Produzione con smoothing quadratico

Indice

Che cosa cambia

Il modello

Esempio svolto a mano

Implementazione e risultati

Analisi di sensitività

Esercizi

Obiettivi

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- aggiungere un termine quadratico convesso a un modello lineare;
- leggere i moltiplicatori di un QP e verificarli per perturbazione;
- tracciare la frontiera costo-regolarità al variare del peso.

Prerequisiti

- Dal modulo *Modellazione PL*, Capitolo 4 «Produzione e scorte multiperiodali»: il modello lineare di produzione e scorte, con i suoi dati
- Da questo modulo, Capitolo 2 «Richiami: convessità, programmazione quadratica e condizioni KKT»: i programmi quadratici convessi, le condizioni KKT e i moltiplicatori come prezzi ombra
- Da questo modulo, Capitolo 3 «Il solver per i modelli non lineari»: gli obiettivi quadratici e i moltiplicatori di un QP in `gurobipy`

Che cosa cambia

Il caso e il suo limite

- Caso, dati e modello lineare: Modellazione PL, «Produzione e scorte»
- Il piano a costo minimo cambia ritmo bruscamente: produzione totale da 219,5 a 389,0 unità, salti fino a 81,4 unità in un mese
- Ogni salto costa: straordinari, turni, fornitori da riallineare
- Classe del problema: **QP convesso**

L'idea

- Penalità **quadratica** sui salti della produzione totale
- Un salto doppio costa quattro volte tanto: meglio molti piccoli aggiustamenti
- Un solo dato nuovo: $\gamma \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$, peso dei salti (€ per unità^2)
- Con $\gamma = 0$ si ritrova il modello lineare

Il modello

Modello QP di produzione con smoothing

Modello QP di produzione con smoothing

$$\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{m}\left(c_{it}x_{it} + h_{it}s_{it}\right)$$

$$+\gamma\sum_{t=2}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}x_{it} - \sum_{i=1}^{n}x_{i,t-1}\right)^2 \qquad (4.1a)$$

$$\text{soggetto a} \quad s_{i,t-1} + x_{it} = d_{it} + s_{it}, \qquad \forall i, \forall t, \qquad (4.1b)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, x_{it} \le b_t, \qquad \forall t \in \{1,\dots,m\}, \qquad (4.1c)$$

$$x_{it} \ge 0, \qquad \forall i, \forall t, \qquad (4.1d)$$

$$s_{it} \ge 0, \qquad \forall i, \forall t. \qquad (4.1e)$$

Perché il QP è convesso

- Ogni salto $\sum_i x_{it} - \sum_i x_{i,t-1}$ è lineare nelle variabili
- Il quadrato di una funzione lineare è convesso; la somma con pesi $\gamma \geq 0$ resta convessa
- Vincoli lineari $\Rightarrow$ ogni minimo locale è globale
- Le KKT sono necessarie e sufficienti: i moltiplicatori si leggono come nei modelli lineari, ma solo **al margine**

Esempio svolto a mano

Un prodotto, due mesi

Istanza

$d_1 = 60$, $d_2 = 100$, $c = 10$, $h = 1$, scorta iniziale nulla, capacità abbondante

Modello lineare: $x = (60, 100)$, costo 1600, salto 40

- Passo 1, con $\gamma = 0{,}5$: $\tilde{x} = (79{,}75;\ 80{,}25)$, $\tilde{s}_1 = 19{,}75$, $\tilde{z} = 1619{,}875$, $\tilde{\pi} = (9{,}5;\ 10{,}5)$
- Passo 2: $x_1 = 60 + s_1$, $x_2 = 100 - s_1 \Rightarrow$ $f(s_1) = 1600 + s_1 + \gamma(40 - 2s_1)^2$

Stazionarietà, soglia e moltiplicatori

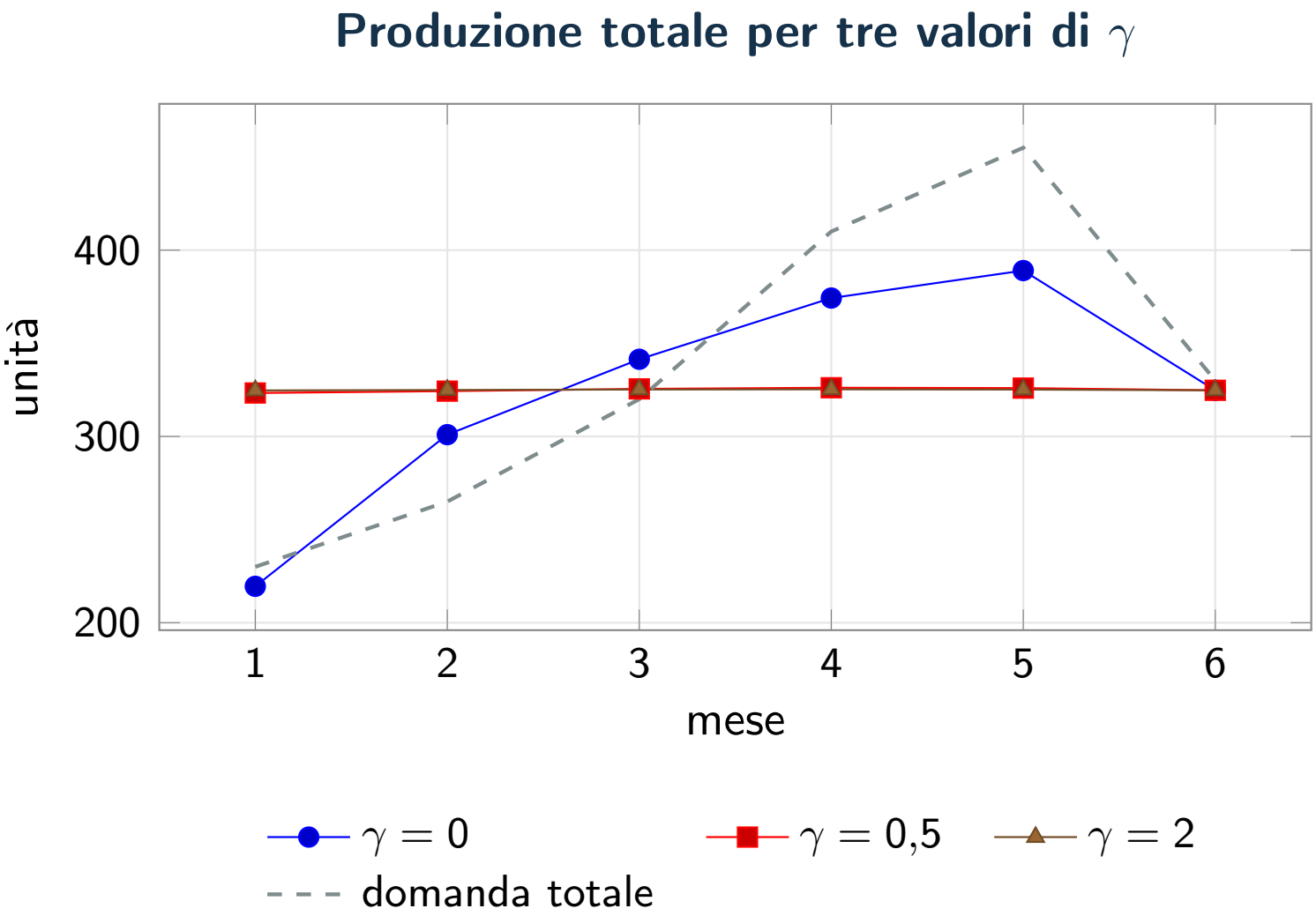
- Passo 3: $f'(s_1) = 1 - 4\gamma(40 - 2s_1) = 0 \Rightarrow$ $s_1 = 20 - 1/(8\gamma) = 19{,}75$
- Passo 4: $f'(0) = 1 - 160\gamma \Rightarrow$ scorta solo se $\gamma > 1/160$; con $\gamma = 0{,}004$: $\tilde{s}_1 = 0$, $\tilde{z} = 1606{,}4$
- Passo 5: con scorta positiva $\tilde{\pi}_2 - \tilde{\pi}_1 = h = 1$; con $\gamma = 0{,}004$ la differenza è $0{,}64 < h$

Implementazione e risultati

Cambia solo l'obiettivo

```
tot = {t: gp.quicksum(x[i, t] for i in prodotti)
       for t in mesi}
salti = gp.quicksum((tot[t] - tot[t-1])**2
                    for t in mesi[1:])
m.setObjective(costo + gamma * salti, GRB.MINIMIZE)
m.optimize()
pi = [v_cap[t].Pi for t in mesi]
```

Tre valori di γ



Il costo della regolarità

```
gamma = 0,0: costo lineare 32.889,33  salto max 81,4
gamma = 0,5: costo lineare 33.000,96  salto max  1,2
gamma = 2,0: costo lineare 33.004,14  salto max  0,4
```

- Piano quasi piatto (circa 325 unità al mese) per 111,63 € in più (+0,34%)
- A scorta va soprattutto il prodotto 1 (fino a 212,6 unità): la penalità conta le **unità**, non le ore

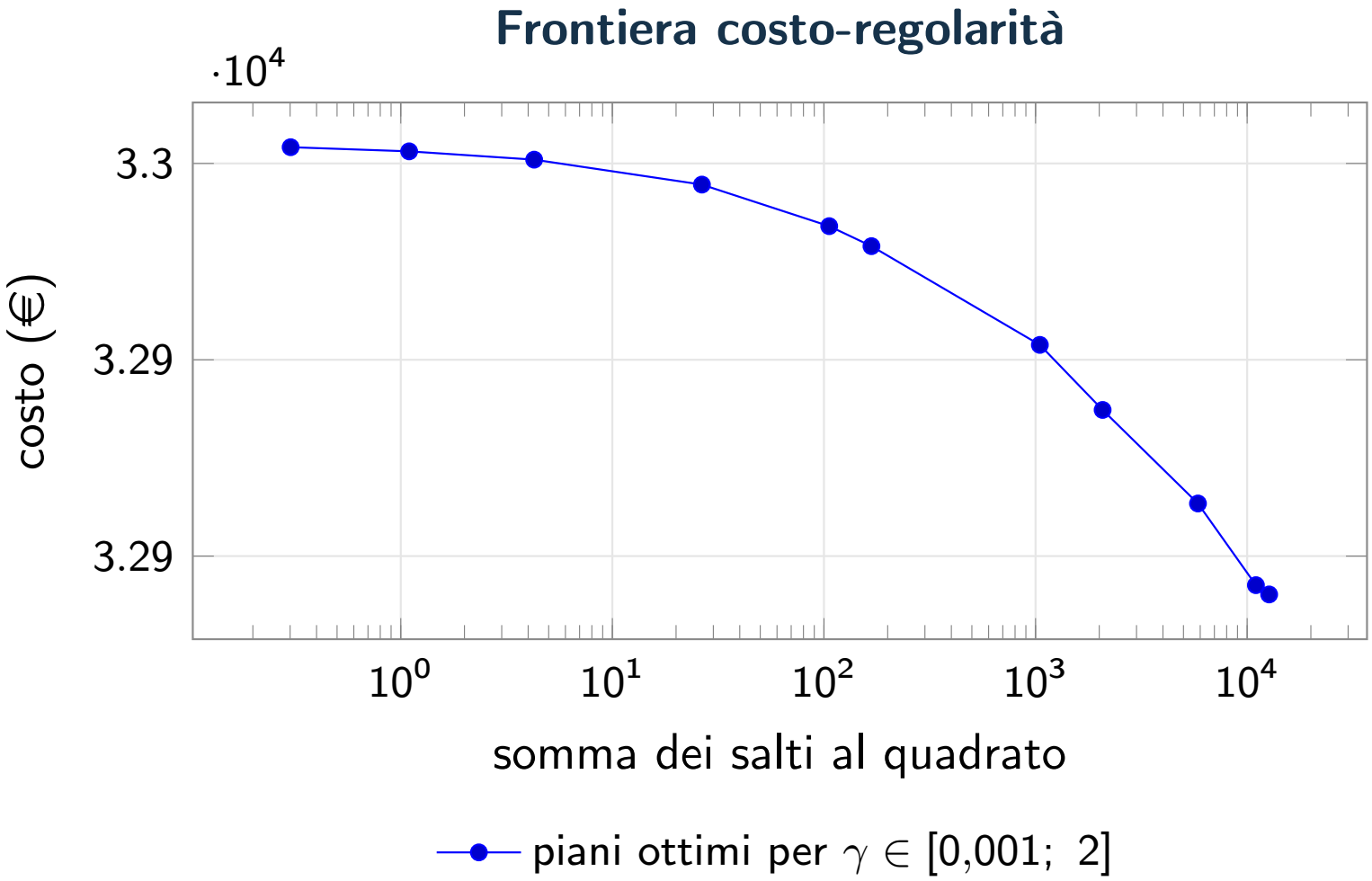
Analisi di sensitività

Moltiplicatori della capacità

```
mese 4: Pi(gamma=0) = -2,286   Pi(gamma=0,5) = -0,667
mese 5: Pi(gamma=0) = -3,048   Pi(gamma=0,5) = -1,333
mese 6: Pi(gamma=0) = -3,810   Pi(gamma=0,5) = -3,134
+1    ora nel mese 6 -> rapporto incrementale -3,060
+0,01 ore nel mese 6 -> rapporto incrementale -3,133
```

- Il moltiplicatore di un QP è esatto solo **al margine**: il valore ottimo ha curvatura
- Con lo smoothing la capacità dei mesi 1–3 non è più attiva

La frontiera costo-regolarità



- Con $\gamma = 0{,}01$ la somma dei salti al quadrato scende da 13.699 a 2.075 per 48 €

Esercizi

Esercizi

1. **A mano**: esempio con $\gamma = 0{,}05$, calcolare s_1, x, valore e moltiplicatori
2. **Verifica**: moltiplicatore della capacità del mese 5 con incrementi di 1 e 0,01 ore
3. **Smoothing per prodotto**: $\gamma \sum_i \sum_t (x_{it} - x_{i,t-1})^2$, $\gamma = 0{,}5$
4. **Smoothing lineare**: valore assoluto dei salti come LP, $\gamma = 5$
5. **Livello obiettivo**: $\gamma \sum_t (v_t - 325)^2$, $\gamma = 0{,}5$

Riepilogo

- Un termine quadratico convesso aggiunto a un LP dà un QP convesso
- Il peso γ traccia la frontiera costo-regolarità: i primi passi costano poco
- I moltiplicatori del QP si leggono con `Pi`, ma valgono al margine
- Un termine nuovo può cambiare la struttura della soluzione