Portafoglio di Markowitz

Sapienza Università di Roma

Indice

Motivazione gestionale

Costruzione guidata del modello

Esempio svolto a mano

Caso di studio

Risultati

Analisi di sensitività

Esercizi

Obiettivi (1/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- formulare e risolvere un QP convesso;
- costruire e leggere la frontiera efficiente;

Obiettivi (2/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- capire l'effetto dei vincoli di mandato;
- diffidare delle stime dei rendimenti attesi.

Prerequisiti

- Da questo modulo, Capitolo 2 «Richiami: convessità, programmazione quadratica e condizioni KKT»: i programmi quadratici convessi, le condizioni KKT e i moltiplicatori come prezzi ombra

- Dal modulo *Ottimizzazione convessa*, Capitolo 4 «Funzioni quadratiche»: le forme quadratiche e le matrici di covarianza come matrici semidefinite positive

Motivazione gestionale

Introduzione: Motivazione gestionale

- Quanto investire in ciascun titolo per bilanciare **rendimento atteso** e **rischio**?
- Il modello di Markowitz è il **QP più famoso della storia**: minimizza la varianza del portafoglio imponendo un rendimento minimo
- Classe del problema: **QP convesso**

La frontiera efficiente

- Il risultato non è un numero ma una **frontiera efficiente**
- È il menu completo dei compromessi rischio-rendimento
- Il decisore sceglie su questa frontiera in base alla propria **avversione al rischio**

Una struttura che riappare ovunque

- Il problema nasce in finanza (Markowitz, 1952, premio Nobel)
- La sua struttura — **allocare un budget tra alternative rischiose e correlate** — riappare ovunque:
  - mix di progetti di R&S
  - portafogli di clienti
  - allocazione di capacità produttiva tra mercati volatili
- È il ponte naturale tra ottimizzazione e statistica: i dati del modello sono **stime**, con tutte le conseguenze del caso

Riepilogo

- Markowitz: minimizzare il rischio (varianza) garantendo un rendimento minimo
- Il risultato è una **frontiera efficiente** di compromessi rischio-rendimento
- I dati sono **stime**: l'ottimizzazione incontra la statistica

Costruzione guidata del modello

Introduzione: Costruzione guidata del modello

- Descriviamo il problema a parole, poi fissiamo **dati** e **variabili**
- Scriviamo il **modello QP di minima varianza** e spieghiamo obiettivo e vincoli
- Vediamo due **formulazioni equivalenti** e perché il QP è **convesso**

Il problema a parole

- **Decidiamo** la quota di capitale da investire in ciascun titolo
- **L'obiettivo** è minimizzare il rischio del portafoglio, misurato dalla varianza del suo rendimento
- **I vincoli**:
  - investire tutto il capitale (le quote sommano a 1)
  - garantire un rendimento atteso minimo
  - rispettare le quote minime e massime per titolo

Dati (input del modello) (1/2)

Simbolo	Tipo	Significato
n	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero di titoli; i titoli sono indicizzati da $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$
μ_i	$\in \mathbb{Q}$	rendimento atteso del titolo i (per anno)
q_{ij}	$\in \mathbb{Q}$	covarianza tra i rendimenti dei titoli i e j; la matrice $\boldsymbol{Q} = (q_{ij})$ è semidefinita positiva ($\boldsymbol{Q} \succeq 0$)

Dati (input del modello) (2/2)

Simbolo	Tipo	Significato
$\bar{r}$	$\in \mathbb{Q}$	rendimento atteso minimo richiesto
ℓ_i, u_i	$\in \mathbb{Q}$, $0 \leq \ell_i \leq u_i \leq 1$	quota minima e massima investibile nel titolo i

Variabili decisionali

- Introduciamo le seguenti n variabili non negative:

  x_i = quota di capitale investita nel titolo i, $\quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

- Usando queste variabili, scriviamo un modello QP per il problema

Modello QP

Modello QP di minima varianza con rendimento minimo

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{ij}\, x_i\, x_j \tag{6.1a}$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{i=1}^{n} \mu_i\, x_i \geq \bar{r}, \tag{6.1b}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \tag{6.1c}$$

$$x_i \leq u_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{6.1d}$$

$$x_i \geq \ell_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{6.1e}$$

La funzione obiettivo

- La funzione obiettivo **quadratica** minimizza la varianza del rendimento del portafoglio
- Contiene le covarianze q_{ij}, ed è qui che nasce la **diversificazione**
- Combinare titoli poco correlati abbassa il rischio complessivo **sotto quello dei singoli componenti**

Rendimento minimo e budget

- Il vincolo lineare $\sum_i \mu_i x_i \geq \bar{r}$ impone che il rendimento atteso del portafoglio raggiunga la soglia $\bar{r}$ (un vincolo lineare)
  - è la "**manopola**" con cui si percorre la frontiera efficiente
  - il suo moltiplicatore dice quanta varianza costa ogni punto di rendimento in più
- Il vincolo lineare $\sum_i x_i = 1$ impone di investire tutto il capitale (un vincolo lineare)

Limiti per titolo

- I vincoli lineari $x_i \leq u_i$ sono i **tetti per titolo**, tipici vincoli regolamentari o di mandato (n vincoli lineari)
- I vincoli $x_i \geq \ell_i$ definiscono le variabili del modello
- Con $\ell_i = 0$: **divieto di vendita allo scoperto**

Formulazioni equivalenti

Media-varianza: il rischio va nell'obiettivo con un peso λ

$$\max \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i - \lambda \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j$$

Massimo rendimento a rischio limitato: il rischio va nei vincoli

$$\max \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \quad \text{con varianza} \leq \bar{\sigma}^2$$

Variando $\bar{r}$ (o λ, o $\bar{\sigma}$) si percorre **la stessa frontiera**.

Convessità

- Ogni matrice di covarianza è **semidefinita positiva**
- Quindi il QP è **convesso**
- L'ottimo trovato è **globale certificato**

Riepilogo

- Variabili x_i: quote di capitale investite nei titoli
- Obiettivo quadratico (varianza); vincoli lineari: rendimento minimo, budget, limiti per titolo
- Tre formulazioni equivalenti (minima varianza, media-varianza, rischio limitato) generano la stessa frontiera
- $\boldsymbol{Q} \succeq 0$: il QP è convesso, l'ottimo è globale

Esempio svolto a mano

Introduzione: Esempio svolto a mano

- Due soli titoli, non correlati
- Calcoliamo a mano il portafoglio di **minima varianza**
- Vedremo l'**effetto diversificazione** nella sua forma più pura

Esempio: Due titoli non correlati (1/2)

Volatilità $\sigma_1 = 20\%$, $\sigma_2 = 30\%$, correlazione nulla.
Minimizzare la varianza con $x_1 + x_2 = 1$ (senza vincolo di rendimento).

Passo 1. Sostituendo $x_2 = 1 - x_1$:

$$f(x_1) = 0{,}04\, x_1^2 + 0{,}09\,(1 - x_1)^2$$

Passo 2.

$$f'(x_1) = 0{,}08\, x_1 - 0{,}18\,(1 - x_1) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{0{,}09}{0{,}04 + 0{,}09} = \frac{9}{13} \approx 69{,}2\%$$

Esempio: Due titoli non correlati (2/2)

Passo 3. Varianza del portafoglio:

$$f(9/13) = 0{,}04 \cdot 0{,}479 + 0{,}09 \cdot 0{,}095 = 0{,}0277$$

cioè volatilità 16,6%

- Il portafoglio è **meno rischioso di entrambi i titoli**
- È l'effetto diversificazione nella sua forma più pura: i pesi ottimi sono **inversamente proporzionali alle varianze**

Riepilogo

- Con due titoli non correlati il minimo si trova annullando la derivata
- $x_1 = 9/13$: volatilità 16,6%, inferiore a quella di entrambi i titoli
- Pesi ottimi inversamente proporzionali alle varianze

Caso di studio

Introduzione: Caso di studio

- Otto ETF settoriali con rendimenti mensili simulati
- μ e $\boldsymbol{Q}$ sono **stimati** dai dati, come nella pratica
- Vediamo il modello scritto in **Python con Gurobi**

I dati del caso di studio

- Otto **ETF settoriali** (*Exchange Traded Fund*: fondi quotati che replicano un paniere di titoli di un settore)
- 60 rendimenti mensili simulati con un modello a un fattore di mercato
- File `markowitz_rendimenti.csv`
- $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{Q}$ sono **stimati** da questi dati, come nella pratica

Statistiche annualizzate

Titolo	μ	vol	Titolo	μ	vol
ENE	19,12%	18,65%	SAN	2,80%	11,93%
FIN	8,27%	19,59%	CON	11,25%	11,67%
TEC	1,58%	29,27%	UTL	11,99%	7,53%
IND	9,97%	16,60%	MAT	20,93%	23,93%

Il modello in Gurobi

```
m = gp.Model("markowitz")
# quote, 0 <= x_i <= u
x = m.addVars(n, ub=u, name="x")
m.addConstr(x.sum() == 1, name="budget")
m.addConstr(gp.quicksum(mu[i]*x[i]
                        for i in range(n)) >= r_min)
m.setObjective(gp.quicksum(Q[i, j]*x[i]*x[j]
                           for i in range(n)
                           for j in range(n)),
               GRB.MINIMIZE)
m.optimize()
```

Riepilogo

- Otto ETF settoriali, 60 mesi di rendimenti simulati
- Rendimenti attesi e covarianze sono **stime** dai dati
- In Gurobi l'obiettivo quadratico si scrive direttamente con `quicksum` sui prodotti $x_i x_j$

Risultati

Introduzione: Risultati

- Confrontiamo il portafoglio di **minima varianza** con l'**equipesato** $1/n$
- Disegniamo la **frontiera efficiente**, con e senza tetti per titolo
- Guardiamo come cambia la **composizione** ottima lungo la frontiera

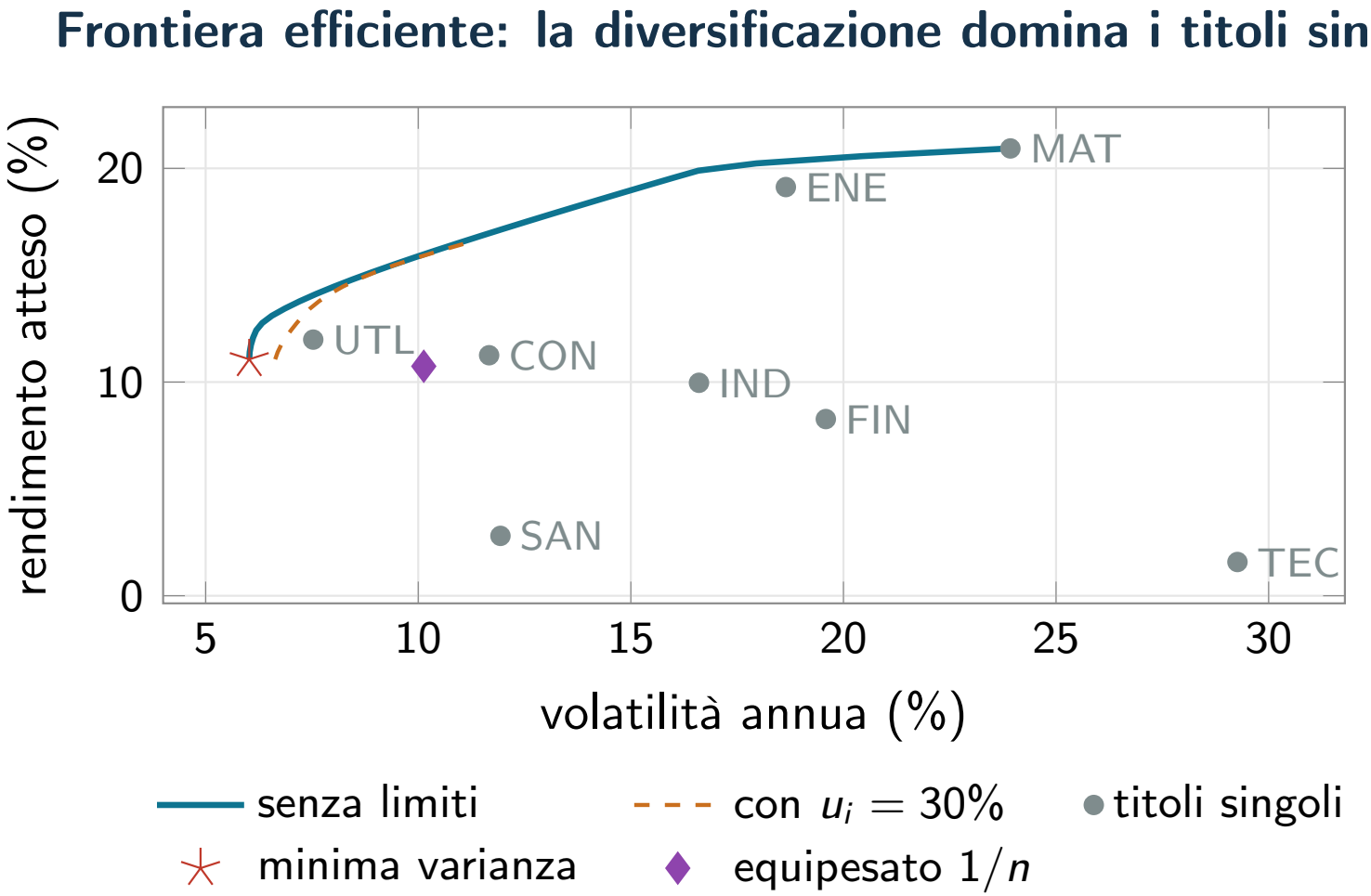
Minima varianza contro equipesato

Portafoglio	Rendimento	Volatilità
Minima varianza globale	11,06%	6,03%
Equipesato $(1/n)$	10,74%	10,13%

Composizione di minima varianza:

ENE	IND	SAN	CON	UTL
5,2%	1,9%	11,5%	22,3%	58,3%

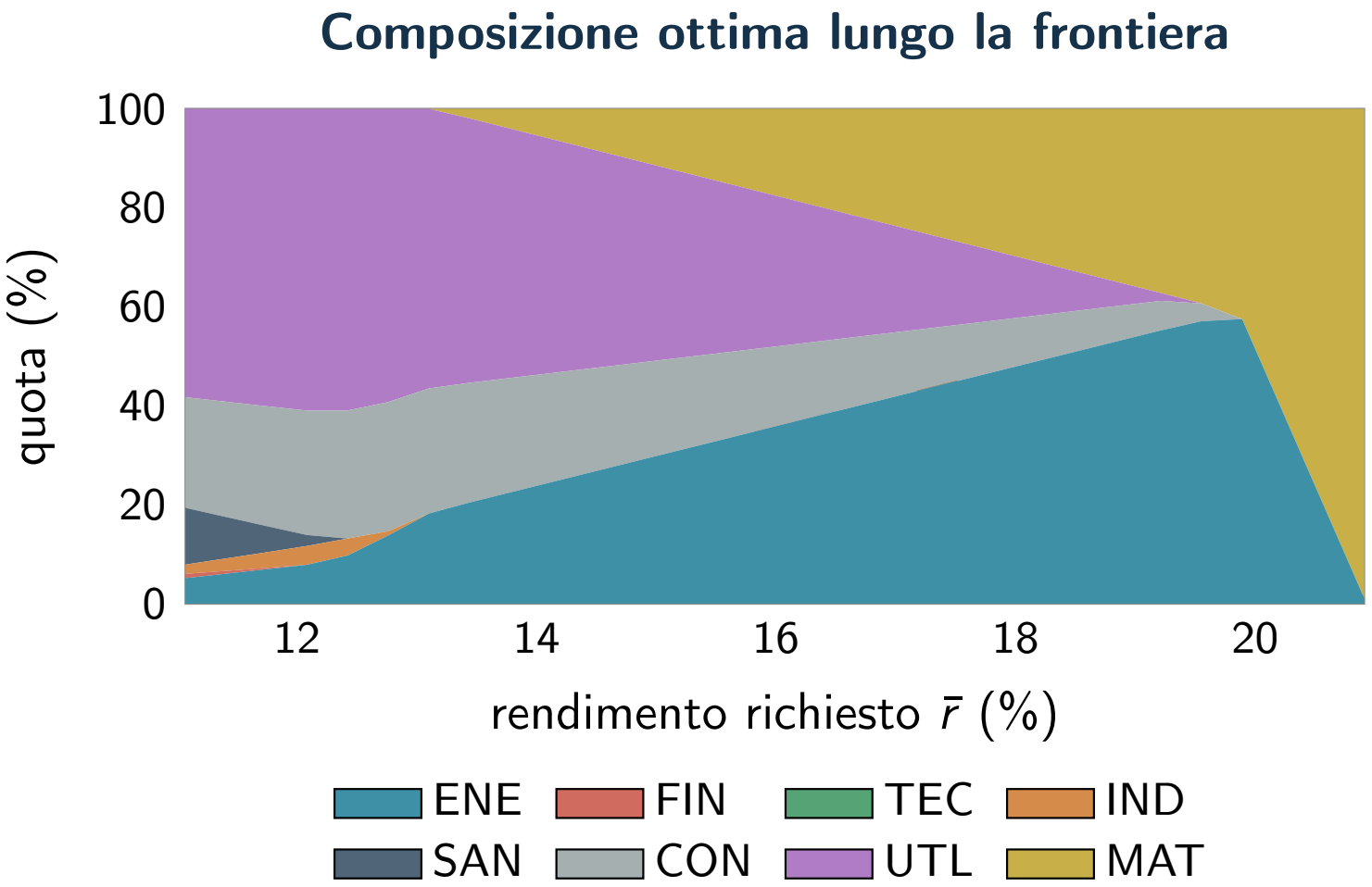
Frontiera efficiente



Come leggere il piano rischio-rendimento

- Gli otto titoli: **punti grigi**
- Frontiera efficiente senza limiti: **linea teal**
- Frontiera con tetto del 30% per titolo: **tratteggiata arancione**
- Portafoglio di minima varianza: **stella rossa**
- Equipesato $1/n$: **rombo viola**, che risulta **dominato**

Composizione ottima lungo la frontiera



Come leggere la composizione

- Aree impilate (in %) al crescere del rendimento richiesto $\bar{r}$
- A sinistra domina il **mix difensivo** (UTL, CON, SAN)
- Verso destra il portafoglio si concentra progressivamente sui titoli ad **alto rendimento** (MAT, ENE)
- All'estremo: il portafoglio **monotitolo**

Tre messaggi dalla figura

1. Il portafoglio di minima varianza (volatilità 6%) è molto meno rischioso del miglior titolo singolo (UTL, 7,5%) pur rendendo l'11%
2. L'equipesato $1/n$ — la strategia "non so nulla" — è nettamente **dominato**: stessa area di rendimento ma quasi il doppio della volatilità
3. Il tetto $u_i = 30\%$ taglia la parte alta della frontiera: il **costo dei vincoli di mandato** si *vede* come distanza tra le due curve

Riepilogo

- Minima varianza: rendimento 11,06%, volatilità 6,03%
- L'equipesato è dominato: rendimento simile, volatilità quasi doppia
- Lungo la frontiera si passa dal mix difensivo ai titoli ad alto rendimento
- I vincoli di mandato hanno un costo visibile sulla frontiera

Analisi di sensitività

Introduzione: Analisi di sensitività

- Facciamo variare il rendimento minimo richiesto $\bar{r}$
- Capiremo quando il vincolo di rendimento è **attivo** e quanto costa
- Vedremo infine la **fragilità delle stime** dei rendimenti attesi

Volatilità al variare di $\bar{r}$

$\bar{r}$	Volatilità	
6%	6,03%	vincolo **non** attivo: coincide col min varianza
8%	6,03%	idem
10%	6,03%	idem
12%	6,10%	$d(\text{varianza})/d(\bar{r}) \approx 0{,}0221$

Un vincolo che non costa nulla

- Fino a $\bar{r} = 11\%$ il vincolo di rendimento è **inattivo**
- Il portafoglio di minima varianza rende già l'11,06%: chiedere "almeno l'8%" non costa nulla e il moltiplicatore è zero
- Solo oltre l'11,06% il vincolo morde: ogni punto di rendimento in più si paga in varianza (moltiplicatore $\approx 0{,}022$ a $\bar{r} = 12\%$)
- Riconoscere i vincoli inattivi evita di "pagare" vincoli gratis

La fragilità delle stime

Osservazione 1: La fragilità delle stime

Nei dati simulati il titolo TEC ha α vero dell'11% annuo, ma su 60 mesi il rendimento stimato è 1,6%: il rumore domina.

È la lezione pratica più importante di Markowitz: ***le stime dei rendimenti attesi sono molto più instabili di quelle delle covarianze****, e i portafogli ottimizzati inseguono gli errori di stima.*

Rimedi usati in pratica

- Vincoli u_i sulle quote per titolo
- **Shrinkage** delle stime
- Ottimizzare solo il rischio (**minima varianza**)

Riepilogo

- Sotto l'11,06% il vincolo di rendimento è inattivo: moltiplicatore nullo
- Oltre, ogni punto di rendimento costa varianza ($\approx 0{,}022$ a $\bar{r} = 12\%$)
- Le stime dei rendimenti attesi sono fragili: l'ottimizzazione insegue gli errori di stima
- Rimedi: tetti, shrinkage, minima varianza

Esercizi

Introduzione: Esercizi

- Cinque esercizi, a mano e con lo script del caso di studio
- Riguardano la correlazione, i tetti per titolo, la stabilità delle stime, il tracking error e i costi di transazione

Esercizio: verifica

- Verificare a mano l'esempio dei due titoli con $\rho = 0{,}5$: la formula diventa

$$x_1 = \frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}$$

- La diversificazione conviene ancora?

Esercizio: frontiera

- Ricalcolare la frontiera con $u_i = 20\%$
- Quanto rendimento massimo si perde?
- Rappresentare le tre frontiere ($u = 1, 0{,}3, 0{,}2$) nello stesso grafico

Esercizio: stabilità delle stime

- Rieseguire lo script con un seme casuale diverso (`default_rng(1)`)
- Confrontare le composizioni ottime a parità di $\bar{r}$: quanto cambiano?
- Quale implicazione operativa ne traete?

Esercizio: tracking error

- Il benchmark è l'equipesato $x_i^B = 1/8$
- Minimizzare il tracking error

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}(x_i - x_i^B)(x_j - x_j^B)$$

  con rendimento atteso $\geq 12\%$
- Quanto ci si deve scostare dal benchmark?

Esercizio: costi di transazione

- Partendo dal portafoglio equipesato, aggiungere il costo quadratico

$$\kappa \sum_{i=1}^{n} (x_i - 1/8)^2, \qquad \kappa = 0{,}5$$

- Come cambia la composizione rispetto all'ottimo "pulito"?

Riepilogo

- Effetto della correlazione sulla diversificazione
- Costo dei tetti per titolo sulla frontiera
- Stabilità delle composizioni rispetto ai dati
- Varianti del modello: tracking error rispetto a un benchmark e costi di transazione quadratici

Riepilogo finale (1/2)

Modello:

- QP convesso: minima varianza con rendimento minimo, budget e limiti per titolo
- Formulazioni equivalenti: media-varianza, rischio limitato

Diversificazione:

- Combinare titoli poco correlati abbassa il rischio sotto quello dei singoli titoli

Riepilogo finale (2/2)

Frontiera efficiente:

- Menu dei compromessi rischio-rendimento; l'equipesato è dominato
- I vincoli di mandato hanno un costo visibile

Stime:

- I vincoli inattivi non costano nulla
- Le stime dei rendimenti attesi sono fragili: usare tetti, shrinkage o minima varianza