Richiami: programmazione lineare, quadratica e non lineare

Indice

Teoria dell'ottimizzazione non lineare
- Convessità e programmazione quadratica
- Le condizioni di ottimalità: le condizioni KKT

Esercizi

Obiettivi (1/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- riconoscere un problema convesso e usare il fatto che ogni minimo locale è globale;
- decidere dalla matrice $\boldsymbol{Q}$ se un QP è convesso;

Obiettivi (2/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- scrivere le condizioni KKT di un problema e usarle per verificare una soluzione;
- leggere i moltiplicatori come prezzi ombra e stimarli per perturbazione.

Prerequisiti

- Dal modulo *Ottimizzazione convessa*, Capitolo 3 «Funzioni convesse e concave»: funzioni convesse e concave e la loro caratterizzazione al secondo ordine
- Dal modulo *Ottimizzazione convessa*, Capitolo 4 «Funzioni quadratiche»: le funzioni quadratiche e le matrici semidefinite positive
- Dal modulo *Modellazione PL*, Capitolo 2 «Richiami: programmazione lineare e analisi di sensitività»: la dualità della PL, gli scarti complementari e i prezzi ombra

Di che cosa parliamo

- Raccogliamo gli **strumenti teorici** del corso: convessità, programmazione quadratica, condizioni KKT
- Teoria della programmazione lineare e protocollo di sensitività: Modellazione PL
- Insiemi e funzioni convesse: Ottimizzazione convessa

Teoria dell'ottimizzazione non lineare

Introduzione: Ottimizzazione non lineare

- Estendiamo gli strumenti dell'LP ai problemi **quadratici** e **non lineari**
- La **convessità** è la proprietà che permette di certificare l'ottimo
- Le **condizioni KKT** generalizzano gli scarti complementari
- I moltiplicatori KKT generalizzano i prezzi ombra: avremo ancora una lettura economica

Problemi convessi

- Un problema $\min f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ su un insieme ammissibile X è **convesso** se
  - f è convessa
  - X è convesso

- Vediamo la proprietà che useremo di continuo

Perché la convessità conta

- In un problema convesso ogni minimo locale è globale: l'ottimalità si può *certificare*
- Nei problemi non convessi (ad esempio un problema di pricing con termine bilineare $p \cdot q$) un metodo locale garantisce solo un ottimo locale
- I QP non convessi si risolvono comunque all'ottimo globale con tecniche apposite, ma il costo computazionale cresce

La programmazione quadratica

- Un **QP** ha obiettivo

$$\frac{1}{2}\sum_i \sum_j q_{ij}\, x_i x_j + \sum_j c_j x_j$$

  e vincoli lineari
- È convesso se e solo se la matrice $\boldsymbol{Q} = (q_{ij})$ è semidefinita positiva ($\boldsymbol{Q} \succeq 0$)
- Nel corso i QP compaiono ogni volta che un costo o un rischio cresce più che linearmente con la decisione

Esempio: un QP 2×2 (1/3)

Un QP di minimo con obiettivo quadratico separabile (la seconda variabile "costa" il doppio della prima, al margine) e un vincolo di soglia sulla somma:

$$\begin{array}{rll} \min & x_1^2 + 2\,x_2^2 & \\ \text{soggetto a} & x_1 + x_2 & \geq 6 \\ & x_1, \quad x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Qui $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \succ 0$: il QP è convesso e l'ottimo trovato è globale.

Esempio: un QP 2×2 (2/3)

Passo 1 — risolvendo si ottiene:

$$\tilde{x}_1 = 4, \qquad \tilde{x}_2 = 2, \qquad \tilde{f} = 24, \qquad \lambda = 8$$

Passo 2 — verifica del prezzo ombra.

- Il vincolo è attivo ($4 + 2 = 6$): l'obiettivo cresce con le variabili, quindi la somma non supera il necessario
- Le derivate parziali coincidono:

$$2\tilde{x}_1 = 8 = 4\tilde{x}_2 = \lambda \quad \checkmark$$

- Se fossero diverse converrebbe spostare quantità dall'una all'altra variabile; la derivata comune è proprio il moltiplicatore

Esempio: un QP 2×2 (3/3)

Passo 3 — verifica per perturbazione.

Con termine noto 7 si ottiene $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = (14/3,\ 7/3)$ con

$$\tilde{f} = 32{,}67 \approx 24 + 8$$

- In più c'è il termine di curvatura
- Qui il prezzo ombra è esatto solo al margine, non per incrementi finiti

La Lagrangiana

- Le condizioni di ottimalità dei problemi non lineari vincolati prendono il nome di **condizioni KKT** (da Karush, Kuhn e Tucker)
- Problema: $\min f(x_1, \ldots, x_n)$ soggetto a
  - $g_i(x_1, \ldots, x_n) \leq 0$ per ogni $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$
  - $h_j(x_1, \ldots, x_n) = 0$ per ogni $j \in \{1, 2, \ldots, q\}$
- La **Lagrangiana** è

$$L = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, g_i(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{q} \nu_j \, h_j(x_1, \ldots, x_n), \quad \lambda_i \geq 0$$

Le condizioni KKT

Condizioni KKT

In un punto di ottimo regolare $(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$ esistono moltiplicatori $\lambda_i \geq 0$ e ν_j tali che

$$\frac{\partial L}{\partial x_k}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) = 0 \quad \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \text{(stazionarietà)},$$

$$\lambda_i \, g_i(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\} \quad \text{(complementarietà)}.$$

Se il problema è convesso, le KKT sono anche *sufficienti*: un punto che le soddisfa è un ottimo globale.

Le KKT sono gli scarti complementari, generalizzati

- Le due parti del capitolo sono speculari: per un LP le KKT si riducono *esattamente* agli scarti complementari
- La stazionarietà della Lagrangiana equivale all'ammissibilità del duale:
  - i moltiplicatori λ_i sono le variabili duali π_i
  - i moltiplicatori dei vincoli di segno sono i costi ridotti
- La complementarietà $\lambda_i \, g_i(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) = 0$ è lo scarto complementare $\bar{\pi}_i \cdot \bar{s}_i = 0$
- Gli scarti complementari sono le KKT nel caso lineare

Esempio: le KKT sul QP (1/3)

Riprendiamo il QP appena risolto: min $x_1^2 + 2x_2^2$ soggetto a $x_1 + x_2 \geq 6$, $x_1, x_2 \geq 0$.

Passo 1. Il vincolo in forma standard: $g(x_1, x_2) = 6 - x_1 - x_2 \leq 0$

Passo 2. Stazionarietà della Lagrangiana $L = x_1^2 + 2x_2^2 + \lambda(6 - x_1 - x_2)$:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial x_2} = 4x_2 - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{\lambda}{2},\ x_2 = \frac{\lambda}{4}$$

(i vincoli $x_1, x_2 \geq 0$ risulteranno non attivi: i loro moltiplicatori sono nulli per complementarietà)

Esempio: le KKT sul QP (2/3)

Passo 3. Complementarietà:

- se il vincolo di soglia fosse inattivo ($\lambda = 0$) avremmo $x_1 = x_2 = 0$, che viola $x_1 + x_2 \geq 6$: impossibile
- quindi il vincolo è attivo:

$$\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = 6 \;\Rightarrow\; \lambda = 8, \quad \tilde{x}_1 = 4, \quad \tilde{x}_2 = 2, \quad \tilde{f} = 24$$

- gli stessi numeri trovati per via elementare, ora ottenuti con la procedura generale

Esempio: le KKT sul QP (3/3)

Passo 4. Lettura del moltiplicatore:

- con termine noto $6 + \varepsilon$ il valore ottimo cresce di circa $\lambda\varepsilon = 8\varepsilon$
- verifica: con termine noto d la soluzione è $\tilde{x}_1 = 2d/3$, $\tilde{x}_2 = d/3$, quindi

$$\tilde{f}(d) = \tfrac{2}{3}d^2 \;\Rightarrow\; \tilde{f}(6+\varepsilon) = 24 + 8\varepsilon + \tfrac{2}{3}\varepsilon^2 \quad \checkmark$$

Moltiplicatori e prezzi ombra

- I moltiplicatori KKT generalizzano i prezzi ombra dell'LP: misurano la variazione marginale del valore ottimo rispetto al termine noto del vincolo
- Quando i duali non sono disponibili (modelli non lineari generali) stimiamo il moltiplicatore *per perturbazione*:
  - si aumenta il termine noto di ε
  - si riottimizza
  - si calcola il rapporto incrementale
- Questa verifica numerica è essa stessa un esercizio ricorrente

Riepilogo: Ottimizzazione non lineare

Convessità:

- In un problema convesso ogni minimo locale è globale
- Un QP è convesso se e solo se $\boldsymbol{Q} \succeq 0$

Condizioni KKT:

- Stazionarietà della Lagrangiana e complementarietà
- Sufficienti nei problemi convessi
- Nel caso lineare sono gli scarti complementari
- I moltiplicatori sono prezzi ombra; si stimano anche per perturbazione

Esercizio: KKT

Risolvere con le KKT:

$$\min (x-3)^2 + (y-1)^2 \quad \text{soggetto a} \quad x + 2y \leq 2, \quad x, y \geq 0$$

- Dire quali vincoli sono attivi all'ottimo
- Interpretare i moltiplicatori

Soluzione (1/2)

- Il punto $(3, 1)$ non è ammissibile; la sua proiezione sulla retta $x + 2y = 2$ è (2,4; −0,2), con $y < 0$: anche $y \geq 0$ sarà attivo
- Candidato: $x + 2y = 2$, $y = 0 \Rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}) = (2, 0)$, $\tilde{f} = 1 + 1 = 2$
- Lagrangiana: $L = (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + \lambda\,(x + 2y - 2) - \mu\, y$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2(x - 3) + \lambda = -2 + \lambda = 0 \qquad \Rightarrow \ \lambda = 2$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2(y - 1) + 2\lambda - \mu = -2 + 4 - \mu = 0 \qquad \Rightarrow \ \mu = 2$$

Soluzione (2/2)

- $\lambda = 2 \geq 0$, $\mu = 2 \geq 0$; il vincolo $x \geq 0$ non è attivo ($\tilde{x} = 2$) e ha moltiplicatore nullo: le KKT valgono
- Il problema è convesso: $(2, 0)$ è l'ottimo globale
- Attivi: $x + 2y \leq 2$ e $y \geq 0$
- $\lambda = 2$: allentando il vincolo a $x + 2y \leq 2 + \varepsilon$ il valore ottimo scende di circa 2ε
- $\mu = 2$: se si permettesse $y \geq -\varepsilon$ il valore ottimo scenderebbe di circa 2ε

Esercizio: convessità

Per quali valori del parametro γ la funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + \gamma x_1 x_2 + x_2^2$$

è convessa?

(Scrivere $\boldsymbol{Q}$ e imporre $\boldsymbol{Q} \succeq 0$.)

Soluzione

- Con $f = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j q_{ij}\, x_i x_j$:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 2 & \gamma \\ \gamma & 2 \end{pmatrix}$$

- Una matrice 2×2 simmetrica è semidefinita positiva se e solo se gli elementi diagonali e il determinante sono non negativi:

$$2 \geq 0, \qquad \det \boldsymbol{Q} = 4 - \gamma^2 \geq 0$$

- Quindi f è convessa se e solo se $-2 \leq \gamma \leq 2$

Riepilogo finale (1/2)

Ottimizzazione non lineare:

- Convessità: ogni minimo locale è globale
- QP convesso se e solo se $\boldsymbol{Q} \succeq 0$
- Condizioni KKT: gli scarti complementari generalizzati

Riepilogo finale (2/2)

In laboratorio:

- I moltiplicatori si verificano per perturbazione, con un incremento piccolo
- Nei problemi convessi le KKT certificano l'ottimo globale