Supply chain con congestione e sostenibilità

Indice

Motivazione gestionale

Costruzione guidata del modello

Esempio svolto a mano

Caso di studio

Risultati

Analisi di sensitività: il prezzo della CO_2

Esercizi

Obiettivi (1/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- formulare un problema di flusso a costo minimo con vincoli di conservazione;
- modellare la congestione con termini quadratici convessi;

Obiettivi (2/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- tracciare una frontiera costi-emissioni con un prezzo interno della CO_2;
- capire perché le soluzioni degli LP saltano da un vertice all'altro.

Prerequisiti

- Dal modulo *Modellazione PL*, Capitolo 2 «Richiami: programmazione lineare e analisi di sensitività»: prezzi ombra, costi ridotti e i loro intervalli
- Da questo modulo, Capitolo 2 «Richiami: convessità, programmazione quadratica e condizioni KKT»: i programmi quadratici convessi, le condizioni KKT e i moltiplicatori come prezzi ombra

Motivazione gestionale

Introduzione: Motivazione gestionale

- I prodotti attraversano una rete di **stabilimenti**, **hub** e **mercati**
- Ogni tratta ha un **costo**, una **capacità** e un'**impronta di CO_2**
- Il costo effettivo cresce rapidamente quando una tratta si avvicina alla **saturazione**
- Classe del problema: **LP / NLP convesso**

Tre domande manageriali

1. Come instradare i flussi al **minimo costo**?
2. Cosa cambia se penalizziamo la **congestione**?
3. Quanto deve valere la $\mathbf{CO_2}$ perché le rotte "pulite" diventino convenienti?

Un problema quotidiano della logistica

- È il problema quotidiano di chi gestisce distribuzione e logistica:
  - scegliere le rotte
  - decidere quanto caricare ciascuna tratta
  - valutare investimenti in capacità
  - rendere conto dell'impronta carbonica delle spedizioni
- La struttura matematica — il **flusso su rete** — è tra le più riutilizzabili di tutta la ricerca operativa

Riepilogo

- Rete di stabilimenti, hub e mercati: ogni tratta ha costo, capacità ed emissioni
- Tre obiettivi da confrontare: **costo minimo**, **congestione**, **CO_2**
- Il modello di riferimento è il **flusso su rete**

Costruzione guidata del modello

Introduzione: Costruzione guidata del modello

- Descriviamo il problema a parole, poi fissiamo **dati** e **variabili**
- Scriviamo il **modello LP di flusso a costo minimo** e spieghiamo ogni vincolo
- Vediamo infine tre **varianti dell'obiettivo**: congestione, prezzo della CO_2, minimax

Il problema a parole

- **Decidiamo** quante unità far viaggiare su ciascuna tratta della rete
- **L'obiettivo** è minimizzare il costo totale di trasporto (nelle varianti: più congestione o CO_2)
- **I vincoli** impongono che in ogni nodo i flussi tornino:
  - gli stabilimenti non spediscono più di quanto producono
  - gli hub non trattengono nulla
  - i mercati ricevono esattamente la loro domanda

  e che nessuna tratta superi la propria capacità

Dati (input del modello) (1/2)

Simbolo	Tipo	Significato
$G = (N, A)$	grafo diretto	nodi N e archi $A \subseteq N \times N$; scriviamo $\|N\|$ e $\|A\|$ per il numero di nodi e di archi
b_i	$\in \mathbb{Q}$	saldo del nodo $i \in N$: offerta se > 0, domanda se < 0, transito se $= 0$

Dati (input del modello) (2/2)

Simbolo	Tipo	Significato
u_{ij}	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	capacità dell'arco $(i,j) \in A$ (unità)
c_{ij}	$\in \mathbb{Q}_{\geq 0}$	costo di trasporto di un'unità sull'arco (i,j) (€)
e_{ij}	$\in \mathbb{Q}_{\geq 0}$	emissioni per unità trasportata su (i,j) (kg CO_2)

Variabili decisionali

- Introduciamo una variabile non negativa per ciascuno degli $|A|$ archi:

$$x_{ij} = \text{unità di prodotto inviate sull'arco } (i,j), \qquad \forall (i,j) \in A$$

- Usando queste variabili, scriviamo un modello LP per il problema

Modello LP

Modello LP di flusso a costo minimo

$$\min \quad \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}\, x_{ij} \tag{5.1a}$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{j:\,(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{j:\,(j,i)\in A} x_{ji} = b_i, \qquad \forall i \in N, \tag{5.1b}$$

$$x_{ij} \le u_{ij}, \quad \forall (i,j) \in A, \tag{5.1c}$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad \forall (i,j) \in A. \tag{5.1d}$$

Funzione obiettivo e conservazione del flusso

- La **funzione obiettivo** lineare minimizza il costo totale di trasporto: ogni unità che attraversa l'arco (i, j) paga il costo unitario c_{ij}
- I **vincoli di conservazione del flusso**: in ogni nodo, ciò che esce meno ciò che entra è pari al saldo b_i
  - positivo negli stabilimenti, negativo nei mercati, nullo negli hub
  - $|N|$ vincoli lineari
- La somma dei saldi su tutti i nodi deve essere ≥ 0, altrimenti il modello è **inammissibile**

Capacità e dominio delle variabili

- I **vincoli di capacità** $x_{ij} \leq u_{ij}$ assicurano che nessuna tratta trasporti più della propria capacità
- Sono $|A|$ vincoli lineari
- I vincoli $x_{ij} \geq 0$ definiscono le variabili del modello

Varianti sull'obiettivo (1/2)

I vincoli non cambiano; cambia solo la funzione obiettivo.

Congestione (convessa):

$$\sum_{(i,j)\in A} \left(c_{ij}\, x_{ij} + \alpha\, c_{ij}\, x_{ij}^2 / u_{ij} \right)$$

Prezzo interno della CO_2:

$$\sum_{(i,j)\in A} \left(c_{ij} + \tau\, e_{ij} \right) x_{ij}$$

Varianti sull'obiettivo (2/2)

Minimax utilizzo:

$$\min z \ : \ x_{ij}/u_{ij} \leq z, \ \ \forall (i,j) \in A$$

dove:

- $\alpha \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ pesa la congestione
- $\tau \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ (€/kg) è il prezzo interno della CO_2

Congestione

- Il termine $\alpha\, c_{ij}\, x_{ij}^2 / u_{ij}$ è **convesso** e cresce con l'utilizzo dell'arco
- Rappresenta straordinari, code ai terminal, premi assicurativi
- Il suo effetto è **ripartire** i flussi su più rotte invece di saturare la più economica

Prezzo della CO_2

- Non serve un vincolo sulle emissioni: basta aggiungerle al costo con il prezzo interno τ
- Variando τ si traccia l'intera **frontiera costo-emissioni** (approccio "a peso")
- L'alternativa "a vincolo" impone

$$\sum_{(i,j)\in A} e_{ij}\, x_{ij} \leq \bar{e}$$

e legge il duale

Riepilogo

- Variabili x_{ij}: unità inviate su ciascun arco
- Vincoli: **conservazione del flusso** nei nodi e **capacità** sugli archi
- Varianti dell'obiettivo: **congestione** quadratica convessa, **prezzo interno della CO_2**, **minimax** dell'utilizzo
- Il prezzo τ permette di tracciare la frontiera costo-emissioni senza vincoli aggiuntivi

Esempio svolto a mano

Introduzione: Esempio svolto a mano

- Un esempio minimo con **due rotte** in concorrenza
- Risolviamo prima l'LP puro e leggiamo i **prezzi ombra**
- Poi aggiungiamo la **congestione** e vediamo come cambia la soluzione

Esempio: Due rotte in concorrenza (1/3)

Un mercato chiede 100 unità servibili da due rotte:

- rotta 1 con $c_1 = 2$ € e $u_1 = 80$
- rotta 2 con $c_2 = 5$ € e capacità abbondante

LP puro. Si riempie la rotta economica e si trabocca sull'altra:

$$x_1 = 80, \qquad x_2 = 20, \qquad \text{costo } 2 \cdot 80 + 5 \cdot 20 = 260 \text{ €}$$

Esempio: Due rotte in concorrenza (2/3)

Prezzi ombra dell'LP puro:

- **Domanda**: servire la 101-esima unità costerebbe 5 € (la rotta 1 è satura)
- **Capacità** u_1: $+1$ unità di capacità fa risparmiare $5 - 2 = 3$ €

Esempio: Due rotte in concorrenza (3/3)

Con congestione ($\alpha = 1$): costo rotta $1 = 2x_1 + 2x_1^2/80$

- Il costo marginale della rotta 1, $2 + 4x_1/80$, va eguagliato a quello della rotta 2 (altrimenti conviene spostare flusso):

$$2 + x_1/20 = 5 \;\Rightarrow\; x_1 = 60, \quad x_2 = 40$$

- La rotta economica **non viene più saturata**: il modello lascia margine di sicurezza, proprio come farebbe un pianificatore prudente

Riepilogo

- L'LP puro **satura** la rotta economica e trabocca sulla costosa
- I prezzi ombra misurano il valore di un'unità di domanda o di capacità in più
- Con la congestione si **eguagliano i costi marginali**: i flussi si ripartiscono e resta un margine di sicurezza

Caso di studio

Introduzione: Caso di studio

- Applichiamo il modello a una rete realistica, con costi ed emissioni **non proporzionali**
- Vediamo come si scrive il modello in **Python con Gurobi**, con le varianti congestione e CO_2

La rete del caso di studio

- 2 stabilimenti (S1, S2), 2 hub (H1, H2) e 4 mercati (M1–M4)
- 12 archi con capacità, costi ed emissioni **non** proporzionali ai costi:
  - le tratte economiche sono "su strada" (inquinanti)
  - quelle costose "su ferro" (pulite)
- Dati in `supplychain_archi.csv`; offerta $(260, 240)$, domanda totale 450

Il modello in Gurobi (1/2)

Variabili e vincoli di conservazione:

```
m = gp.Model("supply_chain")
# ub direttamente sull'arco
x = m.addVars(A, name="x", ub=U)
m.addConstrs((x.sum(s, "*") <= offerta[s]
              for s in offerta))
m.addConstrs((x.sum("*", h) == x.sum(h, "*")
              for h in hub))
v_dom = m.addConstrs((x.sum("*", k) == domanda[k]
                      for k in domanda),
                     name="domanda")
```

Il modello in Gurobi (2/2)

Obiettivo con prezzo della CO_2 e congestione:

```
obj = gp.quicksum((c[a] + tau * e[a]) * x[a]
                  for a in A)
if congestione > 0:  # termine quadratico convesso
    obj += gp.quicksum(
        congestione * c[a] * x[a] * x[a] / U[a]
        for a in A)
m.setObjective(obj, GRB.MINIMIZE)
```

Riepilogo

- Rete con 8 nodi e 12 archi: strada economica e inquinante, ferro costoso e pulito
- Le capacità entrano come **upper bound** delle variabili
- Un solo script copre LP, congestione (`congestione` > 0) e prezzo della CO_2 (`tau`)

Risultati

Introduzione: Risultati

- Confrontiamo tre modelli: **LP a costo minimo**, **congestione**, **minimax**
- Leggiamo i **prezzi ombra** della domanda e i **costi ridotti** degli archi non usati
- Guardiamo i flussi ottimi disegnati sulla rete

Risultati dei tre modelli

Modello	Costo (€)	Emissioni (kg)	Utilizzo max
LP costo minimo	3.385,00	2.730	100%
Congestione $\alpha = 1$	3.702,81	2.530	90%
Minimax	–	–	58,4%

- LP: archi saturi S1→H1, S2→H2, H2→M3
- Minimax: utilizzo massimo minimo possibile 58,4%

LP: prezzi ombra e costi ridotti

Prezzi ombra della domanda (€/unità):

M1	M2	M3	M4
8,00	9,50	10,00	10,50

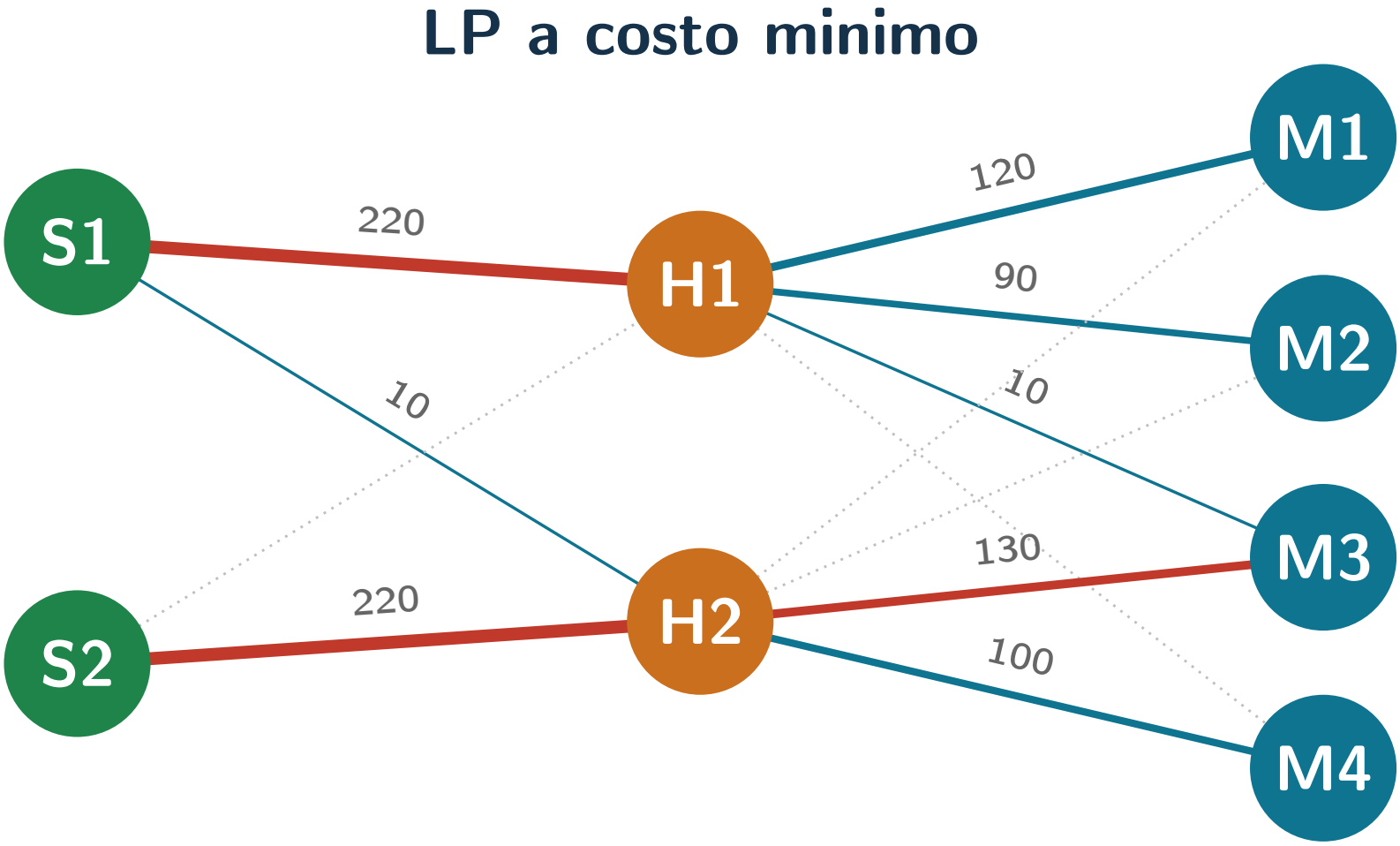
Costi ridotti degli archi a zero (soglia = `SAObjLow`, €/unità):

Arco	Costo ridotto	Soglia
S2→H1	+2,00	5,00
H1→M4	+0,50	5,50
H2→M1	+4,50	1,50
H2→M2	+1,00	3,00

Come leggere le figure dei flussi

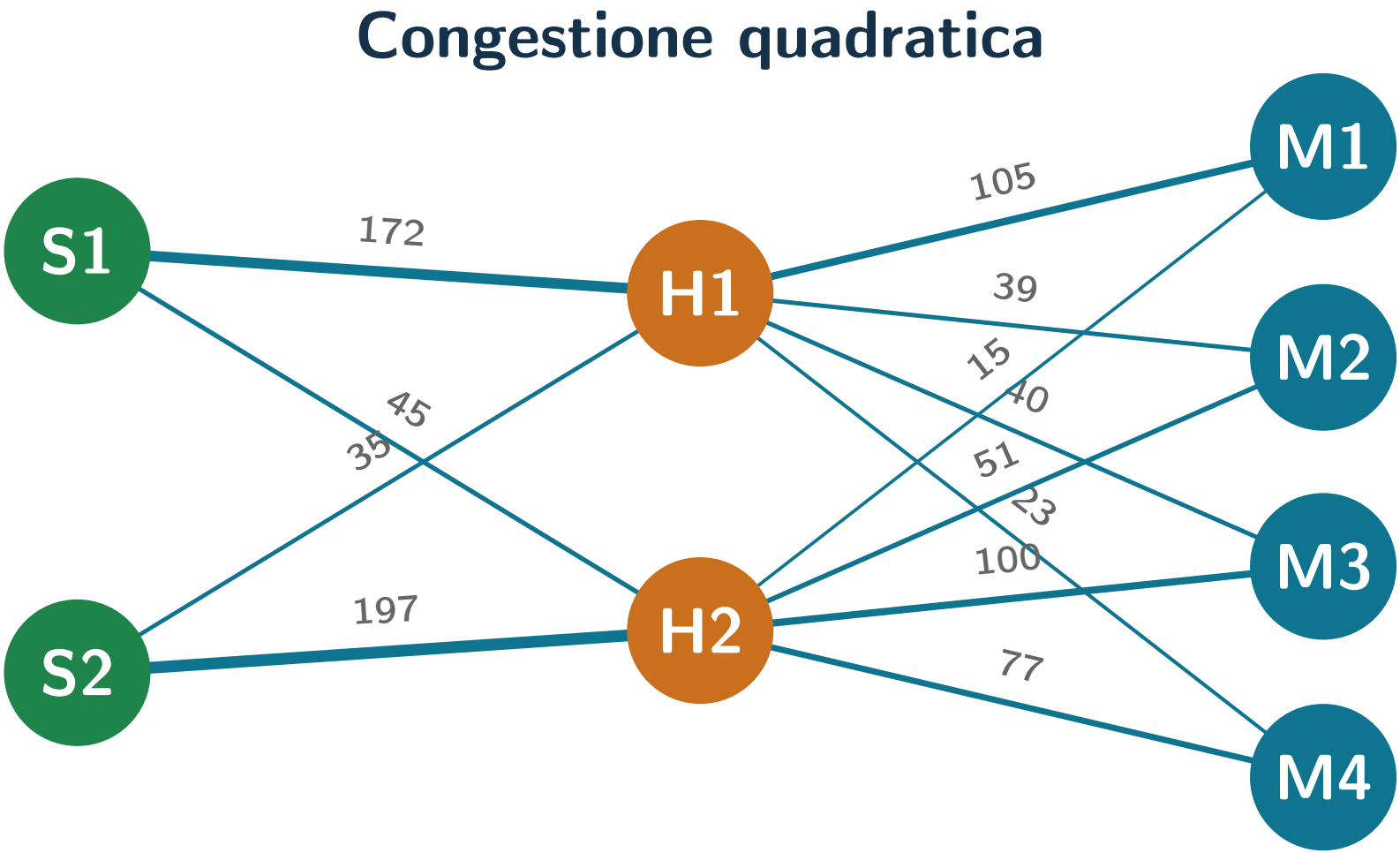
- Stabilimenti S in **verde**, hub H in **arancione**, mercati M in **teal**
- Lo spessore degli archi è proporzionale al flusso
- Il **rosso** indica un arco saturo
- Il numero sull'arco è il flusso in unità

Flussi ottimi: LP a costo minimo



L'LP a costo minimo **satura tre archi**.

Flussi ottimi: modello con congestione



La congestione quadratica ripartisce i flussi su più rotte e **non satura alcun arco**.

I prezzi ombra della domanda

- I prezzi ombra della domanda (8–10,50 €/unità) sono i **costi marginali di servizio** dei quattro mercati
- È il numero da confrontare con il margine commerciale prima di accettare nuovi ordini
- È la base corretta per un prezzo di trasferimento interno
- M4 è il mercato più caro da servire: $+31\%$ rispetto a M1

I costi ridotti degli archi non usati, con il loro range (1/2)

- Quattro archi restano a zero e il loro costo ridotto (attributo `x[a].RC`) è la loro **soglia di convenienza**
- La rotta S2 $\rightarrow$ H1 (costo 7 €/unità, `RC` $= +2$) entrerebbe nella soluzione ottima solo se il suo costo scendesse sotto

$$7 - 2 = 5 \text{ €/unità}$$

- È il numero da portare al tavolo in una trattativa con il vettore

I costi ridotti degli archi non usati, con il loro range (2/2)

- Accanto al costo ridotto citiamo il suo range di validità `SAObjLow`–`SAObjUp`
- Per una variabile a zero è [soglia, $+\infty$): il costo dell'arco può crescere quanto vuole (resta inutilizzato) e la soglia stessa è `SAObjLow`
- La rotta H1 $\rightarrow$ M4 è a un passo dall'essere usata (`RC` $= +0{,}50$): basta uno sconto di 50 centesimi
- Le variabili positive hanno tutte costo ridotto nullo

Riepilogo

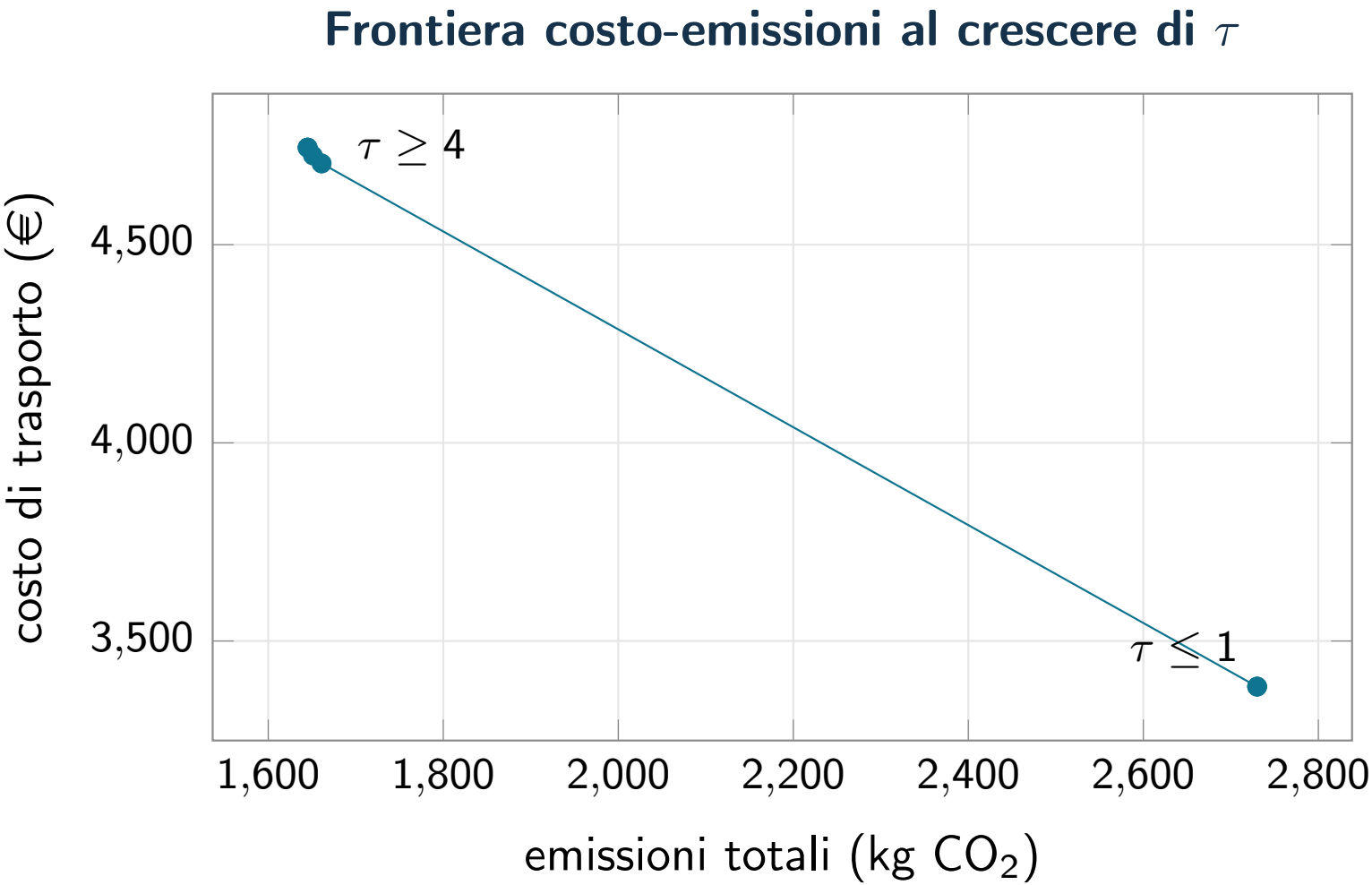
- L'LP satura tre archi; la congestione abbassa l'utilizzo massimo al 90% a un costo maggiore (+9%)
- **Prezzi ombra della domanda** = costi marginali di servizio dei mercati
- **Costi ridotti** degli archi a zero = soglie di convenienza, con range `SAObjLow`–`SAObjUp`

Analisi di sensitività: il prezzo della CO_2

Introduzione: il prezzo della CO_2

- Facciamo variare il prezzo interno della CO_2 τ e risolviamo l'LP per ogni valore
- Otteniamo la **frontiera costo-emissioni**
- Capiremo perché la frontiera procede **a salti** e perché il minimax puro è degenere

Frontiera costo-emissioni



Come leggere la frontiera

- Ogni punto è la soluzione ottima per un prezzo interno della CO_2 (τ)
- In basso a destra l'assetto "su strada" (economico, 2730 kg)
- In alto a sinistra l'assetto "su ferro" (caro, 1645 kg)
- La frontiera procede per **salti** tra vertici dell'LP

Risultati al variare di τ

τ (€/kg)	Costo (€)	Emissioni (kg)	
0,0 . . . 1,0	3385	2730	rotte su strada
1,24	4025	2173	vertice intermedio
1,26	4265	1981	
1,5	4705	1661	assetto “ferro”
4,0 e oltre	4745	1645	stabile

Perché la frontiera procede a salti (1/2)

- Le soluzioni di un LP stanno nei **vertici** del poliedro ammissibile
- Al crescere di τ l'ottimo resta fermo su un vertice, poi **salta** al successivo
- Una bisezione sul modello mostra che:
  - fino a $\tau = 1$ non cambia nulla
  - tra $\tau = 1{,}0$ e $\tau = 1{,}5$ la rete attraversa vertici intermedi (a $\tau = 1{,}24$: 2173 kg)
  - il salto principale avviene esattamente a $\tau = 1{,}25$ €/kg

Perché la frontiera procede a salti (2/2)

- Managerialmente: un prezzo interno della CO_2 **sotto la soglia** non cambia le rotte
- Appena **sopra**, ristruttura la rete in blocco
- Il modello con congestione, strettamente convesso, si sposterebbe invece **con continuità**

Attenzione al minimax

Osservazione 1: Il minimax puro è degenere

Il minimax "puro" ($\min z$) è degenere: qualunque instradamento con utilizzo $\leq z^*$ è ottimo, anche costosissimo.

In pratica si usa sempre una combinazione (costo $+\rho \cdot z$) o si vincola z e si minimizza il costo.

Riepilogo

- Variando τ si traccia la frontiera costo-emissioni: da 2730 kg (strada) a 1645 kg (ferro)
- In un LP l'ottimo **salta tra vertici**: soglia principale a $\tau = 1{,}25$ €/kg
- Un modello strettamente convesso si muove invece con continuità
- Il minimax puro è degenere: va combinato con il costo

Esercizi

Introduzione: Esercizi

- Cinque esercizi da svolgere con lo script del caso di studio
- Verificano i prezzi ombra, simulano un guasto, riproducono la soglia della CO_2 e confrontano formulazioni alternative

Esercizio: verifica

- Verificare per perturbazione il prezzo ombra della domanda di M4 (portarla a 101)
- Verificare allo stesso modo il prezzo ombra della capacità dell'arco H2→M3

Esercizio: guasto di un hub

- Ridurre del 50% le capacità degli archi entranti e uscenti da H2
- Quanto costa il guasto?
- Quali mercati soffrono di più? (Confrontare i prezzi ombra prima/dopo.)

Esercizio: soglia del ferro

- Riprodurre con una bisezione su τ la soglia $\tau = 1{,}25$ €/kg trovata nel testo
- Elencare quali archi cambiano flusso attraversandola
- Confrontare la soglia con il prezzo ETS corrente della CO_2

Esercizio: vincolo sulle emissioni

- Riformulare con il vincolo

$$\sum_{(i,j)\in A} e_{ij}\, x_{ij} \leq \bar{e}, \qquad \bar{e} = 2000 \text{ kg}$$

- Verificare che il duale del vincolo coincide con il τ "a peso" che produce le stesse emissioni

Esercizio: barriera

- Sostituire il termine di congestione con la barriera

$$\alpha \frac{x_{ij}}{u_{ij} - x_{ij}}$$

- Confrontare: quale formulazione tiene i flussi più lontani dalla saturazione?

Riepilogo

- Verifica dei prezzi ombra per perturbazione
- Analisi di scenario: guasto di un hub
- Prezzo della CO_2: bisezione su τ e approccio "a vincolo" con il suo duale
- Modelli alternativi della congestione: termine quadratico contro barriera

Riepilogo finale (1/2)

Modello:

- Flusso a costo minimo: conservazione del flusso nei nodi, capacità sugli archi
- Varianti: congestione quadratica convessa, prezzo interno della CO_2, minimax

Lettura economica:

- Prezzi ombra della domanda = costi marginali di servizio
- Costi ridotti = soglie di convenienza degli archi non usati

Riepilogo finale (2/2)

Congestione:

- Ripartisce i flussi e lascia margine di sicurezza sugli archi

Sostenibilità:

- La frontiera costo-emissioni di un LP procede a salti tra vertici
- Sotto la soglia di τ nulla cambia; sopra, la rete si ristruttura in blocco