Localizzazione continua di un servizio

Indice

Motivazione gestionale

Costruzione guidata del modello

Esempio svolto a mano

Caso di studio

Risultati

Analisi di sensitività: la frontiera efficienza-equità

Esercizi

Obiettivi (1/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- formulare tre obiettivi di localizzazione e capire quando coincidono;
- scrivere le distanze euclidee con vincoli conici e risolverle con Gurobi da buoni punti di partenza;

Obiettivi (2/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- gestire vincoli geografici convessi;
- costruire una frontiera efficienza-equità con il metodo ε-vincolo.

Prerequisiti

- Dal modulo *Ottimizzazione convessa*, Capitolo 1 «Insiemi convessi»: gli insiemi convessi, con cui si costruiscono i vincoli geografici
- Da questo modulo, Capitolo 2 «Richiami: convessità, programmazione quadratica e condizioni KKT»: i programmi quadratici convessi, le condizioni KKT e i moltiplicatori come prezzi ombra
- Da questo modulo, Capitolo 3 «Il solver per i modelli non lineari»: i vincoli funzionali e le tolleranze in `gurobipy`

Motivazione gestionale

Introduzione: Motivazione gestionale

- In questo capitolo decidiamo **dove collocare** una nuova struttura sul piano
- Il modello è un **NLP convesso**: le coordinate sono variabili continue
- Vedremo perché la scelta dell'obiettivo è la vera decisione manageriale

Dove collocare un servizio?

- Una stazione di ricarica rapida, un micro-hub logistico, un presidio sanitario: vogliamo essere "vicini" alla domanda
- Ma cosa significa vicini?
  - distanza *media*: **efficienza**
  - distanza *massima*: **equità** verso l'utente più sfortunato
  - distanza *quadratica*: porta al baricentro
- Tre obiettivi, tre punti diversi sulla mappa: la geometria rende il trade-off visibile come in nessun altro modello

Efficienza contro equità

- Le decisioni di localizzazione sono tra le più costose da correggere: un hub nel posto sbagliato resta nel posto sbagliato per anni
- La versione continua (coordinate libere sul piano) è il laboratorio ideale per un conflitto che riappare in tutte le decisioni pubbliche e private:
  - *efficienza*: servire bene in media
  - *equità*: non abbandonare nessuno

Riepilogo: Motivazione gestionale

- Localizzare una struttura significa scegliere le sue coordinate (x, y)
- "Vicino" può voler dire distanza media, massima o quadratica
- Il tema centrale è il conflitto tra **efficienza** ed **equità**

Costruzione guidata del modello

Introduzione: Costruzione guidata del modello

- Descriviamo il problema a parole, poi i dati e le variabili
- Scriviamo due modelli: **Weber** (distanza media) e **minimax** (distanza massima)
- Aggiungiamo la variante quadratica e i vincoli geografici
- Infine vediamo cosa caratterizza l'ottimo di ciascun obiettivo

Il problema a parole

- *Decidiamo* le coordinate in cui collocare la nuova struttura
- *L'obiettivo* — ed è la vera scelta manageriale — può essere minimizzare:
  - la distanza media pesata dagli utenti
  - la distanza dell'utente più lontano
  - la distanza quadratica
- *I vincoli*, quando presenti, delimitano l'area ammissibile (una zona rettangolare, un raggio massimo da un'infrastruttura)

Dati (input del modello)

Simbolo	Tipo	Significato
n	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero di punti di domanda (quartieri), indicizzati da $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$
(a_i, b_i)	$\in \mathbb{Q}^2$	coordinate del quartiere i (km)
w_i	$\in \mathbb{Q}_{\geq 0}$	peso del quartiere i: popolazione, domanda o priorità
(a_0, b_0), r	$\in \mathbb{Q}^2$, $\in \mathbb{Q}_{>0}$	centro e raggio dell'eventuale vincolo geografico (distanza massima da un'infrastruttura)

Variabili decisionali

Introduciamo 2 variabili libere (possono assumere qualunque valore reale) e, per la versione minimax, una variabile ausiliaria non negativa:

$$\begin{cases} x = \text{coordinata est della nuova struttura (km)} \\ y = \text{coordinata nord della nuova struttura (km)} \\ z = \text{distanza dal quartiere più lontano (solo minimax)} \end{cases}$$

Modello di Weber

Modello di Weber (distanza media pesata)

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n} w_i \sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2} \qquad (9.1a)$$

$$\text{soggetto a} \quad x \gtreqless 0, \qquad (9.1b)$$

$$y \gtreqless 0. \qquad (9.1c)$$

- La funzione obiettivo, convessa, minimizza la distanza totale pesata dai quartieri (**efficienza**)
- I vincoli definiscono le variabili, libere

Modello minimax

Modello minimax (distanza massima)

$$\min \quad z \tag{9.2a}$$

$$\text{soggetto a} \quad \sqrt{(x-a_i)^2+(y-b_i)^2} \leq z, \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}, \tag{9.2b}$$

$$x \gtreqless 0, \tag{9.2c}$$

$$y \gtreqless 0, \tag{9.2d}$$

$$z \geq 0. \tag{9.2e}$$

- L'obiettivo minimizza la distanza del quartiere più lontano (**equità**)
- I vincoli convessi di distanza impongono che ogni quartiere disti al più z dalla struttura (n vincoli)
- Gli ultimi vincoli definiscono le variabili

Variante quadratica e vincoli geografici

Terza variante, quadratica: minimizzare

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \left[(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 \right],$$

che ha soluzione in forma chiusa (il baricentro pesato).

Vincoli geografici convessi tipici, da aggiungere a qualunque variante:

- zona rettangolare: $x^L \leq x \leq x^U, \;\; y^L \leq y \leq y^U$
- distanza massima da un'infrastruttura: $(x - a_0)^2 + (y - b_0)^2 \leq r^2$

Caratterizzazione degli ottimi (1/2)

Quadratico $\Rightarrow$ baricentro. Annullando il gradiente:

$$x^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \, a_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \qquad \text{(e analogo per } y\text{)}$$

- È l'unico caso con formula chiusa
- Utile come punto di partenza per gli altri modelli

Caratterizzazione degli ottimi (2/2)

Weber. Non ha forma chiusa; la funzione non è differenziabile nei punti (a_i, b_i).

- All'ottimo i "tiri" unitari pesati dei quartieri si annullano: $\sum_{i=1}^{n} w_i \, \boldsymbol{u}_i = 0$
- $\boldsymbol{u}_i$ è il versore dalla struttura verso il quartiere i

Minimax. L'ottimo è il centro del *cerchio minimo* che racchiude tutti i punti:

- dipende solo dai quartieri estremi e ignora i pesi
- per questo protegge le periferie

Riepilogo: Costruzione guidata del modello

- **Weber**: minimizza la somma pesata delle distanze euclidee (efficienza)
- **Minimax**: minimizza la distanza massima con una variabile z (equità)
- **Quadratico**: soluzione in forma chiusa, il baricentro pesato
- I vincoli geografici (rettangolo, cerchio) sono convessi e si aggiungono a qualunque variante

Esempio svolto a mano

Introduzione: Esempio svolto a mano

- Un esempio in una dimensione, risolvibile a mano
- Calcoliamo l'ottimo dei tre obiettivi sugli stessi dati
- Vedremo che i tre obiettivi danno tre risposte diverse

Esempio: Tre clienti su una strada (1/2)

Clienti nei km 0, 4 e 10 con pesi 1, 1 e 3.

Weber 1D = mediana pesata. Il costo è

$$f(x) = |x| + |x - 4| + 3|x - 10|.$$

- Spostandosi di δ a sinistra da $x = 10$, il costo dei primi due clienti scende di 2δ ma quello del terzo sale di 3δ: peggiora
- Da destra, simmetricamente, peggiora ancora
- Ottimo: $x^* = 10$, il punto che lascia *almeno metà del peso totale* ($5/2 = 2{,}5$) da entrambi i lati: la mediana pesata

Esempio: Tre clienti su una strada (2/2)

Baricentro.

$$x = \frac{1 \cdot 0 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 10}{5} = 6{,}8$$

sensibile a *quanto* sono lontani i punti, non solo da che parte stanno.

Minimax. Punto medio degli estremi: $(0 + 10)/2 = 5$, pesi ignorati.

Tre obiettivi ragionevoli, tre risposte diverse: 10, 6,8, 5. La scelta dell'obiettivo è la decisione manageriale.

Riepilogo: Esempio svolto a mano

- In 1D Weber coincide con la **mediana pesata**
- Il baricentro è la **media pesata**: dipende da quanto sono lontani i punti
- Il minimax è il **punto medio degli estremi**: ignora i pesi

Caso di studio

Introduzione: Caso di studio

- Applichiamo i modelli a una città con dodici quartieri
- Vediamo il trucco di modellazione che rende le distanze euclidee trattabili da Gurobi: i vincoli conici

I dati del caso

- Dodici quartieri con pesi tra 5 e 25 mila abitanti (file `localizzazione_quartieri.csv`)
- Vincolo tecnico: la stazione deve stare entro $r = 2$ km dalla cabina elettrica in $(7, 6)$

Il trucco di modellazione: vincoli conici

- Una variabile $d_k \geq$ distanza euclidea dal quartiere k, imposta con il vincolo conico (convesso)

$$d_x^2 + d_y^2 \leq d_k^2$$

- Weber minimizza $\sum_k w_k d_k$
- Il minimax minimizza una z con $d_k \leq z$

Il modello in Gurobi

```
d = m.addVars(n) # d_k >= dist. dal quartiere k
for k in range(n):
    m.addConstr(dx[k] == px - coord[k, 0])
    m.addConstr(dy[k] == py - coord[k, 1])
    m.addQConstr(dx[k]**2 + dy[k]**2 <= d[k]*d[k]) # cono
# Weber: min sum w_k d_k
# minimax: min z con d_k <= z
# vincolo geografico: (px-7)^2 + (py-6)^2 <= R^2
```

Riepilogo: Caso di studio

- La distanza euclidea si modella con una variabile d_k e un **vincolo conico** convesso
- Weber e minimax cambiano solo nella funzione obiettivo
- Il vincolo della cabina è un cerchio: un vincolo quadratico convesso

Risultati

Introduzione: Risultati

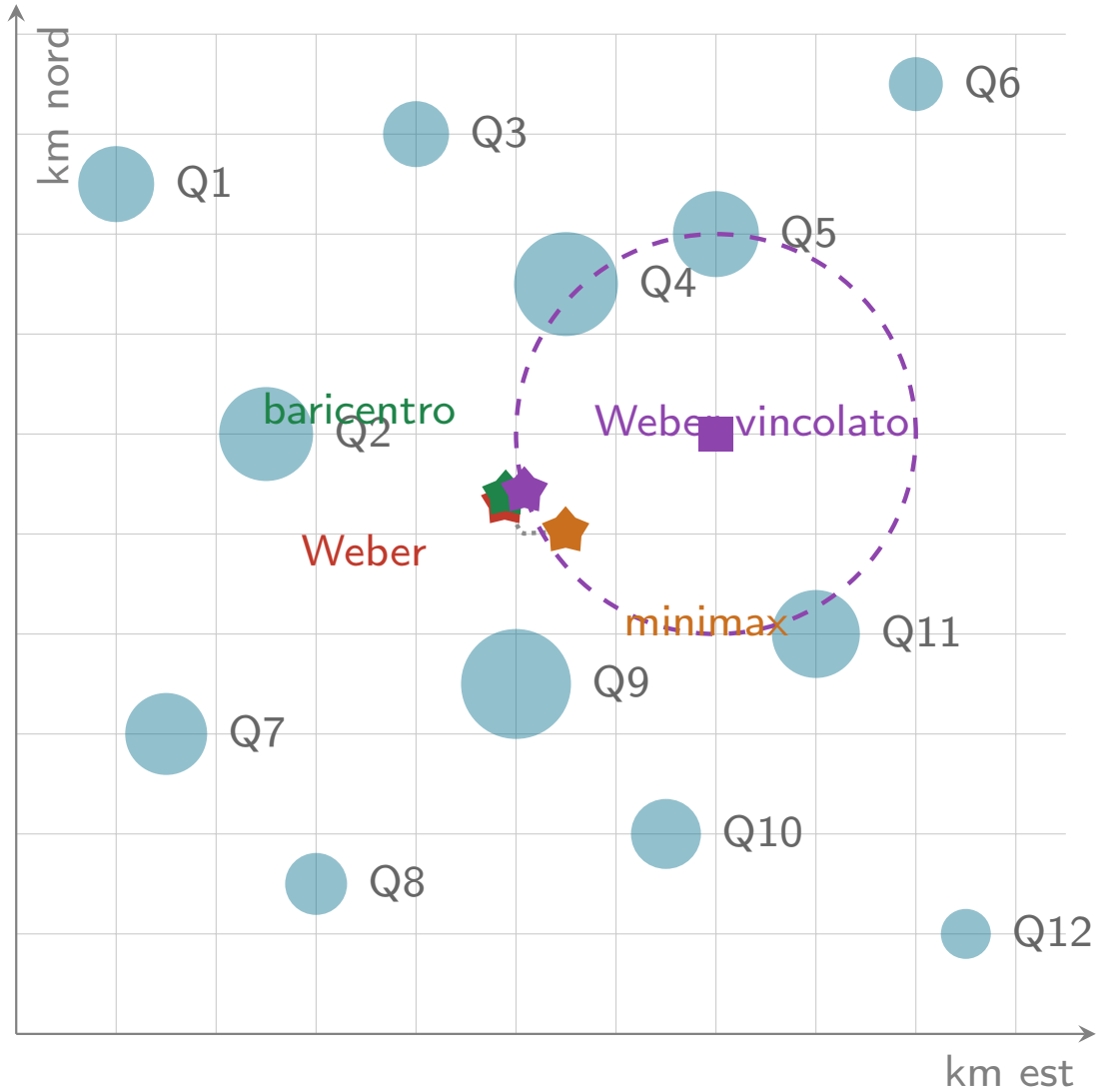
- Confrontiamo le quattro localizzazioni ottime: baricentro, Weber, minimax, Weber vincolato
- Le vediamo sulla mappa della città
- Ne traiamo una lezione manageriale sul costo dei vincoli

Le quattro soluzioni

Soluzione	(x, y)	dist. media	dist. max
Baricentro pesato	(4,897; 5,397)	–	–
Weber	(4,886; 5,310)	3,344 km	6,314 km
Minimax	(5,496; 5,029)	3,391 km	5,680 km
Weber vincolato	(5,083; 5,429)	costo +0,2%	

- Weber vincolato: il vincolo è attivo, l'ottimo sta sul bordo del cerchio

Mappa della città



Come leggere la mappa

- I cerchi teal sono i 12 quartieri (area proporzionale alla popolazione)
- Le stelle indicano le quattro localizzazioni ottime: Weber in rosso, minimax in arancione, baricentro in verde, Weber vincolato in viola
- Il cerchio viola tratteggiato è il vincolo dei 2 km dalla cabina elettrica
- La linea punteggiata è la traiettoria delle soluzioni di compromesso tra minimax e Weber

Insight manageriale

- Weber e baricentro quasi coincidono qui (i pesi sono distribuiti in modo bilanciato)
- Il minimax si sposta di oltre mezzo km verso sud-est per proteggere i quartieri periferici
- Il vincolo della cabina costa pochissimo ($+0{,}2\%$ di distanza totale)
- Scoprire che un vincolo temuto è quasi gratis è un risultato manageriale importante quanto l'ottimo stesso

Riepilogo: Risultati

- Weber $\approx$ baricentro quando i pesi sono bilanciati
- Il minimax si sposta verso le periferie
- Il vincolo geografico è attivo ma costa solo lo 0,2%

Analisi di sensitività: la frontiera efficienza-equità

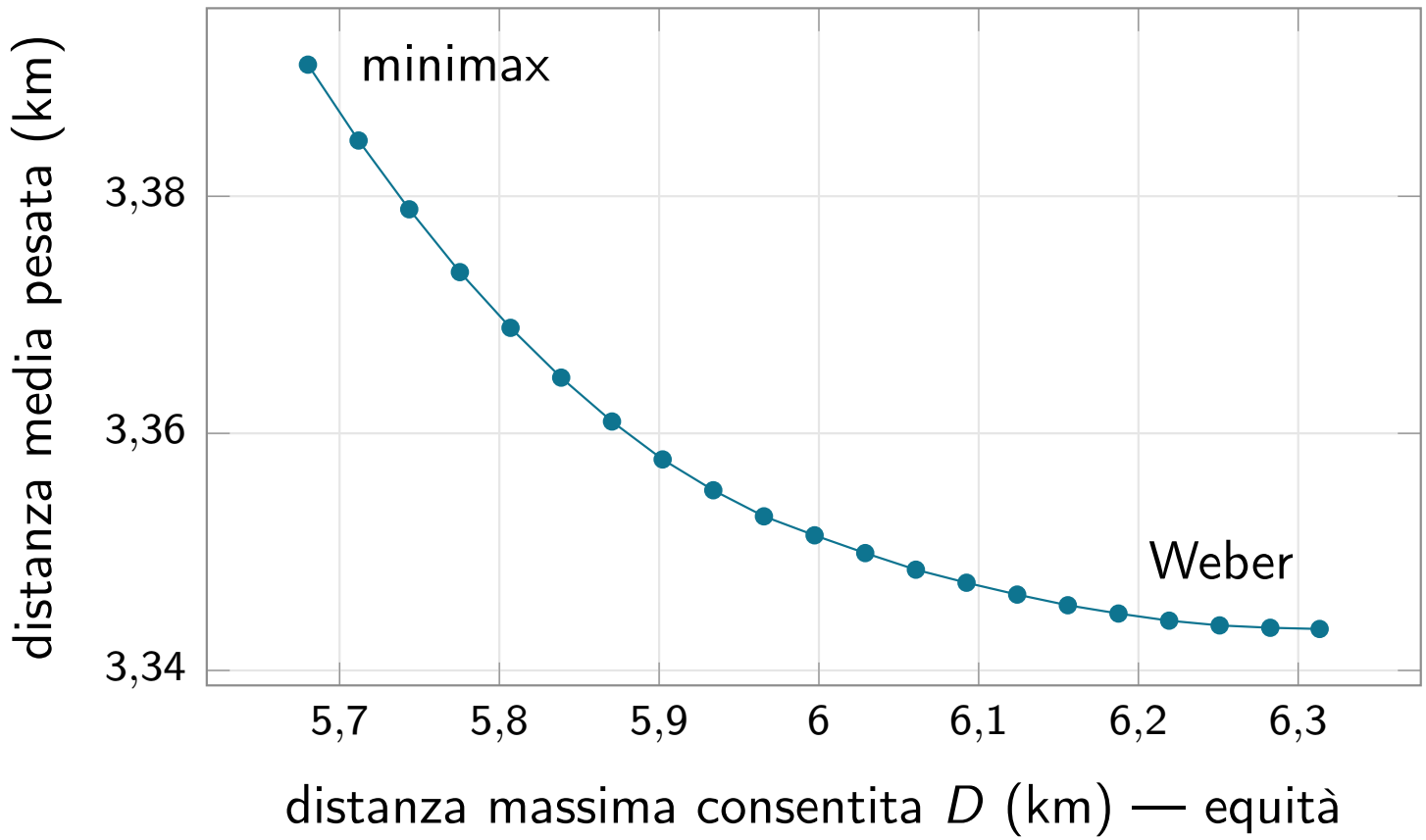
Introduzione: la frontiera efficienza-equità

- Weber e minimax sono due estremi: esistono soluzioni intermedie?
- Le costruiamo con il metodo ε-constraint
- La forma della frontiera dice quanto costa l'equità

Il metodo ε-constraint

- Minimizziamo la distanza media imponendo un tetto D alla distanza massima
- Variamo D tra i due estremi:
  - $D = 5{,}680$ km: soluzione minimax
  - $D = 6{,}314$ km: soluzione Weber
- Per ogni D otteniamo la distanza media pesata minima ottenibile

Frontiera efficienza-equità



Alcuni punti della frontiera

Tetto D	Distanza media	
5,680 km	3,391 km	soluzione minimax
5,997 km	3,351 km	
6,314 km	3,344 km	soluzione Weber

- Gli estremi della curva sono il minimax (a sinistra) e il punto di Weber (a destra)
- La curva quasi piatta indica che l'equità costa pochissimo in efficienza

Una frontiera quasi piatta

- Garantire al quartiere più lontano 0,63 km in meno costa solo 47 metri di distanza media
- Quando la frontiera è così piatta, la soluzione equa è "quasi gratis": un argomento fortissimo in una discussione pubblica
- Il caso opposto (frontiera ripida) segnalerebbe un vero conflitto efficienza-equità

Riepilogo: la frontiera efficienza-equità

- Il metodo ε-constraint ottimizza un obiettivo e mette un tetto all'altro
- La frontiera collega minimax e Weber
- Frontiera piatta: l'equità è quasi gratis; frontiera ripida: vero conflitto

Esercizi

Introduzione: Esercizi

- Cinque esercizi per mettere alla prova i modelli del capitolo
- Verifiche a mano, sensitività ai pesi, estensioni del modello (due strutture, distanza Manhattan, moltiplicatori)

Esercizio: verifica

- Calcolare a mano il baricentro pesato dei 12 quartieri dai dati CSV
- Confrontarlo con l'output dello script

Esercizio: peso che cambia tutto

- Portare il peso di Q12 (il quartiere in basso a destra) da 5 a 40
- Di quanto si spostano Weber e minimax?
- Quale dei due è più sensibile ai pesi, e perché?

Esercizio: due strutture

- Con *due* stazioni e l'assegnazione di ogni quartiere alla più vicina, il problema resta convesso?
- Provare un approccio alternato (assegna–ottimizza)
- Discutere perché trova solo ottimi locali

Esercizio: distanza Manhattan

- Sostituire la distanza euclidea con $|x - a_i| + |y - b_i|$
- Mostrare che il problema di Weber diventa un LP (introdurre variabili ausiliarie per i valori assoluti)
- Risolverlo con Gurobi e confrontare l'ottimo

Esercizio: moltiplicatore del raggio

- Stimare per perturbazione il moltiplicatore del vincolo $r = 2$ km (risolvere con $r = 2{,}1$)
- Quanto vale, in km di distanza totale, ogni 100 m di raggio in più?

Riepilogo: Esercizi

- Gli esercizi verificano il baricentro, la sensitività ai pesi e il valore del vincolo geografico
- Le estensioni mostrano quando il problema perde la convessità (due strutture) o diventa un LP (Manhattan)

Riepilogo (1/2)

Modelli:

- Weber (distanza media pesata), minimax (distanza massima), quadratico (baricentro)
- Le distanze euclidee si scrivono con vincoli conici convessi

Ottimi:

- Baricentro: formula chiusa; Weber: i tiri pesati si annullano; minimax: centro del cerchio minimo

Riepilogo (2/2)

Lezioni manageriali:

- La scelta dell'obiettivo è la decisione manageriale
- Un vincolo temuto può essere quasi gratis (+0,2%)
- La frontiera efficienza-equità misura quanto costa l'equità: qui quasi nulla