Pricing e revenue management

Indice

Motivazione gestionale

Costruzione guidata del modello

Esempio svolto a mano

Caso di studio e implementazione

Versione multiprodotto

Esercizi

Obiettivi (1/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- modellare la domanda in funzione del prezzo e capire quando il profitto è concavo;
- gestire un obiettivo bilineare non convesso;

Obiettivi (2/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- valutare correttamente la capacità: un posto in più non vale il margine pieno;
- riconoscere gli ottimi d'angolo, dove nessuna derivata si annulla.

Prerequisiti

- Da questo modulo, Capitolo 2 «Richiami: convessità, programmazione quadratica e condizioni KKT»: i programmi quadratici convessi, le condizioni KKT e i moltiplicatori come prezzi ombra
- Da questo modulo, Capitolo 3 «Il solver per i modelli non lineari»: i vincoli bilineari e `NonConvex = 2`; i prezzi ombra stimati per perturbazione

Motivazione gestionale

Introduzione: Motivazione gestionale

- Quale prezzo massimizza il profitto di un concerto, di un hotel, di un abbonamento, quando la domanda **diminuisce al crescere del prezzo**?
- Qui il prezzo non è un dato ma una **variabile**: la domanda diventa endogena
- Il profitto $p \cdot q$ introduce un **termine bilineare**
- È il capitolo in cui il laboratorio incontra per la prima volta la **non convessità** — e impara a maneggiarla

Perché il prezzo conta

- Fissare il prezzo è forse la decisione aziendale a più alto impatto sul margine
- Un punto percentuale di prezzo vale spesso più di molti punti di volume
- Il **revenue management** — nato nelle compagnie aeree e oggi standard in hotel, eventi, noleggi — aggiunge il **vincolo di capacità**
- I posti invenduti stasera non si recuperano domani

Riepilogo

- Nel pricing il prezzo p è una **variabile decisionale** e la domanda dipende da p
- Il profitto $p\,q$ è **bilineare**: primo incontro con la non convessità
- Il revenue management aggiunge la **capacità** limitata e deperibile

Costruzione guidata del modello

Introduzione: Costruzione guidata del modello

- Traduciamo il problema di pricing in un modello matematico
- Fissiamo dati, variabili decisionali, funzione obiettivo e vincoli
- Vediamo poi **dove nasce la non convessità** e come Gurobi la gestisce

Il problema a parole

- **Decidiamo** il prezzo di vendita e la quantità da vendere
- **L'obiettivo** è massimizzare il profitto, cioè ricavi meno costi variabili
- **I vincoli**: non si può vendere
  - più di quanto il mercato chiede a quel prezzo
  - né più della capacità disponibile

Dati (input del modello)

Simbolo	Tipo	Significato
$d(\cdot)$	funzione $\mathbb{Q}_{\geq 0} \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$	domanda attesa al prezzo p, decrescente in p
c	$\in \mathbb{Q}_{\geq 0}$	costo marginale unitario (€)
k	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	capacità disponibile (posti, camere, unità)

Variabili decisionali

Introduciamo le seguenti 2 variabili non negative:

$$\begin{cases} p = \text{prezzo di vendita deciso dall'impresa (€)} \\ q = \text{quantità venduta (unità)} \end{cases}$$

Usando queste variabili costruiamo un modello di pricing per il problema

Il modello

Modello di pricing con vincolo di capacità

$$\begin{aligned}
\max \quad & p\,q - c\,q && (7.1a)\\
\text{soggetto a} \quad & q \le d(p), && (7.1b)\\
& q \le k, && (7.1c)\\
& p \ge 0, && (7.1d)\\
& q \ge 0. && (7.1e)
\end{aligned}$$

La funzione obiettivo

$$\max \quad p\,q - c\,q = (p - c)\,q$$

- Massimizza il **profitto**: ricavo meno costo variabile
- Contiene il prodotto tra le due variabili p e q: un termine **bilineare**, non convesso
- È qui che nasce tutta la difficoltà del capitolo

I vincoli

- $q \leq d(p)$: non vendere più di quanto il mercato chiede al prezzo p (un vincolo, lineare se d è lineare)
- $q \leq k$: non vendere più della capacità disponibile; quando è attivo, è lui a determinare il prezzo ottimo (un vincolo lineare)
- $p \geq 0$, $q \geq 0$: definiscono le variabili del modello

Funzioni di domanda del caso di studio

Tutti i dati sono razionali positivi:

- **Lineare**: $d(p) = a - b\,p$
- **A elasticità costante**: $d(p) = \theta\, p^{-\varepsilon}$ con $\varepsilon > 1$
- **Logistica**: $d(p) = \dfrac{m}{1 + e^{-\alpha+\beta p}}$

Perché $q \leq d(p)$ e non $q = d(p)$?

- All'ottimo la disuguaglianza $q \leq d(p)$ è attiva da sola
- Vendere meno del possibile a quel prezzo non conviene mai se $p > c$
- Scriverla come $\leq$ mantiene la regione ammissibile più semplice
- E mantiene il modello ammissibile anche quando $d(p) > k$

Dove sta la non convessità?

- Nel prodotto $p \cdot q$ dell'obiettivo
- Con domanda lineare, sostituendo $q = a - b\,p$, il profitto $(p - c)(a - b\,p)$ è una **parabola concava**: il problema *ridotto* è facile
- Gurobi risolve comunque la versione bilineare all'ottimo globale (`NonConvex=2`)
- Per domande non lineari generali (elasticità costante, logistica) bastano i vincoli funzionali di Gurobi (`addGenConstrPow`, `addGenConstrExp`): stesso solver, ottimo ancora globale

Riepilogo

- Variabili: prezzo p e quantità q; obiettivo: $\max (p - c)\, q$
- Vincoli: domanda $q \leq d(p)$ e capacità $q \leq k$
- La non convessità sta nel termine bilineare $p\, q$
- Gurobi trova l'ottimo globale (`NonConvex=2` o vincoli funzionali)

Esempio svolto a mano

Introduzione: Esempio svolto a mano

- Risolviamo a mano un caso con domanda lineare
- Prima senza capacità, poi con la capacità che "morde"
- Infine calcoliamo **quanto vale un posto in più**: un risultato spesso sorprendente

Esempio: domanda lineare, con e senza capacità (1/3)

Concerto: $d(p) = 1200 - 5p$ (quindi $a = 1200$, $b = 5$), costo marginale $c = 20$ €, teatro da $k = 400$ posti

Passo 1 — senza capacità. Profitto

$$\Pi(p) = (p - 20)(1200 - 5p), \qquad \Pi'(p) = 1200 - 10p + 100 = 0$$

dà

$$p^\circ = \frac{a/b + c}{2} = \frac{240 + 20}{2} = 130 \text{ €}, \qquad q^\circ = 1200 - 650 = 550 \text{ biglietti}$$

Esempio: domanda lineare, con e senza capacità (2/3)

Passo 2 — la capacità morde.

- $q^\circ = 550 > 400$: il vincolo è attivo, quindi si vende esattamente k
- Il prezzo che svuota il teatro è

$$p^* = \frac{a - k}{b} = \frac{1200 - 400}{5} = 160 \text{ €}$$

- Profitto: $(160 - 20) \cdot 400 = 56.000$ €

Esempio: domanda lineare, con e senza capacità (3/3)

Passo 3 — quanto vale un posto in più? Aumentando k, il prezzo ottimo scende di $1/b$:

$$\frac{d\Pi}{dk} = \underbrace{(p^* - c)}_{140} + k \underbrace{\frac{dp^*}{dk}}_{-1/5} = 140 - 80 = 60 \text{ €}$$

- Un posto in più *non* vale il margine pieno (140 €): per riempirlo bisogna abbassare il prezzo a tutti
- Errore classico di valutazione degli investimenti di capacità

Riepilogo

- Senza capacità: $p^\circ = (a/b + c)/2 = 130$ €, $q^\circ = 550$
- Con $k = 400$ la capacità è attiva: $p^* = (a - k)/b = 160$ €, profitto 56.000 €
- Valore di un posto in più: $p^* - c - k/b = 60$ €, **non** il margine pieno di 140 €

Caso di studio e implementazione

Introduzione: Caso di studio e implementazione

- Implementiamo il modello in Python con Gurobi
- Confrontiamo tre funzioni di domanda: lineare, a elasticità costante, logistica
- Scopriremo un ottimo che **non annulla nessuna derivata**: l'ottimo di spigolo

Dati del caso di studio

- Stessi dati dell'esempio: è il caso raro in cui l'istanza realistica è già piccola
- Più le varianti:
  - elasticità costante: $\theta = 6 \cdot 10^6$, $\varepsilon = 2{,}2$
  - logistica: $m = 900$, $\alpha = 6$, $\beta = 0{,}045$
  - multiprodotto (sezione successiva)

Implementazione in Gurobi

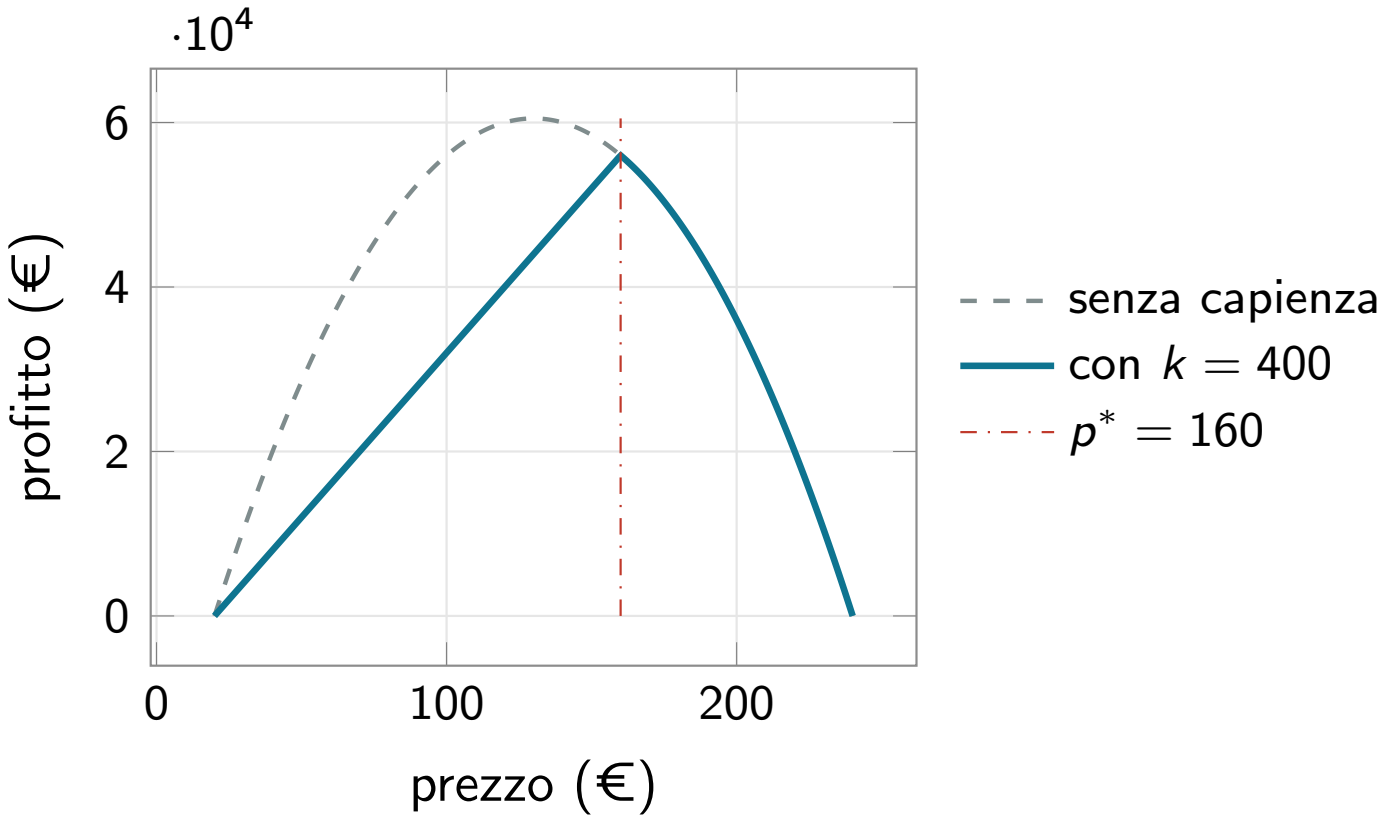
```
m = gp.Model("pricing_lineare")
m.Params.NonConvex = 2              # obiettivo bilineare p*q
p = m.addVar(ub=a/b, name="p")
q = m.addVar(name="q")
m.addConstr(q <= a - b*p, name="domanda")
v_cap = m.addConstr(q <= K, name="capienza")
m.setObjective(p*q - c*q, GRB.MAXIMIZE)
m.optimize()
# niente duali nei QP non convessi: sensitivita' per perturbazione
v_cap.RHS = K + 1; m.optimize()
```

Risultati

```
Gurobi:  p* = 160,00 EUR, q* = 400,
         profitto = 56.000,00 EUR
Valore marginale di un posto: 59,80 EUR (teoria: 60,00)
Elasticita' costante: p* = 79,11 EUR
           (ottimo nel punto in cui d(p) = k)
Logistica: p* = 138,29 EUR, profitto = 47.316,83 EUR
```

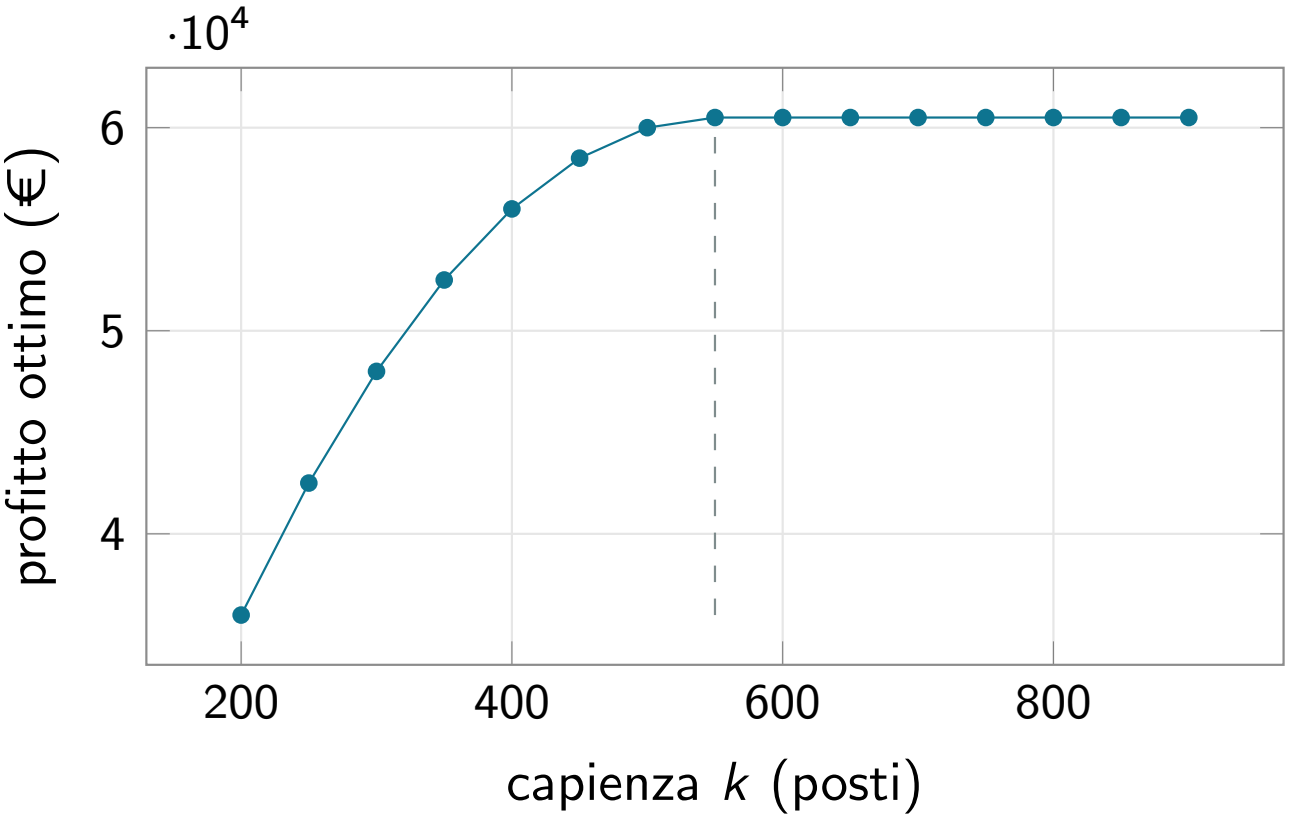
- Nei QP non convessi non ci sono duali: il valore del posto si stima **per perturbazione** ($k \to k+1$)

Profitto concavo e vincolo di capienza



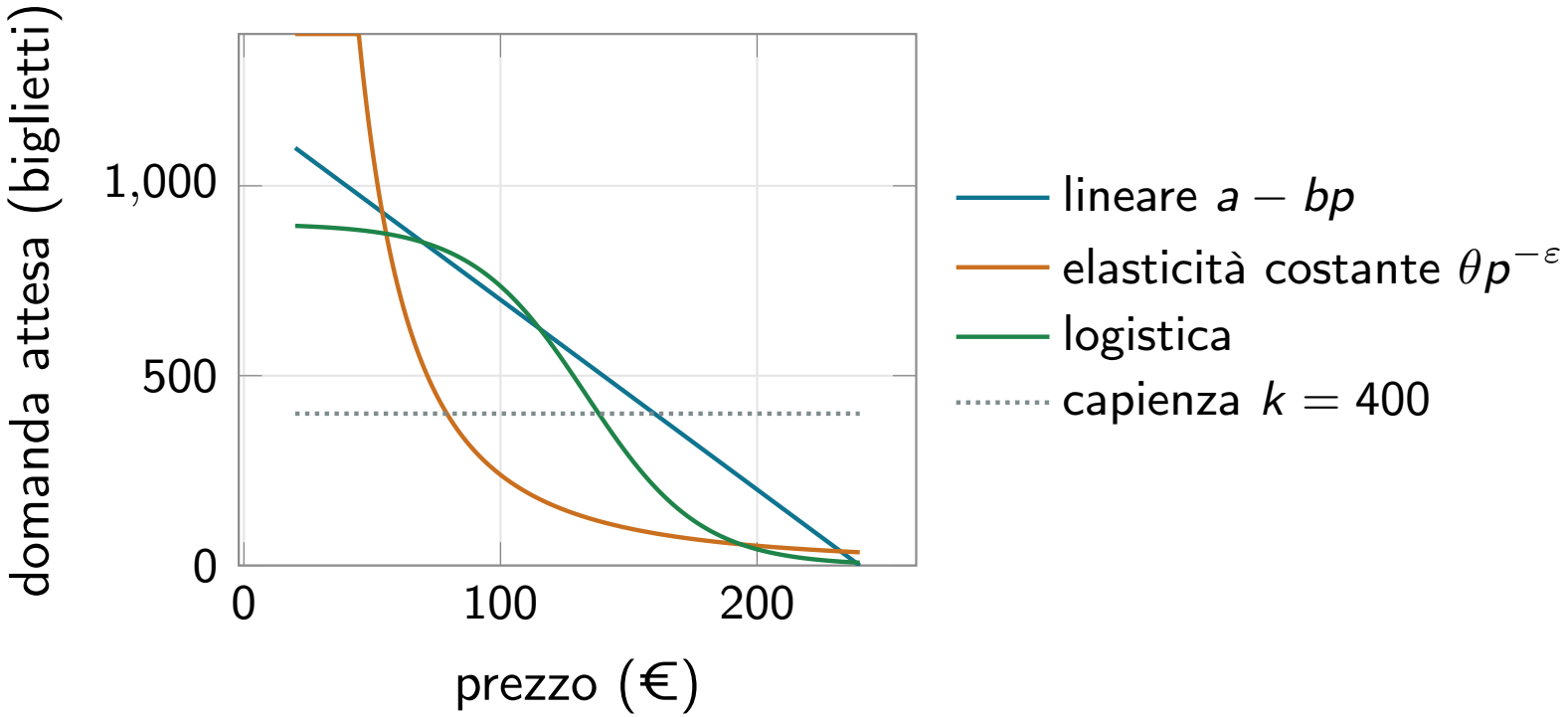
Il vincolo taglia la parabola e sposta l'ottimo a $p^* = 160$ €

Curva valore della capienza



Oltre $q^\circ = 550$ posti la curva diventa piatta: la capacità aggiuntiva non vale più nulla

Tre funzioni di domanda a confronto



La lineare taglia l'asse, l'elasticità costante ha coda lunga, la logistica descrive la transizione graduale tra domanda alta e bassa

L'ottimo nel punto di spigolo (1/2)

Con elasticità costante:

- L'ottimo *non vincolato* sarebbe $p = c\,\varepsilon/(\varepsilon - 1) = 36{,}67$ €
- Ma a quel prezzo la domanda supererebbe di gran lunga la capienza
- Per p sotto 79,11 € si vende comunque k: conviene quindi alzare il prezzo
- Sopra 79,11 €, il profitto $(p - c)\,\theta p^{-\varepsilon}$ decresce

L'ottimo nel punto di spigolo (2/2)

- L'ottimo

$$p^* = \left(\frac{\theta}{k}\right)^{1/\varepsilon} = 79{,}11\ €$$

  sta nel **punto di spigolo** dove $d(p) = k$

- Non annulla nessuna derivata

- **Morale**: mai cercare l'ottimo solo tra i punti stazionari quando ci sono vincoli

Riepilogo

- Gurobi risolve il modello bilineare all'ottimo globale con `NonConvex=2`
- Senza duali, il valore del posto si stima per perturbazione: 59,80 € (teoria: 60)
- La capienza vale qualcosa solo finché è attiva ($k < 550$)
- Con elasticità costante l'ottimo $p^* = 79{,}11$ € è un **punto di spigolo**

Versione multiprodotto

Introduzione: Versione multiprodotto

- Passiamo a due prodotti le cui domande si influenzano a vicenda
- Vedremo perché i prezzi di prodotti sostituti vanno decisi **insieme**
- E quali cautele servono quando il profitto non è concavo

Due categorie di biglietti con sostituzione

- Alzare il prezzo della platea spinge parte della domanda in galleria
- Domande:

$$d_1(p_1, p_2) = 500 - 2p_1 + 0{,}6\, p_2$$

$$d_2(p_1, p_2) = 900 + 0{,}8\, p_1 - 4p_2$$

- Costi $(30, 15)$ €, capacità $(150, 300)$ posti

Risultati multiprodotto

```
platea   : p1* = 234,04 EUR   q1* = 150/150 (piena)
galleria : p2* = 196,81 EUR   q2* = 300/300 (piena)
profitto totale: 85.148,94 EUR
```

Prezzi decisi congiuntamente

- Entrambe le categorie si riempiono
- Ma i prezzi non sono "quelli che svuotano" ciascuna sala presa da sola
- Il modello sfrutta la sostituzione: tiene la platea cara per spingere domanda verso la galleria
- Con prodotti sostituti i prezzi vanno decisi **congiuntamente**: ottimizzarli uno alla volta lascia soldi sul tavolo

Attenzione

Osservazione 1: Profitto non concavo e ottimi locali

Con funzioni di domanda generali il profitto può non essere concavo: un solver locale può fermarsi su un ottimo locale.

Prassi del laboratorio:

- *studiare dominio e derivate della funzione prima di fidarsi del solver*
- *provare più punti iniziali*
- *tracciare sempre il grafico del profitto sull'intervallo rilevante*

Riepilogo

- Con prodotti sostituti le domande dipendono da tutti i prezzi
- All'ottimo entrambe le sale sono piene, con prezzi 234,04 e 196,81 €
- I prezzi vanno decisi **congiuntamente**
- Con profitto non concavo: studiare la funzione, più punti iniziali, grafico

Esercizi

Introduzione: Esercizi

- Mettiamo alla prova quanto visto con cinque esercizi
- Riprendono l'esempio a mano, l'ottimo di spigolo e il modello multiprodotto
- Per ciascuno: prima il testo, poi la soluzione

Esercizio: verifica

- Verificare con Gurobi il valore marginale del posto per $k = 300$ (dalla tabella: 100 €)
- Ricavarlo anche con la formula $p^* - c - k/b$

Soluzione

- Con $k = 300$ la capacità è attiva ($300 < 550$):

$$p^* = \frac{a - k}{b} = \frac{1200 - 300}{5} = 180 \text{ €}$$

- Formula:

$$p^* - c - \frac{k}{b} = 180 - 20 - 60 = 100 \text{ €}$$

- In Gurobi: risolvere con $k = 300$ e $k = 301$ e fare la differenza dei profitti

Esercizio: costo marginale

- Come cambiano p^*, q^* e il valore del posto se il costo marginale sale a $c = 60$ €?
- Rifare i tre passi dell'esempio a mano

Soluzione

- **Passo 1**: $p^\circ = \dfrac{240 + 60}{2} = 150$ €, $q^\circ = 1200 - 750 = 450$
- **Passo 2**: $450 > 400$, la capacità resta attiva: $p^* = 160$ €, $q^* = 400$, profitto $(160 - 60) \cdot 400 = 40.000$ €
- **Passo 3**: valore del posto $= 100 - 80 = 20$ €
- Il prezzo non cambia (lo fissa la capacità), ma il posto in più vale molto meno

Esercizio: prezzo di riferimento

- Aggiungere la penalità reputazionale $-\gamma\,(p-120)^2$ con $\gamma = 2$
- Quale prezzo bilancia profitto e reputazione?
- Il problema resta concavo?

Soluzione (1/2)

Con $q = \min\{1200 - 5p,\ 400\}$ studiamo i due tratti:

- $p \leq 160$ (capacità attiva): $\Pi(p) = 400(p - 20) - 2(p - 120)^2$,
  $\Pi'(p) = 400 - 4(p - 120) > 0$ per $p < 220$: **crescente**
- $p \geq 160$ (domanda attiva):
  $\Pi(p) = (p - 20)(1200 - 5p) - 2(p - 120)^2$,
  $\Pi'(p) = 1780 - 14p < 0$ per $p > 127{,}1$: **decrescente**

Quindi l'ottimo resta $p^* = 160$ €, profitto
$56.000 - 3.200 = 52.800$ €

Soluzione (2/2)

- Il problema **resta concavo**
- Per $p \geq c$, $(p - 20)\min\{1200 - 5p, 400\}$ è il minimo di due funzioni concave, quindi concava
- Sottrarre la convessa $2(p - 120)^2$ preserva la concavità
- La penalità riduce il profitto ma non sposta il prezzo: lo spigolo $d(p) = k$ resta ottimo

Esercizio: elasticità

- Per la domanda a elasticità costante, tracciare p^* in funzione di $\varepsilon \in [1{,}3;\ 3]$ con $k = 400$
- Per quali ε il vincolo di capienza resta attivo?

Soluzione

- Due candidati: spigolo $(\theta/k)^{1/\varepsilon}$ e ottimo non vincolato $c\,\varepsilon/(\varepsilon-1)$

$$p^*(\varepsilon) = \max\left\{\left(\frac{\theta}{k}\right)^{1/\varepsilon},\ \frac{c\,\varepsilon}{\varepsilon-1}\right\}$$

- La capienza è attiva quando lo spigolo è il maggiore dei due
- Con $\theta/k = 15.000$ e $c = 20$ ciò accade per $\varepsilon \lesssim 2{,}80$; oltre, $p^* = c\,\varepsilon/(\varepsilon-1)$ e la sala non si riempie

Esercizio: multiprodotto

- Nel modello a due categorie, di quanto aumenta il profitto con 50 posti di platea in più?
- E con 50 di galleria?
- Quale ampliamento consiglierestе, a parità di costo?

Soluzione

Entrambe le capacità restano attive: i prezzi si ottengono da $d_1 = k_1$, $d_2 = k_2$

- **Platea 200**: $p_1^* = 207{,}45$, $p_2^* = 191{,}49$ €, profitto ≈ 88.436 € $(+3.287)$
- **Galleria 350**: $p_1^* = 230{,}05$, $p_2^* = 183{,}51$ €, profitto ≈ 88.987 € $(+3.838)$
- A parità di costo conviene **ampliare la galleria**

Riepilogo finale

- Nel pricing il prezzo è una variabile: il profitto $(p - c)\, q$ è **bilineare**
- Con domanda lineare il problema ridotto è concavo; Gurobi trova comunque l'ottimo globale
- Un posto in più **non** vale il margine pieno: $p^* - c - k/b$
- Con vincoli l'ottimo può stare in un **punto di spigolo**
- Prodotti sostituti: prezzi decisi **congiuntamente**