z v_{11} + z v_{12} + z v_{13} + z v_{14} + z v_{15} - y_1 \leq 0 \\
 & z v_{22} + z v_{23} + z v_{24} + z v_{25} - y_2 \leq 0 \\
 & z v_{33} + z v_{34} + z v_{35} - y_3 \leq 0 \\
 & z v_{44} + z v_{45} - y_4 \leq 0 \\
 & z v_{55} - y_5 \leq 0 \\
 & 2 z v_{11} + 3 z v_{12} + 6 z v_{13} + 10 z v_{14} + 11 z v_{15} \leq 4 \\
 & z v_{22} + 4 z v_{23} + 8 z v_{24} + 9 z v_{25} \leq 4 \\
 & 3 z v_{33} + 7 z v_{34} + 8 z v_{35} \leq 4 \\
 & 4 z v_{44} + 5 z v_{45} \leq 4 \\
 & z v_{55} \leq 4 \\
 & y_1 \leq 1 \\
 & y_2 \leq 1 \\
 & y_3 \leq 1 \\
 & y_4 \leq 1 \\
 & y_5 \leq 1 \\
 & z v_{11}, z v_{12}, z v_{13}, \dots, z v_{55} \geq 0 \\
 & y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0
 \end{aligned}$$

Una soluzione ottima $(\tilde{z}\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{y}})(\text{LP}_{\text{CLSP}}^{\text{SP}})$ è:

$$\tilde{z}v_{12} = 1, \quad \tilde{z}v_{33} = \frac{4}{5}, \quad \tilde{z}v_{35} = \frac{1}{5}, \quad \tilde{z}v_{45} = \frac{4}{5}, \quad \tilde{\mathbf{y}} = (1, 0, 1, \frac{4}{5}, 0),$$

e tutte le altre variabili $z v_{tk}$ sono nulle: sono gli archi del piano ottimo, con il setup del periodo 4 pagato solo per la frazione $\frac{4}{5}$. Il valore ottimo $z(\text{LP}_{\text{CLSP}}^{\text{SP}})$ è $180 - \frac{1}{5} \cdot 50 = 170$.

15.6 Confronto fra le formulazioni

- Le formulazioni hanno lo stesso valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{CLSP}}) = z(\text{MIP}_{\text{CLSP}}^{\text{SP}}) = 180$, ma i loro rilassamenti lineari hanno valori ottimi diversi. Sull'istanza di riferimento i lower bound, calcolati con l'algoritmo del simplesso in aritmetica esatta e verificati con Gurobi, sono i seguenti.
- L'ultima colonna è il gap del [Capitolo 1 «Problemi di ottimizzazione combinatoria»](#) fra il bound e il valore ottimo; non è definito per il bound 0.

Modello	Lower bound	Gap $\frac{180-\text{LB}}{\text{LB}}$
Senza setup	0	non definito
$\text{LP}_{\text{CLSP}}^{\text{dem}} (M_t = D_{t,m})$	99.65	80.6%
$\text{LP}_{\text{CLSP}}^{\text{cap}} (M_t = \text{cap}_t)$	137.50	30.9%
$\text{LP}_{\text{CLSP}}^{\text{strong}} (M_t = \min\{\text{cap}_t, D_{t,m}\})$	157.50	14.3%
$\text{LP}_{\text{CLSP}}^{\text{SP}}$ (cammino minimo)	170	5.9%

- Il bound 170 della formulazione a cammino minimo è il valore ottimo del problema senza capacità (piano $(3, 0, 8, 0, 0)$, di costo 170): i vincoli di capacità (15.4e) agiscono solo sulle quantità, e una combinazione di cammini può soddisfarli.
- Il prezzo della formulazione a cammino minimo è la sua dimensione: ci sono $O(m^2)$ variabili $z_{v_{tk}}$, contro le $O(m)$ variabili della formulazione big-M.

15.7 Modelli PLI per le varianti

I problemi di questa sezione sono le varianti del problema di lot sizing capacitato definite nel [Capitolo 8 «Problemi di lot sizing»](#), [Sezione 8.6](#). Ogni sottosezione scrive il modello PLI di una variante, nell'ordine di quel capitolo.

15.7.1 Il problema di lot sizing senza capacità

- Dato un insieme $T = \{1, 2, \dots, m\}$ di periodi con domande d_t e senza capacità vincolante, introduciamo, per ogni periodo $t \in T$, le seguenti **variabili intere** e **variabili binarie**:

$$x_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ (produzione)}, \quad s_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ (scorta alla fine del periodo)},$$

$$y_t = \begin{cases} 1 & \text{se c'è un setup nel periodo } t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Poiché $s_m = 0$, la produzione del periodo t vale al più la domanda $D_{t,m}$ dei periodi $t, \dots, m$: questo è il valore di big-M del legame fra x_t e y_t .

Usando queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema

di lot sizing senza capacità (ULS) è il seguente:

$$\min \sum_{t \in T} (sc_t y_t + vc_t x_t + hc_t s_t) \quad (15.5a)$$

$$\text{soggetto a } s_{t-1} + x_t = d_t + s_t, \quad \forall t \in T, \quad (15.5b)$$

$$x_t \leq D_{t,m} y_t, \quad \forall t \in T, \quad (15.5c)$$

$$s_0 = s_m = 0, \quad (15.5d)$$

$$x_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall t \in T, \quad (15.5e)$$

$$s_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall t \in T, \quad (15.5f)$$

$$y_t \in \{0, 1\}, \quad \forall t \in T. \quad (15.5g)$$

Questo modello PLI si chiama modello ILP_{ULS} .

- Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello ILP_{ULS} :
 - la funzione obiettivo lineare (15.5a) minimizza il costo dei setup, della produzione e del mantenimento a scorta;
 - i vincoli (15.5b) sono i vincoli di bilanciamento del flusso (m vincoli lineari);
 - i vincoli (15.5c) impongono un setup in ogni periodo con produzione positiva (m vincoli lineari);
 - il vincolo (15.5d) impone una scorta vuota all’inizio e alla fine dell’orizzonte;
 - infine, i vincoli (15.5e)–(15.5g) definiscono le variabili del modello PLI.
- Il modello ILP_{ULS} è il modello ILP_{CLSP} senza i vincoli di capacità (15.1d) e con i valori di big-M $M_t = D_{t,m}$. L’algoritmo di PD di Wagner e Whitin del [Capitolo 25 «PD per il problema di lot sizing senza capacità»](#) risolve l’ULS in tempo polinomiale.

Esempio 15.6: Modello ILP_{ULS}

Consideriamo l’istanza del CLS dell’[Esempio 15.1](#) senza le capacità: le domande sono $\mathbf{d} = (2, 1, 3, 4, 1)$, i costi di setup $sc_t = 50$, i costi di mantenimento $hc_t = 10$, e $vc_t = 0$. I valori di big-M sono $D_{t,5} = (11, 9, 8, 5, 1)$, e il modello ILP_{ULS} per questa istanza dell’ULS è:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 50 y_1 + 50 y_2 + 50 y_3 + 50 y_4 + 50 y_5 + 10 s_1 \\
 & + 10 s_2 + 10 s_3 + 10 s_4 + 10 s_5 \\
 \text{soggetto a} \quad & x_1 - s_1 = 2 \\
 & s_1 + x_2 - s_2 = 1 \\
 & s_2 + x_3 - s_3 = 3 \\
 & s_3 + x_4 - s_4 = 4 \\
 & s_4 + x_5 - s_5 = 1 \\
 & x_1 - 11 y_1 \leq 0 \\
 & x_2 - 9 y_2 \leq 0 \\
 & x_3 - 8 y_3 \leq 0 \\
 & x_4 - 5 y_4 \leq 0 \\
 & x_5 - y_5 \leq 0 \\
 & s_5 = 0 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\
 & s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\
 & y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

Una soluzione ottima $(\tilde{y}, \tilde{x}, \tilde{s})$ (ILP_{ULS}) è:

$$\tilde{y} = (1, 0, 1, 0, 0), \quad \tilde{x} = (3, 0, 8, 0, 0), \quad \tilde{s} = (1, 0, 5, 1, 0)$$

Il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{ULS}})$ è $2 \cdot 50 + (1 + 5 + 1) \cdot 10 = 170$, il bound della formulazione a cammino minimo del CLS. La soluzione ottima non è unica: anche il piano $(3, 0, 3, 5, 0)$, con tre setup e le scorte $(1, 0, 0, 1, 0)$, costa $3 \cdot 50 + 2 \cdot 10 = 170$.

15.7.2 Più prodotti e tempi di setup

- Un insieme P di prodotti condivide la risorsa di ogni periodo. Scriviamo d_{pt} , sc_{pt} , vc_{pt} e hc_{pt} per i dati del prodotto $p \in P$ nel periodo $t \in T$. Produrre un'unità di p richiede il tempo $vt_{pt} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, un setup richiede il tempo $st_{pt} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, e la capacità cap_t è un tempo. Per $j \leq k$ scriviamo $sd_{pjk} = \sum_{u=j}^k d_{pu}$ per la domanda del prodotto p nei periodi $j, \dots, k$.
- Introduciamo, per ogni prodotto $p \in P$ e ogni periodo $t \in T$, le seguenti **variabili intere** e **variabili binarie**:

$$x_{pt} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ (produzione)}, \quad s_{pt} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ (scorta alla fine del periodo)},$$

$$y_{pt} = \begin{cases} 1 & \text{se c'è un setup del prodotto } p \text{ nel periodo } t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Le scorte all'inizio dell'orizzonte sono le costanti $s_{p0} = 0$.

Usando queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema di lot sizing con più prodotti e tempi di setup (MLS) è il seguente:

$$\min \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} (sc_{pt} y_{pt} + vc_{pt} x_{pt} + hc_{pt} s_{pt}) \quad (15.6a)$$

$$\text{soggetto a } s_{p,t-1} + x_{pt} = d_{pt} + s_{pt}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T, \quad (15.6b)$$

$$\sum_{p \in P} (st_{pt} y_{pt} + vt_{pt} x_{pt}) \leq cap_t, \quad \forall t \in T, \quad (15.6c)$$

$$x_{pt} \leq M_{pt} y_{pt}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T, \quad (15.6d)$$

$$s_{p0} = s_{pm} = 0, \quad \forall p \in P, \quad (15.6e)$$

$$x_{pt} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T, \quad (15.6f)$$

$$s_{pt} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T, \quad (15.6g)$$

$$y_{pt} \in \{0, 1\}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T. \quad (15.6h)$$

Questo modello PLI si chiama modello ILP_{CLSP}^P .

- Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello ILP_{CLSP}^P :
 - la funzione obiettivo lineare (15.6a) minimizza il costo dei setup, della produzione e del mantenimento a scorta di tutti i prodotti;
 - i vincoli (15.6b) sono i vincoli di bilanciamento del flusso di ogni prodotto ($|P| m$ vincoli lineari);
 - i vincoli (15.6c) impongono che i tempi di setup e i tempi di produzione di ogni periodo non superino la sua capacità (m vincoli lineari);
 - i vincoli (15.6d) collegano le quantità con i setup ($|P| m$ vincoli lineari);
 - i vincoli (15.6e) impongono una scorta vuota all'inizio e alla fine dell'orizzonte;
 - infine, i vincoli (15.6f)–(15.6h) definiscono le variabili del modello PLI.
- Un setup di p nel periodo t lascia il tempo $cap_t - st_{pt}$ per la produzione, e $s_{pm} = 0$ limita la produzione alla domanda residua. Il valore forte di big-M è

$$M_{pt} = \min \left\{ \left\lfloor \frac{cap_t - st_{pt}}{vt_{pt}} \right\rfloor, sd_{ptm} \right\}.$$

- I prodotti interagiscono solo attraverso i vincoli di capacità (15.6c): senza di essi, il modello si scompone in $|P|$ modelli indipendenti a un solo prodotto.

Esempio 15.7: Modello ILP_{CLSP}^P

Consideriamo $|P| = 2$ prodotti e $m = 3$ periodi, con capacità $cap_t = 9$, tempi di produzione $vt_{pt} = 1$, tempi di setup $st_{pt} = 1$, costi di mantenimento $hc_{pt} = 5$ e costi di produzione $vc_{pt} = 0$. I costi di setup sono $sc_{1t} = 30$ e $sc_{2t} = 40$, e le domande sono:

periodo t	prodotto 1			prodotto 2		
	1	2	3	1	2	3
d_{pt}	3	2	4	2	4	1
sd_{ptm}	9	6	4	7	5	1
M_{pt}	8	6	4	7	5	1

Il modello $\text{ILP}_{\text{CLSP}}^P$ con i valori forti di big-M per questa istanza è:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 30 y_{11} + 30 y_{12} + 30 y_{13} + 40 y_{21} + 40 y_{22} + 40 y_{23} \\
 & + 5 s_{11} + 5 s_{12} + 5 s_{13} + 5 s_{21} + 5 s_{22} + 5 s_{23} \\
 \text{soggetto a} \quad & x_{11} - s_{11} = 3 \\
 & s_{11} + x_{12} - s_{12} = 2 \\
 & s_{12} + x_{13} - s_{13} = 4 \\
 & x_{21} - s_{21} = 2 \\
 & s_{21} + x_{22} - s_{22} = 4 \\
 & s_{22} + x_{23} - s_{23} = 1 \\
 & x_{11} + x_{21} + y_{11} + y_{21} \leq 9 \\
 & x_{12} + x_{22} + y_{12} + y_{22} \leq 9 \\
 & x_{13} + x_{23} + y_{13} + y_{23} \leq 9 \\
 & x_{11} - 8 y_{11} \leq 0 \\
 & x_{12} - 6 y_{12} \leq 0 \\
 & x_{13} - 4 y_{13} \leq 0 \\
 & x_{21} - 7 y_{21} \leq 0 \\
 & x_{22} - 5 y_{22} \leq 0 \\
 & x_{23} - y_{23} \leq 0 \\
 & s_{13} = 0 \\
 & s_{23} = 0 \\
 & x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\
 & s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{21}, s_{22}, s_{23} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\
 & y_{11}, y_{12}, y_{13}, y_{21}, y_{22}, y_{23} \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

Una soluzione ottima $(\tilde{y}, \tilde{x}, \tilde{s})(\text{ILP}_{\text{CLSP}}^P)$ è:

$$\begin{aligned}
 \tilde{y}_{11} = \tilde{y}_{13} = \tilde{y}_{21} = \tilde{y}_{22} = 1, \quad \tilde{y}_{12} = \tilde{y}_{23} = 0, \\
 \tilde{x}_{11} = 5, \quad \tilde{x}_{13} = 4, \quad \tilde{x}_{21} = 2, \quad \tilde{x}_{22} = 5, \quad \tilde{x}_{12} = \tilde{x}_{23} = 0, \\
 \tilde{s}_{11} = 2, \quad \tilde{s}_{22} = 1, \quad \text{tutte le altre } \tilde{s}_{pt} = 0
 \end{aligned}$$

Il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{CLSP}}^P)$ è $2 \cdot 30 + 2 \cdot 40 + (2 + 1) \cdot 5 = 155$, e la soluzione ottima è unica (Gurobi). Il periodo 1 usa tutta la sua capacità, $5 + 2 + 1 + 1 = 9$. Senza i vincoli

di capacità il prodotto 2 sarebbe prodotto solo nel periodo 1, con valore 140: questo piano richiede il tempo $5 + 7 + 1 + 1 = 14 > 9$.

15.7.3 Scorta iniziale

- I dati sono quelli del problema di lot sizing con più prodotti e tempi di setup. In più, la scorta iniziale del prodotto p è una decisione, acquistata al costo fc_p per unità.
- Introduciamo le variabili intere x_{pt} , s_{pt} e le variabili binarie y_{pt} del modello ILP_{CLSP}^P e, per ogni prodotto $p \in P$, la seguente **variabile intera**:

$si_p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (scorta del prodotto p all'inizio dell'orizzonte).

Usando queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema di lot sizing con scorta iniziale (LS-SI) è il seguente:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{p \in P} fc_p si_p + \\ & \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} (sc_{pt} y_{pt} + vc_{pt} x_{pt} + hc_{pt} s_{pt}) \end{aligned} \quad (15.7a)$$

$$\text{soggetto a} \quad si_p + x_{p1} = d_{p1} + s_{p1}, \quad \forall p \in P, \quad (15.7b)$$

$$s_{p,t-1} + x_{pt} = d_{pt} + s_{pt}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T \setminus \{1\}, \quad (15.7c)$$

$$\sum_{p \in P} (st_{pt} y_{pt} + vt_{pt} x_{pt}) \leq cap_t, \quad \forall t \in T, \quad (15.7d)$$

$$x_{pt} \leq M_{pt} y_{pt}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T, \quad (15.7e)$$

$$s_{pm} = 0, \quad \forall p \in P, \quad (15.7f)$$

$$x_{pt} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T, \quad (15.7g)$$

$$s_{pt} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T, \quad (15.7h)$$

$$si_p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall p \in P, \quad (15.7i)$$

$$y_{pt} \in \{0, 1\}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T. \quad (15.7j)$$

Questo modello PLI si chiama modello ILP_{CLSP}^{SI} .

- Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello ILP_{CLSP}^{SI} :
 - la funzione obiettivo lineare (15.7a) minimizza il costo della scorta iniziale, dei setup, della produzione e del mantenimento a scorta;
 - i vincoli (15.7b) e (15.7c) sono i vincoli di bilanciamento del flusso di ogni prodotto, con la scorta iniziale si_p nel primo periodo ($|P| m$ vincoli lineari);
 - i vincoli (15.7d) impongono che i tempi di setup e i tempi di produzione di ogni periodo non superino la sua capacità (m vincoli lineari); i vincoli (15.7e) collegano le quantità con i setup ($|P| m$ vincoli lineari);

- i vincoli (15.7f) impongono una scorta vuota alla fine dell'orizzonte ($|P|$ vincoli lineari);
- infine, i vincoli (15.7g)–(15.7j) definiscono le variabili del modello PLI.
- Il modello $\text{ILP}_{\text{CLSP}}^{\text{SI}}$ è il modello $\text{ILP}_{\text{CLSP}}^P$ con le variabili si_p al posto delle costanti $s_{p0} = 0$, e con il loro costo nella funzione obiettivo; i valori forti di big-M M_{pt} sono gli stessi.

Esempio 15.8: Modello $\text{ILP}_{\text{CLSP}}^{\text{SI}}$

Consideriamo $|P| = 2$ prodotti e $m = 3$ periodi, con capacità $cap_1 = 2500$, $cap_2 = 2100$, $cap_3 = 2500$, i costi della scorta iniziale $fc_1 = fc_2 = 3000$ e i costi di setup $sc_{pt} = 10000$. Gli altri dati sono:

periodo t	prodotto 1			prodotto 2		
	1	2	3	1	2	3
d_{pt}	100	200	10	10	100	150
vt_{pt}	20	10	10	10	5	5
st_{pt}	100	100	100	110	110	110
hc_{pt}	110	100	100	105	105	105
vc_{pt}	1100	1000	1000	900	800	800

I valori di big-M sono:

periodo t	1	2	3	1	2	3
sd_{ptm}	310	210	10	260	250	150
$\lfloor (cap_t - st_{pt})/vt_{pt} \rfloor$	120	200	240	239	398	478
M_{pt}	120	200	10	239	250	150

Il modello $\text{ILP}_{\text{CLSP}}^{\text{SI}}$ con i valori forti di big-M per questa istanza è:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 3000 s_{i_1} + 3000 s_{i_2} + 10000 y_{11} + 10000 y_{12} + 10000 y_{13} + 10000 y_{21} \\
 & + 10000 y_{22} + 10000 y_{23} + 1100 x_{11} + 1000 x_{12} + 1000 x_{13} + 900 x_{21} \\
 & + 800 x_{22} + 800 x_{23} + 110 s_{11} + 100 s_{12} + 100 s_{13} + 105 s_{21} \\
 & + 105 s_{22} + 105 s_{23} \\
 \text{soggetto a} \quad & s_{i_1} + x_{11} - s_{11} = 100 \\
 & s_{11} + x_{12} - s_{12} = 200 \\
 & s_{12} + x_{13} - s_{13} = 10 \\
 & s_{i_2} + x_{21} - s_{21} = 10 \\
 & s_{21} + x_{22} - s_{22} = 100 \\
 & s_{22} + x_{23} - s_{23} = 150 \\
 & 20 x_{11} + 10 x_{21} + 100 y_{11} + 110 y_{21} \leq 2500 \\
 & 10 x_{12} + 5 x_{22} + 100 y_{12} + 110 y_{22} \leq 2100 \\
 & 10 x_{13} + 5 x_{23} + 100 y_{13} + 110 y_{23} \leq 2500 \\
 & x_{11} - 120 y_{11} \leq 0 \\
 & x_{12} - 200 y_{12} \leq 0 \\
 & x_{13} - 10 y_{13} \leq 0 \\
 & x_{21} - 239 y_{21} \leq 0 \\
 & x_{22} - 250 y_{22} \leq 0 \\
 & x_{23} - 150 y_{23} \leq 0 \\
 & s_{13} = 0 \\
 & s_{23} = 0 \\
 & s_{i_1}, s_{i_2} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\
 & x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\
 & s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{21}, s_{22}, s_{23} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\
 & y_{11}, y_{12}, y_{13}, y_{21}, y_{22}, y_{23} \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

Una soluzione ottima del modello $\text{ILP}_{\text{CLSP}}^{\text{SI}}$ è:

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}_{11} = 59, \quad \tilde{x}_{12} = 200, \quad \tilde{x}_{13} = 10, \quad \tilde{x}_{21} = 110, \quad \tilde{x}_{22} = 0, \quad \tilde{x}_{23} = 150, \\
 \tilde{s}_{i_1} = 41, \quad \tilde{s}_{i_2} = 0, \quad \tilde{s}_{21} = 100, \quad \text{tutte le altre } \tilde{s}_{pt} = 0,
 \end{aligned}$$

con un setup in ogni periodo tranne che per il prodotto 2 nel periodo 2. Il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{CLSP}}^{\text{SI}})$ è 677 400, e la soluzione ottima è unica (Gurobi). Il prodotto 1 parte con 41 unità acquistate all'inizio dell'orizzonte, perché il periodo 1 non ha il tempo di produrre tutta la sua domanda.

Per ottenere un rilassamento lineare del modello $\text{ILP}_{\text{CLSP}}^{\text{SI}}$, rilassiamo i vincoli (15.7g)–(15.7j)

in vincoli di non negatività e nei bound $y_{pt} \leq 1$. Il modello LP ottenuto è il seguente:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{p \in P} f c_p s i_p + \\ & \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} (s c_{pt} y_{pt} + v c_{pt} x_{pt} + h c_{pt} s_{pt}) \end{aligned} \quad (15.8a)$$

$$\text{soggetto a} \quad s i_p + x_{p1} = d_{p1} + s_{p1}, \quad \forall p \in P, \quad (15.8b)$$

$$s_{p,t-1} + x_{pt} = d_{pt} + s_{pt}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T \setminus \{1\}, \quad (15.8c)$$

$$\sum_{p \in P} (s t_{pt} y_{pt} + v t_{pt} x_{pt}) \leq cap_t, \quad \forall t \in T, \quad (15.8d)$$

$$x_{pt} \leq M_{pt} y_{pt}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T, \quad (15.8e)$$

$$s_{pm} = 0, \quad \forall p \in P, \quad (15.8f)$$

$$y_{pt} \leq 1, \quad \forall p \in P, \forall t \in T, \quad (15.8g)$$

$$x_{pt} \geq 0, \quad \forall p \in P, \forall t \in T, \quad (15.8h)$$

$$s_{pt} \geq 0, \quad \forall p \in P, \forall t \in T, \quad (15.8i)$$

$$y_{pt} \geq 0, \quad \forall p \in P, \forall t \in T, \quad (15.8j)$$

$$s i_p \geq 0, \quad \forall p \in P. \quad (15.8k)$$

Questo modello LP si chiama modello LP_{CLSP}^{SI} .

- Nella formulazione a cammino minimo ogni prodotto ha la sua rete, con una variabile continua aggiuntiva $w_{pt} \geq 0$, l'arco dal nodo 0 al nodo t , per la frazione della scorta iniziale che copre le domande dei primi t periodi. I costi degli archi sono

$$c v_{ptk} = v c_{pt} s d_{ptk} + \sum_{s=t+1}^k \sum_{u=t}^{s-1} h c_{pu} d_{ps}, \quad c i_{pt} = f c_p s d_{p1t} + \sum_{s=2}^t \sum_{u=1}^{s-1} h c_{pu} d_{ps}.$$

Usando queste variabili, un modello di programmazione lineare intera mista (MIP) per il problema di lot sizing con scorta iniziale (LS-SI) è il seguente:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} (s c_{pt} y_{pt} + c i_{pt} w_{pt}) + \\ & \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} \sum_{k=t}^m c v_{ptk} z v_{ptk} \end{aligned} \quad (15.9a)$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{k=1}^m (w_{pk} + z v_{p1k}) = 1, \quad \forall p \in P, \quad (15.9b)$$

$$w_{p,t-1} + \sum_{u=1}^{t-1} z v_{p,u,t-1} - \sum_{k=t}^m z v_{ptk} = 0, \quad \forall p \in P, \forall t \in T \setminus \{1\}, \quad (15.9c)$$

$$\sum_{k=t}^m z v_{ptk} \leq y_{pt}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T, \quad (15.9d)$$

$$\sum_{p \in P} s t_{pt} y_{pt} + \sum_{p \in P} \sum_{k=t}^m v t_{pt} s d_{ptk} z v_{ptk} \leq cap_t, \quad \forall t \in T, \quad (15.9e)$$

$$\sum_{k=t}^m s d_{ptk} z v_{ptk} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T, \quad (15.9f)$$

$$\sum_{t \in T} s d_{p1t} w_{pt} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall p \in P, \quad (15.9g)$$

$$z v_{ptk} \geq 0, \quad \forall p \in P, \forall t, k \in T, k \geq t, \quad (15.9h)$$

$$w_{pt} \geq 0, \quad \forall p \in P, \forall t \in T, \quad (15.9i)$$

$$y_{pt} \in \{0, 1\}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T. \quad (15.9j)$$

Questo modello MIP si chiama modello $MIP_{CLSP}^{SP,SI}$. Rilassando i vincoli (15.9j) in $0 \leq y_{pt} \leq 1$ ed eliminando i vincoli (15.9f) e (15.9g) otteniamo il modello LP chiamato modello $LP_{CLSP}^{SP,SI}$.

- Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello $MIP_{CLSP}^{SP,SI}$:
 - la funzione obiettivo lineare (15.9a) minimizza il costo dei setup, della scorta iniziale e degli archi dei piani di tutti i prodotti;
 - i vincoli (15.9b) e (15.9c) sono i vincoli di flusso della rete di ogni prodotto, con gli archi w_{pt} della scorta iniziale uscenti dal nodo 0 ($|P| m$ vincoli lineari);
 - i vincoli (15.9d) impongono il setup del prodotto p nel periodo t se questo è prodotto ($|P| m$ vincoli lineari), e i vincoli (15.9e) impongono le capacità, tempi di setup compresi (m vincoli lineari);
 - i vincoli (15.9f) e (15.9g) mantengono intere le quantità e le scorte iniziali;
 - infine, i vincoli (15.9h)–(15.9j) definiscono le variabili del modello MIP.
- La quantità prodotta è $x_{pt} = \sum_{k=t}^m s d_{ptk} z v_{ptk}$, e la scorta iniziale è $s i_p = \sum_{t \in T} s d_{p1t} w_{pt}$: i vincoli (15.9f) e (15.9g) le mantengono intere, come nel modello ILP_{CLSP}^{SI} .
- Con un solo prodotto e $v t_t = 1$ questi vincoli non servono: fissati i setup, resta un problema di flusso di costo minimo, che ha una soluzione ottima intera.
- Con più prodotti e tempi di produzione $v t_{pt} > 1$, una quantità frazionaria può usare meglio la capacità. Senza i vincoli (15.9f) e (15.9g) il modello è solo un rilassamento del problema, e il suo valore ottimo può essere minore di $z(ILP_{CLSP}^{SI})$ (Esempio 15.9).

Esempio 15.9: Lower bound con due prodotti

Per l'istanza dell'Esempio 15.8, ignorando i setup (nei costi e nelle capacità), il valore ottimo è 575400, raggiunto dalla soluzione intera $x_{11} = 120$, $x_{12} = 160$, $x_{13} = 10$, $x_{21} = 10$,

$x_{22} = 100$, $x_{23} = 150$, $s_{11} = 40$, $si_1 = 20$. I lower bound e il valore ottimo delle formulazioni sono:

Modello	Valore
Senza setup	575 400.00
LP_{CLSP}^{SI} con $M_{pt} = sd_{ptm}$	638 882.20
LP_{CLSP}^{SI} con gli M_{pt} forti	651 267.37
$LP_{CLSP}^{SP,SI}$	668 928.57
$MIP_{CLSP}^{SP,SI}$ senza (15.9f) e (15.9g)	676 450.00
ILP_{CLSP}^{SI} e $MIP_{CLSP}^{SP,SI}$ (ottimo intero)	677 400

Senza i vincoli (15.9f) e (15.9g) il modello a cammino minimo raggiunge 676 450 con gli stessi setup e le quantità frazionarie $x_{11} = 59.5$ e $si_1 = 40.5$: il periodo 1 usa allora tutta la sua capacità, $100 + 20 \cdot 59.5 + 110 + 10 \cdot 110 = 2500$.

15.7.4 Straordinari

- I dati sono quelli del problema di lot sizing con più prodotti e tempi di setup, ma il tempo di ogni periodo non è una capacità fissa: nel periodo t il tempo di lavoro in orario normale costa cw_t per unità, fino a cap_t^N , e lo straordinario costa co_t per unità, fino a cap_t^O .
- Introduciamo le variabili intere x_{pt} , s_{pt} e le variabili binarie y_{pt} del modello ILP_{CLSP}^P e, per ogni periodo $t \in T$, le seguenti **variabili intere**:

$$\mu_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ (tempo di lavoro in orario normale)}, \quad \nu_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ (straordinario)}.$$

Poiché i tempi vt_{pt} e st_{pt} sono interi, i tempi di lavoro si possono prendere interi.

Usando queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema di lot sizing con straordinari (LS-OT) è il seguente:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} (sc_{pt} y_{pt} + vc_{pt} x_{pt} + hc_{pt} s_{pt}) + \\ & \sum_{t \in T} (cw_t \mu_t + co_t \nu_t) \end{aligned} \quad (15.10a)$$

$$\text{soggetto a } s_{p,t-1} + x_{pt} = d_{pt} + s_{pt}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T, \quad (15.10b)$$

$$\sum_{p \in P} (st_{pt} y_{pt} + vt_{pt} x_{pt}) \leq \mu_t + \nu_t, \quad \forall t \in T, \quad (15.10c)$$

$$\mu_t \leq cap_t^N, \quad \forall t \in T, \quad (15.10d)$$

$$\nu_t \leq cap_t^O, \quad \forall t \in T, \quad (15.10e)$$

$$x_{pt} \leq M_{pt} y_{pt}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T, \quad (15.10f)$$

$$s_{p0} = s_{pm} = 0, \quad \forall p \in P, \quad (15.10g)$$

$$x_{pt} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T, \quad (15.10h)$$

$$s_{pt} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T, \quad (15.10i)$$

$$\mu_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall t \in T, \quad (15.10j)$$

$$\nu_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall t \in T, \quad (15.10k)$$

$$y_{pt} \in \{0, 1\}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T. \quad (15.10l)$$

Questo modello PLI si chiama modello $\text{ILP}_{\text{CLSP}}^{\text{OT}}$.

- Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello $\text{ILP}_{\text{CLSP}}^{\text{OT}}$:
 - la funzione obiettivo lineare (15.10a) aggiunge ai costi del modello $\text{ILP}_{\text{CLSP}}^P$ il costo del tempo di lavoro in orario normale e in straordinario;
 - i vincoli (15.10b) sono i vincoli di bilanciamento del flusso di ogni prodotto ($|P| m$ vincoli lineari);
 - i vincoli (15.10c) impongono che i tempi di setup e i tempi di produzione di ogni periodo siano coperti dal tempo di lavoro, in orario normale e in straordinario (m vincoli lineari);
 - i vincoli (15.10d) e (15.10e) limitano i due tempi di lavoro (m vincoli lineari ciascuno);
 - i vincoli (15.10f) collegano le quantità con i setup ($|P| m$ vincoli lineari);
 - i vincoli (15.10g) impongono una scorta vuota all’inizio e alla fine dell’orizzonte;
 - infine, i vincoli (15.10h)–(15.10l) definiscono le variabili del modello PLI.
- Il tempo disponibile nel periodo t è al più $\text{cap}_t^N + \text{cap}_t^O$, quindi il valore forte di big-M è

$$M_{pt} = \min \left\{ \left\lfloor \frac{\text{cap}_t^N + \text{cap}_t^O - st_{pt}}{vt_{pt}} \right\rfloor, sd_{ptm} \right\}.$$

- Con $co_t > cw_t$ una soluzione ottima usa lo straordinario solo quando le ore normali del periodo sono esaurite.

Esempio 15.10: Modello $\text{ILP}_{\text{CLSP}}^{\text{OT}}$

Consideriamo l’istanza del CLS dell’Esempio 15.1, con un solo prodotto ($|P| = 1$, e omettiamo l’indice p), tempi di produzione $vt_t = 1$ e tempi di setup $st_t = 0$. La capacità $\text{cap}_t = 4$ diventa l’orario normale $\text{cap}_t^N = 4$, al costo $cw_t = 1$, e in ogni periodo è disponibile un’unità di straordinario: $\text{cap}_t^O = 1$, al costo $co_t = 6$. I valori di big-M sono $M_t = \min\{5, D_{t,5}\}$, ossia $(5, 5, 5, 5, 1)$. Il modello $\text{ILP}_{\text{CLSP}}^{\text{OT}}$ per questa istanza è:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 50 y_1 + 50 y_2 + 50 y_3 + 50 y_4 + 50 y_5 + 10 s_1 \\
 & + 10 s_2 + 10 s_3 + 10 s_4 + 10 s_5 + \mu_1 + \mu_2 \\
 & + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5 + 6 \nu_1 + 6 \nu_2 + 6 \nu_3 \\
 & + 6 \nu_4 + 6 \nu_5 \\
 \text{soggetto a} \quad & x_1 - s_1 = 2 \\
 & s_1 + x_2 - s_2 = 1 \\
 & s_2 + x_3 - s_3 = 3 \\
 & s_3 + x_4 - s_4 = 4 \\
 & s_4 + x_5 - s_5 = 1 \\
 & x_1 - \mu_1 - \nu_1 \leq 0 \\
 & x_2 - \mu_2 - \nu_2 \leq 0 \\
 & x_3 - \mu_3 - \nu_3 \leq 0 \\
 & x_4 - \mu_4 - \nu_4 \leq 0 \\
 & x_5 - \mu_5 - \nu_5 \leq 0 \\
 & x_1 - 5 y_1 \leq 0 \\
 & x_2 - 5 y_2 \leq 0 \\
 & x_3 - 5 y_3 \leq 0 \\
 & x_4 - 5 y_4 \leq 0 \\
 & x_5 - y_5 \leq 0 \\
 & \mu_1 \leq 4 \\
 & \mu_2 \leq 4 \\
 & \mu_3 \leq 4 \\
 & \mu_4 \leq 4 \\
 & \mu_5 \leq 4 \\
 & \nu_1 \leq 1 \\
 & \nu_2 \leq 1 \\
 & \nu_3 \leq 1 \\
 & \nu_4 \leq 1 \\
 & \nu_5 \leq 1 \\
 & s_5 = 0 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\
 & s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\
 & \mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_5 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\
 & y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

Una soluzione ottima del modello $\text{ILP}_{\text{CLSP}}^{\text{OT}}$ è:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{y}} &= (1, 0, 1, 1, 0), & \tilde{\mathbf{x}} &= (3, 0, 3, 5, 0), & \tilde{\mathbf{s}} &= (1, 0, 0, 1, 0), \\ \tilde{\boldsymbol{\mu}} &= (3, 0, 3, 4, 0), & \tilde{\boldsymbol{\nu}} &= (0, 0, 0, 1, 0)\end{aligned}$$

Il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{CLSP}}^{\text{OT}})$ è $3 \cdot 50 + 2 \cdot 10 + 10 \cdot 1 + 1 \cdot 6 = 186$, e la soluzione ottima è unica (Gurobi). Un'unità di straordinario nel periodo 4, al costo 6, sostituisce un'unità tenuta a scorta dal periodo 3 al periodo 4, al costo 10: il piano ottimo $(3, 0, 4, 4, 0)$ del CLS qui costa 191.

15.7.5 Domanda non soddisfatta

- I dati sono quelli del problema di lot sizing con più prodotti e tempi di setup. In più, una parte della domanda d_{pt} può restare non soddisfatta, con la penalità cu_{pt} per unità.
- Introduciamo le variabili intere x_{pt} , s_{pt} e le variabili binarie y_{pt} del modello $\text{ILP}_{\text{CLSP}}^P$ e, per ogni prodotto $p \in P$ e ogni periodo $t \in T$, la seguente **variabile intera**:

$$\varepsilon_{pt} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ (domanda del prodotto } p \text{ nel periodo } t \text{ non soddisfatta)}.$$

Usando queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema di lot sizing con domanda non soddisfatta (LS-UD) è il seguente:

$$\begin{aligned}\min \quad & \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} (sc_{pt} y_{pt} + vc_{pt} x_{pt} + hc_{pt} s_{pt}) + \\ & \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} cu_{pt} \varepsilon_{pt}\end{aligned}\tag{15.11a}$$

$$\text{soggetto a} \quad s_{p,t-1} + x_{pt} = d_{pt} - \varepsilon_{pt} + s_{pt}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T,\tag{15.11b}$$

$$\sum_{p \in P} (st_{pt} y_{pt} + vt_{pt} x_{pt}) \leq cap_t, \quad \forall t \in T,\tag{15.11c}$$

$$x_{pt} \leq M_{pt} y_{pt}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T,\tag{15.11d}$$

$$\varepsilon_{pt} \leq d_{pt}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T,\tag{15.11e}$$

$$s_{p0} = s_{pm} = 0, \quad \forall p \in P,\tag{15.11f}$$

$$x_{pt} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T,\tag{15.11g}$$

$$s_{pt} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T,\tag{15.11h}$$

$$\varepsilon_{pt} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T, \quad (15.11i)$$

$$y_{pt} \in \{0, 1\}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T. \quad (15.11j)$$

Questo modello PLI si chiama modello $\text{ILP}_{\text{CLSP}}^{\text{UD}}$.

- Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello $\text{ILP}_{\text{CLSP}}^{\text{UD}}$:
 - la funzione obiettivo lineare (15.11a) aggiunge ai costi del modello $\text{ILP}_{\text{CLSP}}^P$ la penalità della domanda non soddisfatta;
 - i vincoli (15.11b) sono i vincoli di bilanciamento del flusso, con la domanda ridotta della sua parte non soddisfatta ($|P|m$ vincoli lineari);
 - i vincoli (15.11c) sono i vincoli di capacità e i vincoli (15.11d) collegano le quantità con i setup (m e $|P|m$ vincoli lineari);
 - i vincoli (15.11e) garantiscono che la domanda non soddisfatta non superi la domanda ($|P|m$ vincoli lineari);
 - i vincoli (15.11f) impongono una scorta vuota all'inizio e alla fine dell'orizzonte;
 - infine, i vincoli (15.11g)–(15.11j) definiscono le variabili del modello PLI.
- I valori di big-M del modello $\text{ILP}_{\text{CLSP}}^P$ restano validi, poiché la produzione può solo diminuire. Con $\varepsilon_{pt} = 0$ per ogni prodotto e periodo il modello è il modello $\text{ILP}_{\text{CLSP}}^P$.

Esempio 15.11: Modello $\text{ILP}_{\text{CLSP}}^{\text{UD}}$

Consideriamo l'istanza del CLS dell'Esempio 15.1, con un solo prodotto ($|P| = 1$, e omettiamo l'indice p), tempi di produzione $vt_t = 1$, tempi di setup $st_t = 0$ e i valori forti di big-M $M_t = (4, 4, 4, 4, 1)$. Ogni unità di domanda non soddisfatta costa $cu_t = 18$. Il modello $\text{ILP}_{\text{CLSP}}^{\text{UD}}$ per questa istanza è:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 50 y_1 + 50 y_2 + 50 y_3 + 50 y_4 + 50 y_5 + 10 s_1 \\
 & + 10 s_2 + 10 s_3 + 10 s_4 + 10 s_5 + 18 \varepsilon_1 + 18 \varepsilon_2 \\
 & + 18 \varepsilon_3 + 18 \varepsilon_4 + 18 \varepsilon_5 \\
 \text{soggetto a} \quad & x_1 - s_1 + \varepsilon_1 = 2 \\
 & s_1 + x_2 - s_2 + \varepsilon_2 = 1 \\
 & s_2 + x_3 - s_3 + \varepsilon_3 = 3 \\
 & s_3 + x_4 - s_4 + \varepsilon_4 = 4 \\
 & s_4 + x_5 - s_5 + \varepsilon_5 = 1 \\
 & x_1 \leq 4 \\
 & x_2 \leq 4 \\
 & x_3 \leq 4 \\
 & x_4 \leq 4 \\
 & x_5 \leq 4 \\
 & x_1 - 4 y_1 \leq 0 \\
 & x_2 - 4 y_2 \leq 0 \\
 & x_3 - 4 y_3 \leq 0 \\
 & x_4 - 4 y_4 \leq 0 \\
 & x_5 - y_5 \leq 0 \\
 & \varepsilon_1 \leq 2 \\
 & \varepsilon_2 \leq 1 \\
 & \varepsilon_3 \leq 3 \\
 & \varepsilon_4 \leq 4 \\
 & \varepsilon_5 \leq 1 \\
 & s_5 = 0 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\
 & s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\
 & \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\
 & y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

Una soluzione ottima del modello $\text{ILP}_{\text{CLS}}^{\text{UD}}$ è:

$$\tilde{\mathbf{y}} = (0, 0, 1, 1, 0), \quad \tilde{\mathbf{x}} = (0, 0, 3, 4, 0), \quad \tilde{\mathbf{s}} = (0, 0, 0, 0, 0), \quad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = (2, 1, 0, 0, 1)$$

Il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{CLS}}^{\text{UD}})$ è $2 \cdot 50 + 4 \cdot 18 = 172$, e la soluzione ottima è unica (Gurobi). Le domande dei periodi 1, 2 e 5 non sono soddisfatte: le loro 4 unità costano 72, e il piano risparmia un setup e tutti i costi di mantenimento a scorta del piano ottimo $(3, 0, 4, 4, 0)$ del CLS, di costo 180.

15.8 Errori tipici

Attenzione

- **Prendere un valore di big-M troppo piccolo.** Un valore minore della produzione di un piano ammissibile taglia quel piano: i valori $D_{t,m}$ e cap_t sono entrambi validi.
- **Prendere un valore di big-M troppo grande.** Ogni valore valido dà un modello corretto, ma un valore grande dà un rilassamento debole: le variabili di setup diventano quasi nulle nelle soluzioni LP, come nel bound 99.65 dell'istanza di riferimento.
- **Dimenticare i tempi di setup nei vincoli di capacità.** Con più prodotti i vincoli contengono $st_{pt} y_{pt}$ oltre a $vt_{pt} x_{pt}$.
- **Contare il costo di mantenimento della domanda del periodo di produzione.** In cv_{tk} le unità per il periodo t non vanno a scorta: la somma dei costi di mantenimento parte dalla domanda del periodo $t + 1$.
- **Credere che la formulazione a cammino minimo richieda cammini binari.** Le variabili zv_{tk} sono continue: un piano ammissibile che non è un cammino è una combinazione di cammini.
- **Dimenticare l'interezza delle quantità con più prodotti.** Con tempi di produzione $vt_{pt} > 1$ le variabili continue zv_{ptk} possono dare quantità frazionarie: il modello a cammino minimo richiede i vincoli di interezza (15.9f) e (15.9g), altrimenti è solo un rilassamento ($676\,450 < 677\,400$).
- **Mantenere la capacità fissa nel modello con straordinari.** Il tempo del periodo t è limitato dal tempo di lavoro $\mu_t + \nu_t$, e i valori di big-M usano $cap_t^N + cap_t^O$.
- **Lasciare illimitata la domanda non soddisfatta.** Senza $\varepsilon_{pt} \leq d_{pt}$ i vincoli di bilanciamento ammetterebbero una domanda netta negativa, ossia scorta creata dal nulla al prezzo della penalità.

15.9 In sintesi

In sintesi

- Senza i setup il CLS è un semplice problema di flusso; i setup richiedono le variabili binarie y_t e un legame con le quantità.
- Nella formulazione big-M il legame $x_t \leq M_t y_t$ è corretto per ogni M_t valido, ma il bound LP migliora quando M_t diminuisce: il valore forte è $\min\{cap_t, D_{t,m}\}$.
- La formulazione a cammino minimo scrive i piani come cammini in una rete, con il legame $\sum_k zv_{tk} \leq y_t$ e senza valore di big-M: il suo rilassamento è il più forte.
- Le due formulazioni hanno lo stesso valore ottimo; differiscono nel lower bound e nella dimensione del modello.

- Il modello ULS è il modello big-M senza capacità e con $M_t = D_{t,m}$: sull'istanza di riferimento il suo valore ottimo è 170.
- Le varianti mantengono la struttura del modello big-M: più prodotti condividono la capacità con i loro tempi di setup, la scorta iniziale aggiunge le variabili si_p , gli straordinari aggiungono i tempi di lavoro μ_t, ν_t , e la domanda non soddisfatta aggiunge le variabili ε_{pt} . Sull'istanza di riferimento, gli straordinari danno 186 e la domanda non soddisfatta 172.

Quadro riassuntivo dell'istanza di riferimento. Lower bound sul valore ottimo calcolati in questo capitolo:

Bound	Valore	Da
Senza setup	0	piano lot-for-lot
Big-M, $M_t = D_{t,m}$	99.65	$z(\text{LP}_{\text{CLSP}}^{\text{dem}}) = \frac{9865}{99}$
Big-M, $M_t = cap_t$	137.5	$z(\text{LP}_{\text{CLSP}}^{\text{cap}})$
Big-M forte	157.5	$z(\text{LP}_{\text{CLSP}}^{\text{strong}})$
Cammino minimo	170	$z(\text{LP}_{\text{CLSP}}^{\text{SP}})$
Valore ottimo	180	piano (3, 0, 4, 4, 0)