Regressione ai minimi quadrati

Indice

Che cosa cambia

Il modello

Caso di studio

Analisi di sensitività

Esercizi

Obiettivi (1/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- scrivere i minimi quadrati come QP;
- leggere le condizioni KKT come equazioni normali;

Obiettivi (2/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- confrontare minimi quadrati, scarti assoluti e quantili sugli stessi dati;
- restringere i coefficienti con una penalità quadratica (ridge).

Prerequisiti

- Dal modulo *Modellazione PL*, Capitolo 10 «Regressione robusta e quantile: stimare i parametri con un LP»: la regressione con scarti assoluti e quantili come LP, sugli stessi dati
- Da questo modulo, Capitolo 2 «Richiami: convessità, programmazione quadratica e condizioni KKT»: i programmi quadratici convessi, le condizioni KKT e i moltiplicatori come prezzi ombra
- Dal modulo *Algebra lineare*, Capitolo 6 «Sistemi di equazioni lineari»: i sistemi lineari, da cui vengono le equazioni normali

Che cosa cambia

Il caso e l'obiettivo nuovo

- Caso, dati e modello lineare: Modellazione PL, «Regressione robusta e quantile»
- Là: somma degli scarti **assoluti**, un LP
- Qui: somma degli scarti **al quadrato**, i minimi quadrati, un QP convesso
- Il confronto mostra che cosa si guadagna e che cosa si perde cambiando obiettivo

Il modello

Modello QP dei minimi quadrati

Modello QP dei minimi quadrati

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \tag{13.1a}$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{j=1}^{p} w_j\, x_{ij} + b + r_i = y_i, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \tag{13.1b}$$

$$w_j \gtreqless 0, \quad \forall j \in \{1, \ldots, p\}, \tag{13.1c}$$

$$b \gtreqless 0, \tag{13.1d}$$

$$r_i \gtreqless 0, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{13.1e}$$

- Un residuo libero r_i per osservazione: il quadrato non distingue il segno

Senza caratteristiche: la media

Istanza

Sette vendite: 88, 96, 104, 112, 120, 132, 148 pezzi; $p = 0$

- Passo 1: $\tilde{b} = 800/7 = 114{,}2857$, $\tilde{z} = 2619{,}4286$, $\tilde{\pi}_i = 2\tilde{r}_i$
- Passo 2: $2r_i = \pi_i$ e $\sum_i \pi_i = 0 \Rightarrow \sum_i r_i = 0$: la **media**
- Passo 3: mediana (LP, $\tau = 1/2$) 112; quantile 9/13: 120
- Passo 4: $148 \rightarrow 248$: la media sale di 14,29, la mediana resta 112

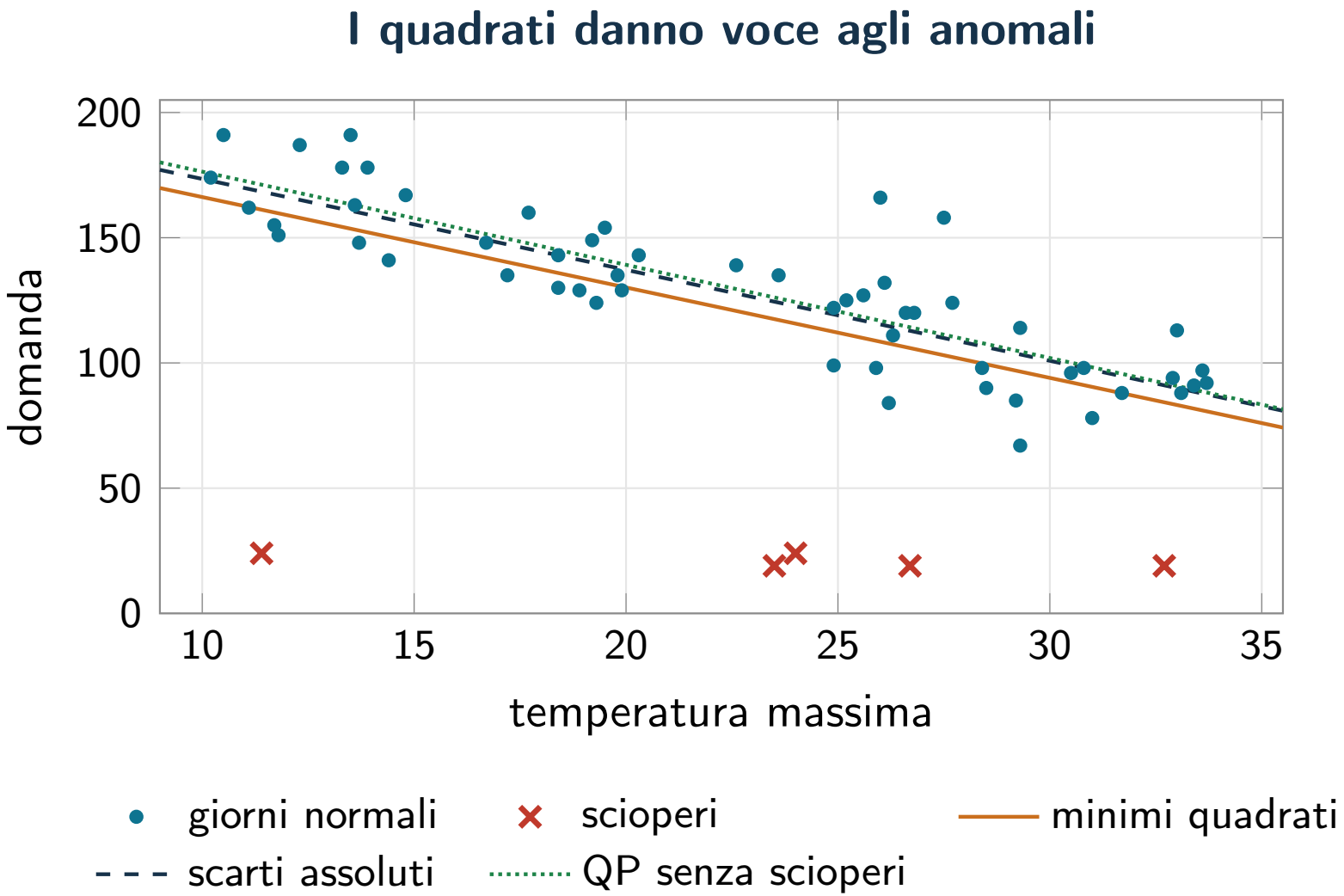
Le KKT sono le equazioni normali

$$\pi_i = 2r_i, \qquad \sum_{i=1}^{n} r_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} r_i\, x_{ij} = 0 \quad \forall j$$

- Residui a somma nulla e ortogonali a ogni caratteristica
- Il moltiplicatore è il doppio del residuo: un dato lontano pesa quanto è lontano
- Nell'LP i duali valevano $\pm 1/2$ o un valore interno

Caso di studio

Minimi quadrati contro scarti assoluti



I numeri

```
QP (minimi quadrati): domanda = 202,34 - 3,61 temp
LP (scarti assoluti): domanda = 209,77 - 3,63 temp
QP senza scioperi   : domanda = 213,58 - 3,72 temp
Quota dei quadrati dovuta agli scioperi: 71,4%
```

- Cinque giorni su sessanta fanno il 71% dell'obiettivo
- I minimi quadrati vanno accompagnati da un controllo degli anomali

Media più scorta o quantile

```
Giorno tipo (28 gradi, prezzo 3,00, weekend):
  media prevista (QP)                    128,7 pezzi
  media + z*sigma, z = 0,5024            133,5 pezzi
  quantile 9/13 previsto (LP)            132,1 pezzi
```

- La media più $z\sigma$ suppone residui normali
- La regressione quantile stima il quantile senza ipotesi sugli errori

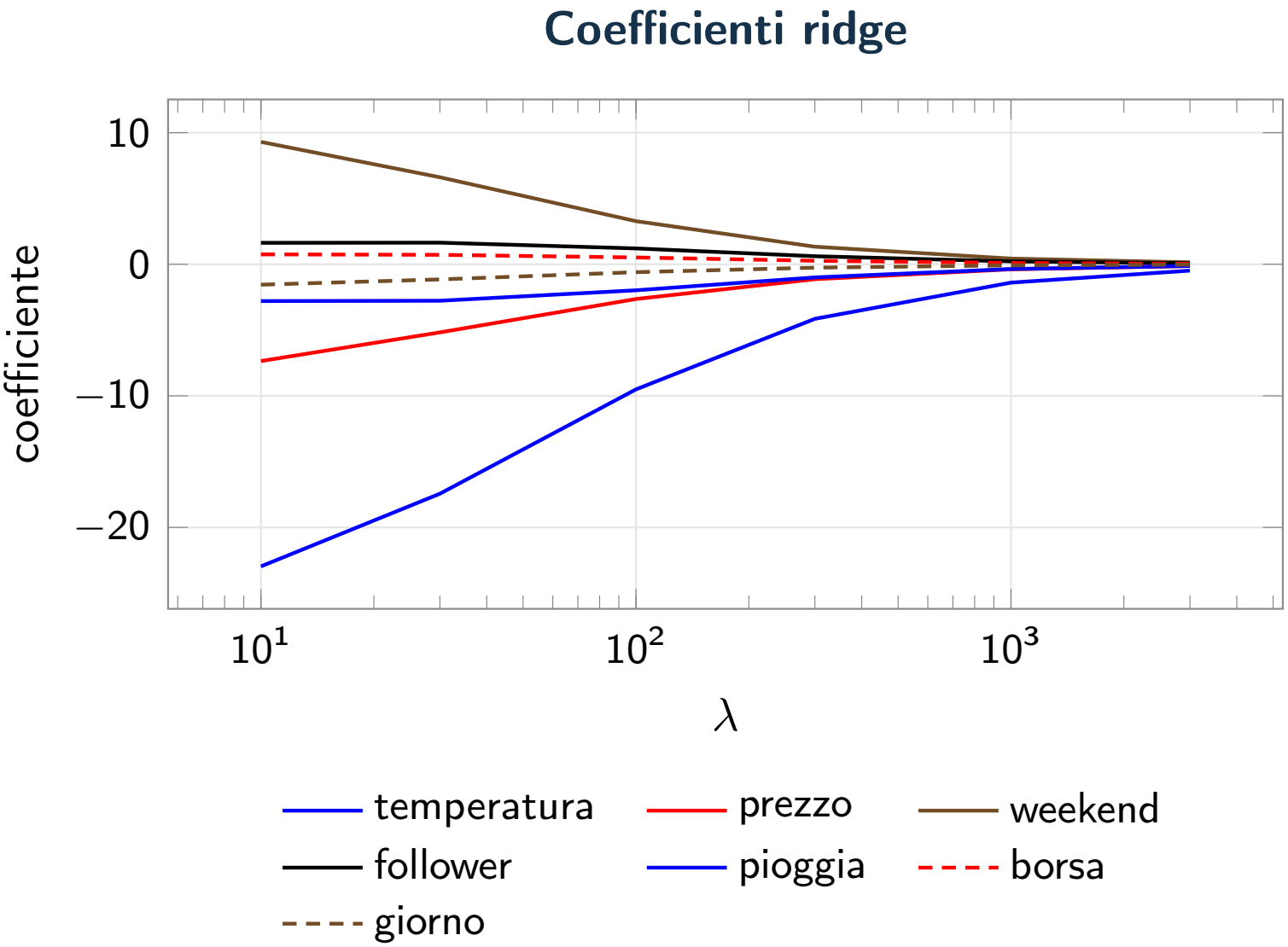
Analisi di sensitività

Un solo giorno anomalo

spostamento	QP: b	w	LP: b	w
0	213,58	-3,723	210,49	-3,578
-100	220,59	-4,113	211,63	-3,689
-200	227,60	-4,503	211,63	-3,689

- Il QP si sposta in proporzione all'errore; l'LP cambia una volta e poi si ferma
- Un giorno caldo, lontano dal centro dei dati, ha una **leva** alta

La regressione ridge



- $\lambda \sum_j w_j^2$: i coefficienti si restringono, ma nessuno si azzera

Esercizi

Esercizi

1. **A mano**: somma dei quadrati per $b = 112$ e $b = 800/7$
2. **Equazioni normali**: risolverle sui 55 giorni normali
3. **Pesi**: peso 0,01 sui giorni di sciopero
4. **Huber**: perdita quadratica fino a 20, lineare oltre
5. **Validazione**: stima sui primi 40 giorni, verifica sugli altri

Riepilogo

- I minimi quadrati sono un QP convesso; le KKT sono le equazioni normali
- Stimano la media: ottimi con errori simmetrici, fragili con gli anomali
- Per il newsvendor: media più scorta, oppure il quantile diretto
- Ridge stabilizza, il budget lineare seleziona