Allocazione del budget pubblicitario

Indice

Motivazione gestionale

Costruzione guidata del modello

Esempio svolto a mano

Caso di studio e implementazione

Risultati e verifica delle KKT

Analisi di sensitività

Esercizi

Obiettivi (1/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- modellare i rendimenti decrescenti con funzioni concave;
- risolvere NLP convessi con i vincoli funzionali di Gurobi;

Obiettivi (2/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- verificare numericamente le condizioni KKT;
- costruire la curva del valore del budget e usare λ per negoziare il budget.

Prerequisiti

- Dal modulo *Ottimizzazione convessa*, Capitolo 3 «Funzioni convesse e concave»: le funzioni concave e i rendimenti decrescenti
- Da questo modulo, Capitolo 2 «Richiami: convessità, programmazione quadratica e condizioni KKT»: i programmi quadratici convessi, le condizioni KKT e i moltiplicatori come prezzi ombra
- Da questo modulo, Capitolo 3 «Il solver per i modelli non lineari»: i vincoli funzionali per le funzioni non lineari in `gurobipy`

Motivazione gestionale

Introduzione: Motivazione gestionale

- Come ripartire una campagna da 100.000 € tra social, search, TV e influencer?
- Ogni canale mostra **rendimenti marginali decrescenti**: i primi euro rendono molto, i successivi sempre meno
- La risposta è quindi una funzione **concava** della spesa
- L'ottimo segue una regola economica elegante, che qui dimostriamo e verifichiamo numericamente

Uno schema universale

- Allocare un budget tra impieghi con rendimenti decrescenti è uno schema che si ripete ovunque:
  - marketing su più canali
  - fondi tra progetti
  - tempo tra attività
  - fertilizzante tra campi
- La teoria dice qualcosa di forte e **verificabile**: all'ottimo i rendimenti marginali si eguagliano
- Ed è esattamente ciò che il solver restituirà, cifra per cifra

Riepilogo

- Il problema: ripartire un budget tra canali con rendimenti decrescenti
- Risposta **concava** della spesa $\Rightarrow$ problema convesso, ottimo globale certificabile
- Regola chiave: all'ottimo i **rendimenti marginali si eguagliano**

Costruzione guidata del modello

Introduzione: Costruzione guidata del modello

- Traduciamo il problema di allocazione in un modello matematico
- Fissiamo dati, variabili decisionali, funzione obiettivo e vincoli
- Ricaviamo poi dalle **condizioni KKT** la regola economica che governa l'ottimo

Il problema a parole

- **Decidiamo** quanto spendere in ciascun canale pubblicitario
- **L'obiettivo** è massimizzare la risposta totale attesa della campagna
- **I vincoli**:
  - la spesa complessiva non può superare il budget
  - ciascun canale ha un investimento massimo utile

Dati (input del modello)

Simbolo	Tipo	Significato
n	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero di canali, indicizzati da $i \in \{1, \ldots, n\}$
b	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	budget totale (migliaia di €)
$r_i(\cdot)$	funzione concava crescente	risposta attesa del canale i in funzione della spesa
u_i	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	massimo investimento utile nel canale i

Nel caso di studio $r_i(x) = a_i \log(1 + k_i\, x)$, con $a_i, k_i \in \mathbb{Q}_{>0}$ dati

Variabili decisionali

Introduciamo le seguenti n variabili non negative:

$$x_i = \text{spesa nel canale } i \text{ (migliaia di €)}, \qquad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Usando queste variabili costruiamo un modello NLP convesso per il problema

Il modello

Modello di allocazione con risposta concava

$$\max \quad \sum_{i=1}^{n} r_i(x_i) \tag{8.1a}$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \leq b, \tag{8.1b}$$

$$x_i \leq u_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{8.1c}$$

$$x_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{8.1d}$$

La funzione obiettivo

$$\max \sum_{i=1}^{n} r_i(x_i)$$

- Massimizza la **risposta totale** della campagna
- È **separabile** per canale: somma di funzioni di una sola variabile
- È somma di funzioni **concave**, quindi concava: il problema ha ottimo globale certificabile

I vincoli

- $\sum_i x_i \leq b$: la spesa complessiva non supera il budget; è l'**unico vincolo che lega i canali** tra loro — senza di esso ogni canale andrebbe al proprio tetto (un vincolo lineare)
- $x_i \leq u_i$: i tetti per canale, oltre i quali il canale non assorbe altra spesa utile (n vincoli lineari)
- $x_i \geq 0$: definiscono le variabili del modello

La condizione economica all'ottimo (1/2)

Per le KKT, all'ottimo esiste $\lambda \geq 0$ (**prezzo ombra del budget**) tale che, per ogni canale non bloccato ai limiti 0 o u_i:

$$r_i'(x_i^*) = \lambda$$

In parole: **l'ultimo euro investito rende lo stesso in tutti i canali attivi**

La condizione economica all'ottimo (2/2)

- Se così non fosse, spostare un euro dal canale con marginale basso a quello con marginale alto migliorerebbe la risposta: non saremmo all'ottimo
- I canali **al tetto** u_i possono avere marginale $> \lambda$: vorremmo investirci di più ma non si può
- I canali **a zero** hanno marginale iniziale $< \lambda$: non valgono nemmeno il primo euro

Riepilogo

- Variabili: spesa x_i per canale; obiettivo: $\max \sum_i r_i(x_i)$, concavo e separabile
- Vincoli: budget $\sum_i x_i \leq b$ (l'unico che lega i canali) e tetti $x_i \leq u_i$
- Condizione KKT: $r_i'(x_i^*) = \lambda$ per tutti i canali attivi
- λ è il **prezzo ombra** del budget

Esempio svolto a mano

Introduzione: Esempio svolto a mano

- Risolviamo a mano un caso con due soli canali logaritmici
- Usiamo la condizione di uguaglianza dei marginali e il vincolo di budget
- Calcoliamo infine il **prezzo ombra** λ e ne diamo la lettura gestionale

Esempio: due canali logaritmici (1/3)

Dati: $r_1(x) = 100\log(1+0{,}2x)$, $r_2(x) = 60\log(1+0{,}1x)$, budget $b = 50$ (migliaia di €), senza tetti

Passo 1 — condizione di uguaglianza dei marginali:

$$\frac{100 \cdot 0{,}2}{1+0{,}2x_1} = \frac{60 \cdot 0{,}1}{1+0{,}1x_2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{20}{1+0{,}2x_1} = \frac{6}{1+0{,}1x_2}$$

Esempio: due canali logaritmici (2/3)

Passo 2 — budget. Il budget è saturo, quindi $x_2 = 50 - x_1$. Sostituendo:

$$20\,(1 + 0{,}1(50 - x_1)) = 6\,(1 + 0{,}2x_1)$$

$$120 - 2x_1 = 6 + 1{,}2x_1$$

da cui

$$x_1 = \frac{114}{3{,}2} = 35{,}6, \qquad x_2 = 14{,}4$$

Esempio: due canali logaritmici (3/3)

Passo 3 — prezzo ombra.

$$\lambda = \frac{20}{1 + 0{,}2 \cdot 35{,}6} = 2{,}46$$

- Un euro di budget in più renderebbe $\approx 2{,}46$ unità di risposta
- E rende lo stesso da qualunque canale lo si faccia entrare: è il senso della condizione KKT

Riepilogo

- Due equazioni, due incognite: uguaglianza dei marginali + budget saturo
- Soluzione: $x_1 = 35{,}6$ e $x_2 = 14{,}4$ (migliaia di €)
- Prezzo ombra $\lambda = 2{,}46$: valore di un'unità di budget in più
- Il canale più "reattivo" ($a_1 k_1 = 20 > a_2 k_2 = 6$) riceve più spesa

Caso di studio e implementazione

Introduzione: Caso di studio e implementazione

- Passiamo al caso realistico: quattro canali e un budget di 100 (migliaia di €)
- Vediamo come trattare il logaritmo con i **vincoli funzionali** di Gurobi
- Il problema resta convesso: l'ottimo trovato è **globale e certificato**

Dati del caso di studio

Quattro canali con $r_i(x) = a_i \log(1 + k_i x)$ e budget $b = 100$:

canale	a_i	k_i	tetto u_i
social	260	0,14	60
search	380	0,09	80
TV	520	0,025	120
influencer	190	0,20	35

a_i misura la scala del canale, k_i la **velocità con cui satura**

Come si tratta il logaritmo

- Per ogni canale introduciamo due variabili ausiliarie:

$$g_i = 1 + k_i x_i, \qquad z_i = \log(g_i)$$

- Il legame $z_i = \log(g_i)$ è un **vincolo funzionale** di Gurobi (`addGenConstrLog`)
- L'obiettivo diventa **lineare** nelle z_i: $\max \sum_i a_i z_i$
- Con `FuncNonlinear = 1` il logaritmo è trattato in modo esatto, non per approssimazione lineare a tratti

Implementazione in Gurobi

```
m.Params.FuncNonlinear = 1    # log trattato in modo esatto
x = m.addVars(4, ub=u)
g = m.addVars(4, lb=1.0)      # g_i = 1 + k_i x_i
z = m.addVars(4, lb=-GRB.INFINITY)
for i in range(4):
    m.addConstr(g[i] == 1 + k[i] * x[i])
    m.addGenConstrLog(g[i], z[i])
m.addConstr(x.sum() <= B)
m.setObjective(gp.quicksum(a[i] * z[i] for i in range(4)),
               GRB.MAXIMIZE)
```

Riepilogo

- Caso di studio: 4 canali, risposte logaritmiche, budget $b = 100$
- Riformulazione: $g_i = 1 + k_i x_i$, $z_i = \log(g_i)$, obiettivo lineare nelle z_i
- Gurobi gestisce il logaritmo con `addGenConstrLog` e `FuncNonlinear = 1`
- Problema convesso $\Rightarrow$ ottimo **globale certificato**

Risultati e verifica delle KKT

Introduzione: Risultati e verifica delle KKT

- Leggiamo la soluzione ottima canale per canale
- Verifichiamo **sui numeri** che i rendimenti marginali coincidono
- Controlliamo che λ sia davvero il valore di un'unità di budget in più

Risultati del caso di studio

```
Risposta totale: 1.449,8 (migliaia di contatti utili)
     canale |  spesa | tetto | risposta | marginale
     social |   24,3 |    60 |    385,3 |   8,2693
     search |   34,8 |    80 |    539,5 |   8,2693
         TV |   22,9 |   120 |    235,2 |   8,2693
 influencer |   18,0 |    35 |    289,8 |   8,2693

Verifica: +1000 EUR di budget -> risposta +8,244
```

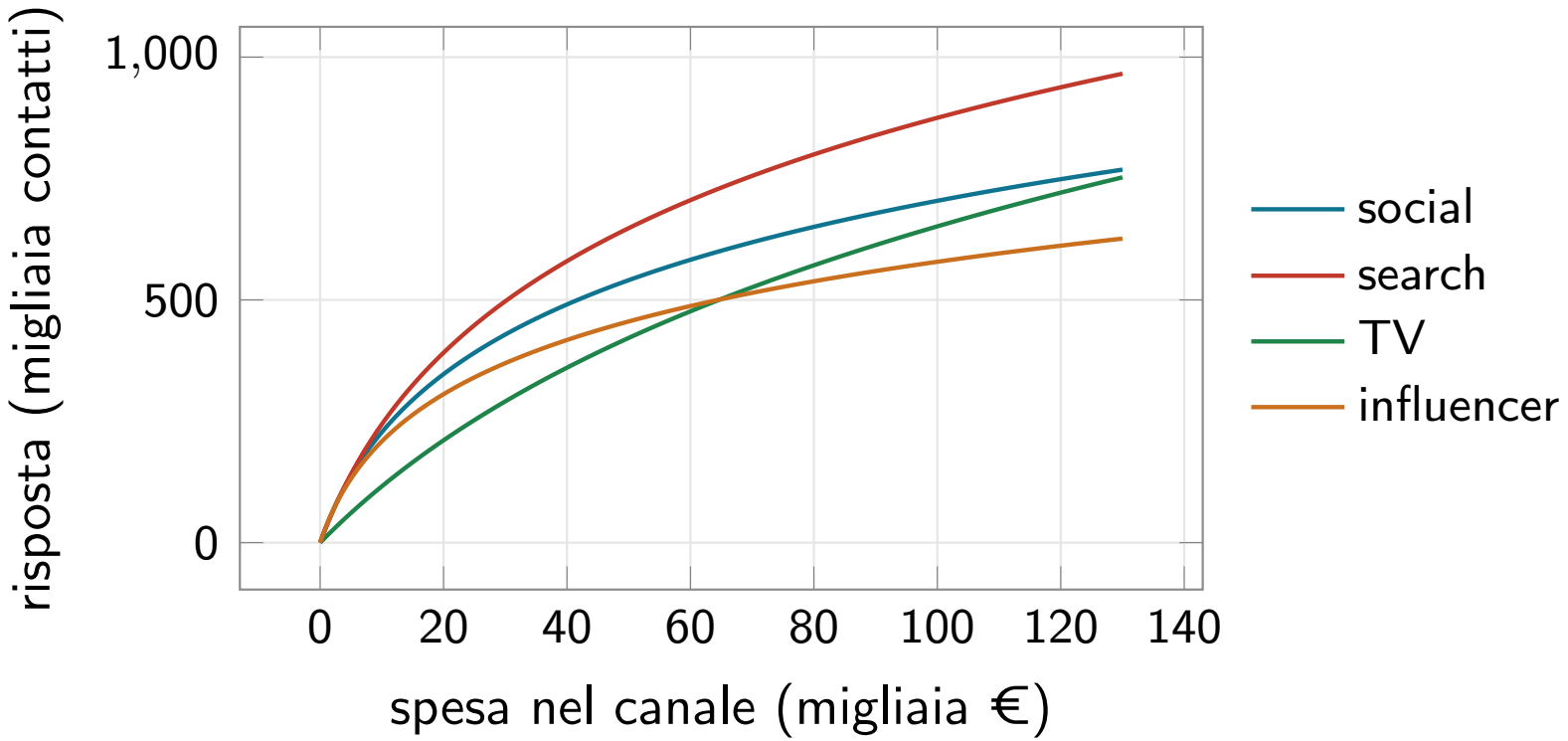
La teoria si vede nei numeri

- I quattro marginali coincidono alla quarta cifra: $\lambda = 8{,}2693$
- L'aumento *reale* di risposta con mille euro in più (8,244) conferma la lettura del moltiplicatore
- Nessun canale è al tetto: con $b = 100$ il budget è la sola risorsa scarsa

Nota manageriale

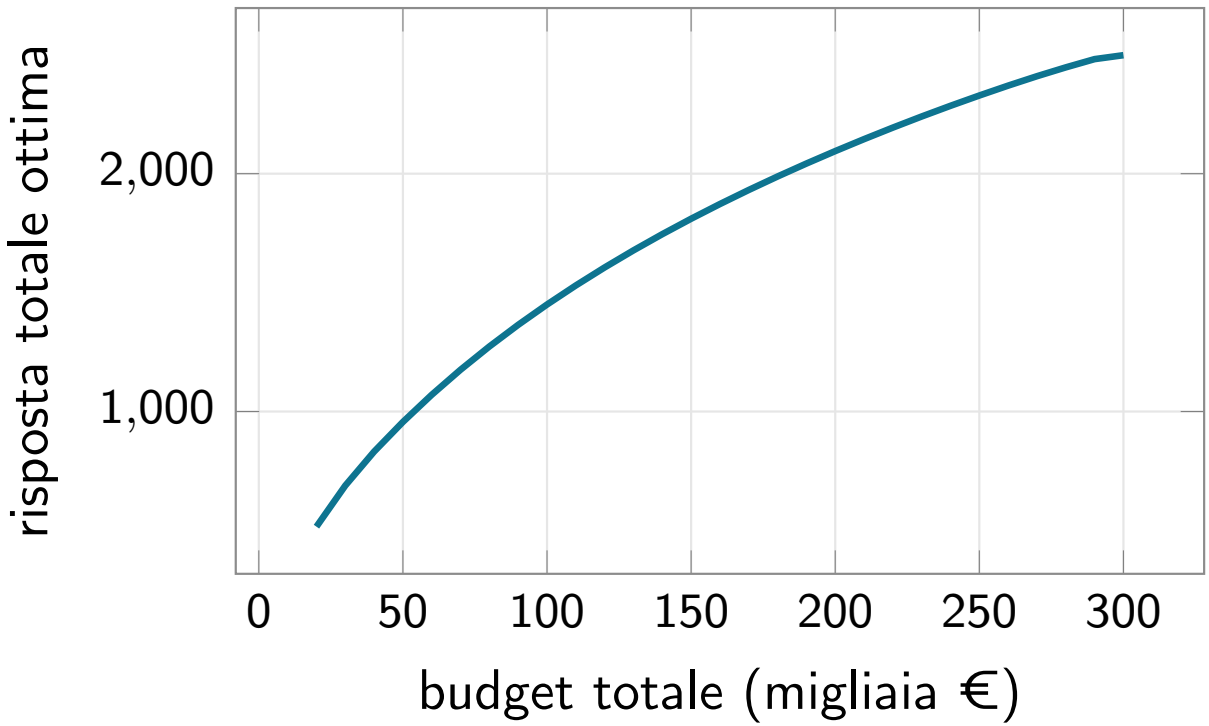
- La TV riceve *meno* dei social (22,9 contro 24,3) nonostante il tetto molto più alto
- Non conta la **dimensione** del canale ma la **velocità con cui satura** (k_i)
- La TV ha $k = 0{,}025$: la sua curva cresce lentamente, quindi il suo marginale scende lentamente ma parte più basso rispetto alla spesa investita

Curve di risposta concave



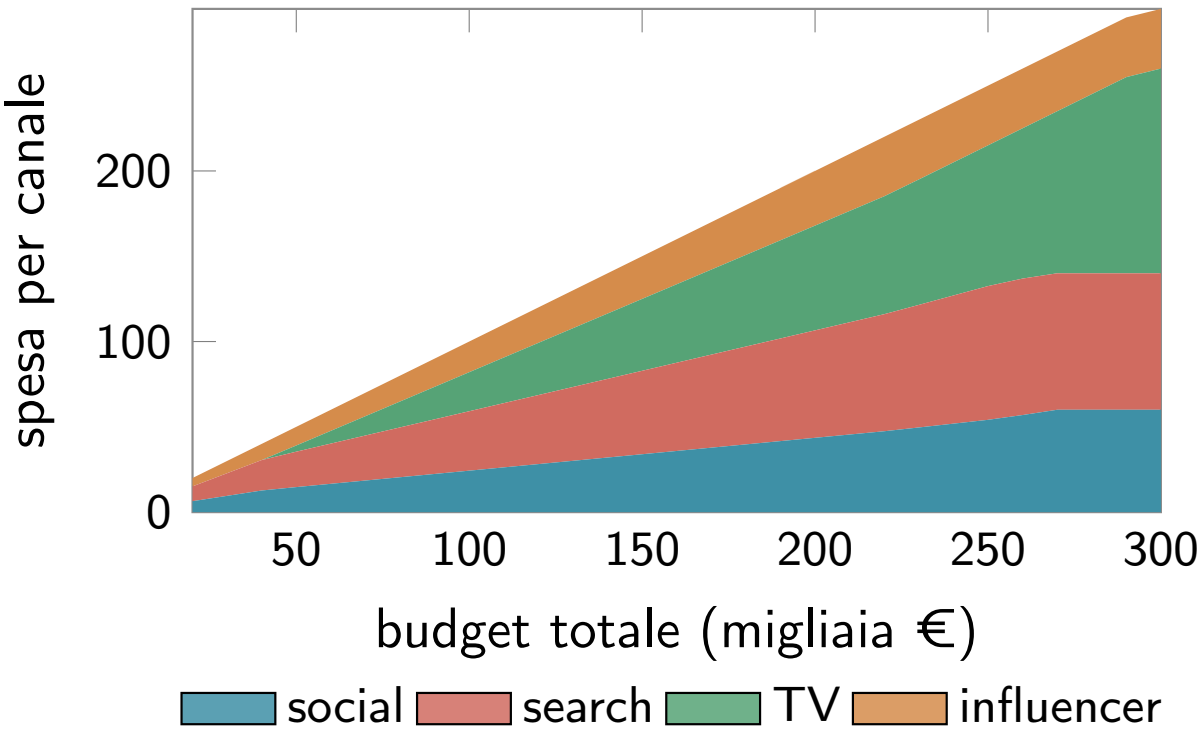
Tutte concave, ma con velocità di saturazione molto diverse

Curva valore del budget



La curva valore è concava: ogni tranche di budget rende meno della precedente, e la sua pendenza è esattamente λ

Mix ottimo al crescere del budget



I canali crescono insieme mantenendo uguali i ritorni marginali; l'influencer satura per primo al suo tetto (35)

Riepilogo

- Risposta ottima 1.449,8 con $b = 100$; nessun canale al tetto
- I quattro marginali coincidono: $\lambda = 8{,}2693$, come prevede la teoria
- La verifica per perturbazione ($+1000$ €) dà $+8{,}244$: coerente con λ
- Ciò che determina il mix non è la taglia del canale ma k_i

Analisi di sensitività

Introduzione: Analisi di sensitività

- Facciamo variare il budget e osserviamo come cambiano risposta ottima e λ
- Vedremo che λ **decresce** al crescere del budget, fino ad annullarsi
- È la curva che serve per **negoziare** il budget con la direzione finanziaria

Risposta e λ al variare del budget

```
b =  20: risposta   515,9   lambda = 18,971
b =  60: risposta 1.070,4   lambda = 10,909
b = 100: risposta 1.449,8   lambda =  8,244
b = 180: risposta 1.988,2   lambda =  5,538
b = 260: risposta 2.370,2   lambda =  4,049
b = 300: risposta 2.498,1   lambda =  0,000
```

A $b = 300$ tutti i canali sono ai tetti

Lettura della tabella

- La curva valore-budget è **concava**: λ scende da 19 a 4 man mano che il budget cresce
- A $b = 300$ tutti i canali sono ai tetti ($60 + 80 + 120 + 35 = 295$)
- Il budget smette di essere la risorsa scarsa e λ **crolla a zero**: gli ultimi euro non trovano più impiego utile

Come si usa λ in azienda

- Per un CFO la *curva* di λ è l'argomento quantitativo per decidere quanto budget concedere al marketing
- Regola: si finanzia la campagna finché λ supera il valore di un euro investito altrove
- Non serve una trattativa a sensazione: il modello produce il **prezzo** di ogni euro aggiuntivo

Riepilogo

- La risposta ottima cresce con il budget, ma in modo **concavo**
- λ decresce: da 18,97 con $b = 20$ a 8,24 con $b = 100$
- Quando tutti i canali sono ai tetti, $\lambda = 0$
- La curva di λ è lo strumento di negoziazione del budget

Esercizi

Introduzione: Esercizi

- Mettiamo alla prova quanto visto con quattro esercizi
- Riprendono l'esempio a mano, le forme funzionali alternative e il ruolo di λ
- Per ciascuno: prima il testo, poi la soluzione

Esercizio: verifica

- Risolvere l'esempio a mano con $b = 80$
- Dove finisce il budget aggiuntivo?
- Come cambia λ?

Soluzione (1/2)

Dalla condizione $r_i'(x_i) = \lambda$ si ricava

$$x_1 = \frac{100}{\lambda} - 5, \qquad x_2 = \frac{60}{\lambda} - 10$$

e imponendo $x_1 + x_2 = b$:

$$\lambda = \frac{160}{b + 15}$$

Con $b = 80$: $\lambda = 160/95 = 1{,}68$ (contro 2,46 con $b = 50$)

Soluzione (2/2)

- Le spese ottime diventano

$$x_1 = 54{,}4, \qquad x_2 = 25{,}6$$

- Le 30 unità aggiuntive si ripartiscono in proporzione 100 : 60, cioè 18,75 al canale 1 e 11,25 al canale 2
- Nessun canale viene abbandonato: entrambi crescono mantenendo uguali i marginali, e λ scende

Esercizio: risposta esponenziale

- Sostituire la risposta della TV con

$$r(x) = 520\left(1 - e^{-0{,}025x}\right)$$

- Ripetere l'ottimizzazione: cambia il mix?
- La funzione ha un tetto naturale: il bound u_i serve ancora?

Soluzione (1/2)

- Marginale esponenziale: $r'(x) = 13\, e^{-0{,}025x}$, contro $13/(1 + 0{,}025x)$ del logaritmo
- Stesso valore iniziale (13), ma l'esponenziale **decade molto più in fretta**
- Da $r'(x) = \lambda$ segue $x_{\mathrm{TV}} = 40 \log(13/\lambda)$

Soluzione (2/2)

- Imponendo il budget $b = 100$ si ottiene $\lambda \approx 8{,}00$ e il mix

$$(25{,}4,\ 36{,}4,\ 19{,}4,\ 18{,}8)$$

- La TV scende da 22,9 a 19,4: la spesa si sposta sugli altri canali, risposta totale $\approx 1.442{,}7$
- Il bound non è più necessario per la TV: la funzione satura da sola a 520. Resta utile solo se u_i rappresenta un limite *contrattuale* o di inventario

Esercizio: canale escluso

- Aggiungere un quinto canale con marginale iniziale $a_5 k_5 = 5 < \lambda$
- Verificare che l'ottimo lo lascia a zero
- Interpretare il suo "costo ridotto" $a_5 k_5 - \lambda$

Soluzione

- Il marginale di un canale logaritmico è massimo in $x = 0$ e vale $a_5 k_5 = 5$
- Già il primo euro rende $5 < \lambda = 8{,}27$: conviene lasciarlo agli altri canali, quindi $x_5^* = 0$
- Il costo ridotto $a_5 k_5 - \lambda = 5 - 8{,}27 = -3{,}27$ misura quanto si **perde** per ogni unità forzata su quel canale
- Il canale entrerebbe solo se il budget crescesse tanto da far scendere λ sotto 5

Esercizio: copertura equa

- Il budget serve tre segmenti di clientela, con coperture diverse per canale
- Massimizzare la copertura del **segmento peggiore**:

$$\max z \quad \text{con} \quad z \leq \text{copertura}_g \quad \forall g$$

- Quanto costa l'equità in termini di risposta totale?

Soluzione (1/2)

- Il modello max-min si scrive con una variabile z e un vincolo per segmento:

$$\begin{aligned} \max \quad & z \\ \text{soggetto a} \quad & z \leq \sum_i c_{gi}\, r_i(x_i), \qquad \forall g, \\ & \textstyle\sum_i x_i \leq b, \quad 0 \leq x_i \leq u_i \end{aligned}$$

- Resta un problema **convesso**: il minimo di funzioni concave è concavo

Soluzione (2/2)

- L'ottimo sposta spesa verso i canali che raggiungono il segmento più debole, anche se meno efficienti in aggregato
- Il **prezzo dell'equità** si misura confrontando le due soluzioni:

$$\text{risposta totale}^{\max \sum} - \text{risposta totale}^{\max \min}$$

- È il modo corretto di presentare il trade-off alla direzione: non "equo o efficiente", ma *quanto* costa l'equità

Riepilogo finale (1/2)

- Rendimenti decrescenti $\Rightarrow$ risposta **concava** $\Rightarrow$ NLP convesso con ottimo globale
- Il modello: $\max \sum_i r_i(x_i)$ con budget $\sum_i x_i \le b$ e tetti $x_i \le u_i$
- Regola d'oro (KKT): all'ottimo $r_i'(x_i^*) = \lambda$ per tutti i canali attivi

Riepilogo finale (2/2)

- Gurobi risolve con i vincoli funzionali (`addGenConstrLog`, `FuncNonlinear = 1`)
- Nei numeri: quattro marginali uguali a 8,2693 e verifica per perturbazione $+8{,}244$
- λ decresce col budget e si annulla quando tutti i canali sono ai tetti
- A contare non è la taglia del canale ma la sua velocità di saturazione k_i