Il solver per i modelli non lineari

Indice

I comandi per i modelli non lineari

Obiettivi (1/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- scrivere funzioni non lineari con vincoli funzionali $y = f(x)$ e rapporti con vincoli bilineari;
- scegliere tolleranze e riformulazioni che diano un buon scaling;

Obiettivi (2/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- leggere i moltiplicatori di un QP convesso con `Pi`;
- stimare un prezzo ombra per perturbazione quando il solver non dà i duali.

Prerequisiti

- Dal modulo *Modellazione PL*, Capitolo 3 «Il solver: costruire, risolvere, interpretare»: i comandi generali di `gurobipy`: costruire, risolvere, leggere la soluzione
- Da questo modulo, Capitolo 2 «Richiami: convessità, programmazione quadratica e condizioni KKT»: i QP convessi e i moltiplicatori KKT

I comandi per i modelli non lineari

Introduzione: I comandi per i modelli non lineari

- Un solver solo per tutto il laboratorio
- Gurobi copre nativamente LP e QP (anche non convessi, con `m.Params.NonConvex = 2`)
- Dalla versione 12 risolve *globalmente* anche i modelli con funzioni non lineari generali
- Vediamo come si scrivono questi modelli, come si gestiscono tolleranze e scalatura, e cosa fare quando i duali non ci sono

Vincoli funzionali e termini bilineari

- Le funzioni non lineari — logaritmi, esponenziali, potenze — entrano nel modello tramite i **vincoli funzionali**
- Si introduce una variabile ausiliaria y e si impone $y = f(x)$
- I rapporti come $1/(\mu - \lambda)$ si riformulano invece con una variabile ausiliaria e un **vincolo bilineare**:

$$w\,(\mu - \lambda) = 1$$

Vincoli funzionali e termini bilineari: il codice

```
# funzioni trattate in modo esatto (globale)
m.Params.FuncNonlinear = 1
z = m.addVar(lb=-GRB.INFINITY)
# z = log(g);  anche Exp, Pow, Sin, ...
m.addGenConstrLog(g, z)
# termini bilineari: servono NonConvex = 2
m.addQConstr(w * v == 1)
```

Tolleranze e scalatura

Due accorgimenti pratici, entrambi usati negli script della dispensa:

- **Tolleranze**: per analisi marginali accurate (differenze tra due ottimi vicini) stringere `MIPGap`, `FeasibilityTol` e `OptimalityTol` a 10^{-9}
- **Scalatura**: riformulare per evitare quantità minuscole — ad esempio

$$q \leq A\, p^{-\varepsilon} \quad \text{si scrive} \quad q \cdot r \leq A \text{ con } r = p^{\varepsilon}$$

che tiene i numeri in un range sano

Quando i duali non ci sono

- Per i modelli con vincoli funzionali o bilineari il solver **non fornisce i duali**
- Prezzi ombra e moltiplicatori si stimano *per perturbazione*:
  1. aumentare il termine noto di ε
  2. riottimizzare
  3. calcolare il rapporto incrementale
- È lo stesso protocollo del capitolo di richiami

Perché un solver solo

- Stessa sintassi, stessa checklist di interpretazione
- Soprattutto: ottimo *globale certificato* anche nei problemi non convessi
- Con un solver locale ogni risultato andrebbe accompagnato dalla domanda "è solo un ottimo locale?"
- I problemi convessi con sola struttura quadratica o conica (vincoli come $d_x^2 + d_y^2 \leq d^2$) non richiedono nulla di speciale

Esercizio: moltiplicatore per perturbazione

- Implementare il QP min $x_1^2 + 2x_2^2$ con $x_1 + x_2 \geq 6$
- Stampare `Pi` e `Slack` del vincolo
- Verificare il moltiplicatore ri-ottimizzando con termine noto 6,01

Soluzione

- Il solver dà $\tilde{x} = (4, 2)$, valore 24, `Pi` $= 8$, `Slack` $= 0$
- Con termine noto 6,01 il valore è 24,080067: rapporto incrementale 8,0067
- Da $\tilde{f}(d) = \frac{2}{3}d^2$: la differenza con 8 è la curvatura, che sparisce al margine

Esercizio: un vincolo funzionale

- Risolvere con i vincoli funzionali di Gurobi il problema in una variabile

$$\max\ 5\log(1+x) - x, \qquad x \in [0, 10]$$

- Confrontare con la soluzione analitica:

$$\frac{5}{1+x} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

Soluzione

- Variabili: $x \in [0, 10]$, $g = 1 + x$ e z libera, con il vincolo funzionale $z = \log(g)$ (`addGenConstrLog`)
- Obiettivo lineare nelle nuove variabili: $\max\ 5z - x$
- Il solver restituisce $x = 4$ e valore ottimo $5 \log 5 - 4 \approx 4.047$, come la soluzione analitica

Riepilogo

Modelli non lineari:

- Funzioni non lineari tramite vincoli funzionali $y = f(x)$; rapporti tramite vincoli bilineari (`NonConvex = 2`)
- Tolleranze strette per le analisi marginali; riformulare per una buona scalatura

Duali e solver:

- Senza duali, i prezzi ombra si stimano per perturbazione
- Un solver solo: stessa sintassi e ottimo globale certificato

Riepilogo finale

- **Comandi generali**: in Modellazione PL
- **Non lineare**: vincoli funzionali e bilineari, tolleranze e scalatura
- **Moltiplicatori**: `Pi` nei QP convessi, esatto al margine; altrimenti per perturbazione