Arbitraggio e prezzatura senza arbitraggio

Indice

Motivazione gestionale

Costruzione guidata del modello

La dualità è la prezzatura: le probabilità neutrali al rischio

Esempio svolto a mano

Caso di studio

Risultati

Analisi di sensitività: l'intervallo dei prezzi coerenti

Esercizi

Obiettivi (1/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- formulare la ricerca di un arbitraggio come LP;
- leggere le probabilità neutrali al rischio nei duali dei vincoli;

Obiettivi (2/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- calcolare l'intervallo dei prezzi coerenti di un titolo;
- prezzare un titolo nuovo (un'opzione) in un mercato completo o incompleto.

Prerequisiti

- Da questo modulo, Capitolo 2 «Richiami: programmazione lineare e analisi di sensitività»: la dualità, gli scarti complementari e la dualità forte
- Da questo modulo, Capitolo 3 «Il solver: costruire, risolvere, interpretare»: le variabili libere in `gurobipy` e la lettura di `Pi`

Motivazione gestionale

Introduzione: Motivazione gestionale

- In questa sezione spieghiamo che cos'è un **arbitraggio**
- Vediamo perché l'assenza di arbitraggio è l'ipotesi di lavoro della finanza dei prezzi
- Anticipiamo la sorpresa del capitolo: tutto questo è **programmazione lineare**

Che cos'è un arbitraggio

- Un **arbitraggio** è una strategia di compravendita che crea denaro dal nulla:
  - incassa oggi senza alcun rischio di perdita domani, oppure
  - non costa nulla oggi e può solo guadagnare domani
- In un mercato ben funzionante queste occasioni non possono durare: chiunque le sfrutterebbe su scala illimitata, e i prezzi si aggiusterebbero subito

L'ipotesi di assenza di arbitraggio

"Assenza di arbitraggio" è l'ipotesi di lavoro di tutta la finanza dei prezzi:

- dei desk di trading che cercano incoerenze tra strumenti quotati
- dei risk manager che validano i prezzi di listino
- di chi deve dare un prezzo a un titolo nuovo coerente con quelli esistenti

La sorpresa didattica

- Tutto questo è **programmazione lineare**: rilevare un arbitraggio è risolvere un LP
- La dualità (prezzi ombra, scarti complementari, dualità forte) diventa la **teoria della prezzatura**
- È l'applicazione più pulita della coppia primale-duale di tutta la dispensa

Riepilogo

- Un arbitraggio crea denaro dal nulla, senza rischio
- In un mercato ben funzionante non dura: l'assenza di arbitraggio è l'ipotesi di base della prezzatura
- Rilevare un arbitraggio è un LP; la sua dualità è la teoria dei prezzi

Costruzione guidata del modello

Introduzione: Costruzione guidata del modello

- Descriviamo il mercato a due istanti e gli stati del mondo
- Introduciamo dati e variabili e scriviamo il **modello LP di ricerca dell'arbitraggio**
- Impariamo a leggere l'esito dell'LP: arbitraggio di **tipo A**, di **tipo B** o prezzi coerenti

Il problema a parole (1/2)

- Il mercato ha due istanti:
  - **oggi** ($t = 0$): compriamo o vendiamo titoli ai prezzi correnti
  - **domani** ($t = 1$): si realizza uno tra m *stati del mondo* e ogni titolo paga un importo noto che dipende dallo stato
- *Decidiamo* le quantità di ciascun titolo in portafoglio: positive se comprate, negative se vendute allo scoperto

Il problema a parole (2/2)

- *L'obiettivo* è minimizzare il **costo del portafoglio oggi**
- *I vincoli* impongono che domani, in *ogni* stato del mondo, il portafoglio non perda
- Se con queste regole si riesce a spendere meno di zero (cioè a incassare), quello è un **arbitraggio**

Dati (input del modello) (1/2)

Simbolo	Tipo	Significato
n	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero di titoli rischiosi; i titoli sono numerati $0, 1, \ldots, n$ e il titolo 0 è privo di rischio
m	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero di stati del mondo a $t = 1$
r	$\in \mathbb{Q}_{\geq 0}$	tasso privo di rischio; $R = 1 + r$ è il rendimento lordo del titolo 0, uguale in ogni stato

Dati (input del modello) (2/2)

Simbolo	Tipo	Significato
s_i^0	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	prezzo del titolo i oggi ($s_0^0 = 1$: il titolo 0 costa 1 e paga R)
s_{ij}^1	$\in \mathbb{Q}_{\geq 0}$	payoff del titolo i nello stato j ($s_{0j}^1 = R$ per ogni stato j)

Variabili decisionali

Introduciamo una variabile libera per ciascuno degli $n+1$ titoli:

$$x_i = \text{quantità del titolo } i \text{ in portafoglio}, \qquad \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

- $x_i > 0$: acquisto
- $x_i < 0$: vendita allo scoperto

Modello LP di ricerca dell'arbitraggio

Modello LP di ricerca dell'arbitraggio

$$\min \quad \sum_{i=0}^{n} s_i^0 \, x_i \tag{9.1a}$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{i=0}^{n} s_{ij}^1 \, x_i \geq 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}, \tag{9.1b}$$

$$x_i \gtreqless 0, \quad \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}. \tag{9.1c}$$

Descrizione del modello

- **Funzione obiettivo:** minimizza il costo del portafoglio oggi; un valore negativo è un incasso immediato
- **Vincoli di stato:** domani il portafoglio non perde in nessuno degli m stati del mondo (m vincoli lineari)
- **Variabili libere:** si può comprare e vendere allo scoperto ($n + 1$ variabili)

Leggere l'esito: tipo A, tipo B, normalizzazione (1/2)

- Il portafoglio nullo è sempre ammissibile, quindi l'ottimo è sempre ≤ 0. Tre esiti possibili
- **Ottimo** < 0 (*arbitraggio di tipo A*): si incassa oggi senza rischi domani
- I vincoli sono omogenei: la strategia si può scalare a piacere e il modello è *illimitato*
- Per un certificato finito si aggiunge la *normalizzazione* $\sum_{i=0}^{n} s_i^0 x_i \geq -1$ ("incasso oggi al più 1"): l'ottimo diventa -1 e la soluzione è una strategia concreta

Leggere l'esito: tipo A, tipo B, normalizzazione (2/2)

- **Ottimo $= 0$ con qualche vincolo di stato lasco in ogni soluzione ottima** (*arbitraggio di tipo B*): oggi non costa nulla, domani non si perde mai e in almeno uno stato si guadagna
- **Ottimo $= 0$ e all'ottimo tutti i vincoli attivi**: nessun arbitraggio, i prezzi sono *coerenti*

Riepilogo

- Variabili libere x_i (posizioni), obiettivo: costo oggi, vincoli: payoff ≥ 0 in ogni stato
- Ottimo < 0: arbitraggio di tipo A (LP illimitato, si normalizza con costo ≥ -1)
- Ottimo $= 0$ con un vincolo di stato sempre lasco: arbitraggio di tipo B
- Ottimo $= 0$ con tutti i vincoli attivi: prezzi coerenti

La dualità è la prezzatura

Introduzione: la dualità è la prezzatura

- Scriviamo il **duale** del modello di ricerca dell'arbitraggio
- Le variabili duali diventano **probabilità neutrali al rischio**: il prezzo di oggi è un valore atteso scontato
- Arriviamo al **teorema fondamentale della prezzatura** e lo dimostriamo con la dualità

Dal primale al duale

Applichiamo le regole della dualità (primale di minimo: tabella da destra a sinistra):

- ogni vincolo di stato, di verso $\geq$, genera una variabile duale $p_j \geq 0$
- ogni variabile libera x_i genera un vincolo duale di uguaglianza
- i termini noti (tutti nulli) diventano l'obiettivo del duale

Il duale: misure di prezzatura

Il duale: misure di prezzatura

$$\max \quad \sum_{j=1}^{m} 0 \cdot p_j \tag{9.2a}$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{j=1}^{m} s_{ij}^{1} \, p_j = s_i^0, \quad \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}, \tag{9.2b}$$

$$p_j \geq 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}. \tag{9.2c}$$

Descrizione del duale

- **Obiettivo** identicamente nullo: del duale conta solo l'*ammissibilità* (ogni soluzione ammissibile è ottima)
- **Vincoli di prezzo:** il prezzo di oggi di ogni titolo è la somma dei suoi payoff pesati con i p_j; i duali *prezzano* i titoli ($n+1$ vincoli lineari)
- **Ultimi vincoli:** definiscono le variabili (m variabili non negative)

Le probabilità neutrali al rischio

- Il vincolo duale del titolo 0 dà $\sum_{j=1}^{m} R\, p_j = 1$, cioè $\sum_{j=1}^{m} p_j = 1/R$
- I numeri $q_j = R\, p_j$ sono non negativi e sommano a 1: sono *probabilità*, dette **neutrali al rischio**
- Con esse i vincoli di prezzo si leggono:

$$s_i^0 = \frac{1}{R} \sum_{j=1}^{m} q_j\, s_{ij}^1, \qquad \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

- *Il prezzo di oggi è il valore atteso scontato dei payoff di domani*, sotto le probabilità q

Teorema fondamentale della prezzatura

Teorema fondamentale della prezzatura

Non esiste alcun arbitraggio (di tipo A né di tipo B) *se e solo se* esiste una misura di probabilità neutrale al rischio con $q_j > 0$ per ogni $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Perché è vero: dualità forte e scarti complementari (1/2)

- Se non c'è arbitraggio di tipo A, l'ottimo del primale è 0
- Per la *dualità forte* il duale è ammissibile: una misura di prezzatura $p \geq 0$ esiste
- Se non c'è nemmeno arbitraggio di tipo B, tutti i vincoli di stato sono attivi all'ottimo
- Per gli *scarti complementari* esiste una soluzione duale con $p_j > 0$ per ogni stato: moltiplicando per R si ottengono le $q_j > 0$

Perché è vero: dualità forte e scarti complementari (2/2)

Viceversa, se esiste $q > 0$, ogni strategia con payoff non negativi ha costo

$$\sum_i s_i^0 x_i = \frac{1}{R} \sum_j q_j \left(\sum_i s_{ij}^1 x_i \right) \geq 0$$

quindi non esiste alcun arbitraggio.

Riepilogo

- Il duale ha obiettivo nullo: conta solo che sia ammissibile
- Le variabili duali p_j, moltiplicate per R, sono probabilità neutrali al rischio q_j
- Prezzo di oggi $=$ valore atteso scontato dei payoff sotto q
- Nessun arbitraggio $\iff$ esiste q con $q_j > 0$ per ogni stato

Esempio svolto a mano

Introduzione: Esempio svolto a mano

- Costruiamo a mano un arbitraggio in un mercato con **tre stati**
- Verifichiamo che non comporta rischi domani
- Vediamo perché, senza normalizzazione, il modello è **illimitato**

Esempio: tre stati, un arbitraggio evidente (1/3)

- Mercato con $m = 3$ stati, $r = 4\%$ ($R = 1{,}04$)
- Due titoli rischiosi con payoff

$$s^1_{1\cdot} = (10, 15, 13), \qquad s^1_{2\cdot} = (30, 15, 25)$$

- Prezzi di oggi: $s^0_1 = 6$ e $s^0_2 = 20$

Esempio: tre stati, un arbitraggio evidente (2/3)

Passo 1: una strategia candidata.

- Compriamo un'unità di ciascun titolo rischioso ($x_1 = x_2 = 1$, spesa 26)
- Vendiamo allo scoperto il titolo privo di rischio per 27 ($x_0 = -27$)
- Costo oggi:

$$1 \cdot (-27) + 6 \cdot 1 + 20 \cdot 1 = -1 :$$

incassiamo 1

Esempio: tre stati, un arbitraggio evidente (3/3)

Passo 2: nessun rischio domani. Nei tre stati il portafoglio paga

$$-27 \cdot 1{,}04 + 10 + 30 = 11{,}92$$
$$-27 \cdot 1{,}04 + 15 + 15 = 1{,}92$$
$$-27 \cdot 1{,}04 + 13 + 25 = 9{,}92$$

tutti ≥ 0: è un arbitraggio di tipo A.

Passo 3: perché il modello è illimitato. Raddoppiando la strategia si incassano 2 oggi con payoff ancora ≥ 0: senza la normalizzazione il costo può scendere quanto si vuole.

Riepilogo

- Comprando i titoli rischiosi e vendendo allo scoperto il titolo privo di rischio si incassa 1 oggi
- Domani il portafoglio paga 11,92, 1,92 e 9,92: nessun rischio, arbitraggio di tipo A
- La strategia si scala: senza normalizzazione l'LP è illimitato

Caso di studio

Introduzione: Caso di studio

- Analizziamo con lo script lo stesso mercato dell'esempio
- Due configurazioni di prezzi: una **con arbitraggio** e una **coerente**
- Vediamo come il modello si scrive in Gurobi, con la normalizzazione opzionale

Il caso

- Stesso mercato dell'esempio: $R = 1{,}04$, payoff nel file `dati/arbitraggio_payoff.csv`
- Due configurazioni di prezzi:
  - con arbitraggio: $s_1^0 = 6$, $s_2^0 = 20$
  - coerente: $s_1^0 = 13$, $s_2^0 = 18{,}6923$

Il modello in Gurobi

```
x = m.addVars(n1, lb=-GRB.INFINITY, name="x")  # posizioni libere
v_stato = m.addConstrs(
    (gp.quicksum(s1[i, j] * x[i] for i in range(n1)) >= 0
     for j in range(n_stati)), name="stato")
if normalizza:  # senza: con arbitraggio il modello e' illimitato
    m.addConstr(gp.quicksum(s0[i] * x[i] for i in range(n1))
                >= -1)
m.setObjective(gp.quicksum(s0[i] * x[i] for i in range(n1)),
               GRB.MINIMIZE)
```

Riepilogo

- Posizioni libere: `lb=-GRB.INFINITY`
- Un vincolo per stato del mondo: payoff del portafoglio ≥ 0
- La normalizzazione (costo ≥ -1) evita l'illimitatezza in presenza di arbitraggio

Risultati

Introduzione: Risultati

- Leggiamo l'output dello script nelle due configurazioni di prezzi
- Con i prezzi coerenti, i **duali** dei vincoli di stato forniscono la misura di prezzatura

Prezzi con arbitraggio: $(6, 20)$

- Senza normalizzazione: **UNBOUNDED** (arbitraggio di tipo A)
- Con normalizzazione: ottimo -1
  - incasso 1 oggi
  - payoff $(0;\ 0;\ 0{,}20) \geq 0$ domani

Prezzi coerenti: (13; 18,69)

- Ottimo 0: nessun arbitraggio
- Duali dei vincoli di stato: $p^* = (0{,}2846;\ 0{,}6769;\ 0)$
- Probabilità neutrali al rischio: $q = R\,p^* = (0{,}296;\ 0{,}704;\ 0)$, somma 1
- Verifica della prezzatura: $s^0 = (1;\ 13;\ 18{,}6923)$ riprodotti esattamente

I duali prezzano

- Con i prezzi coerenti l'LP restituisce ottimo 0 e, nei duali dei vincoli di stato, la misura di prezzatura $q = (0{,}296;\ 0{,}704;\ 0)$
- Ogni titolo, e ogni titolo *nuovo*, si prezza come valore atteso scontato dei payoff sotto q
- $q_3 = 0$ segnala una degenerazione informativa: lo stato 3 non serve a prezzare questi titoli (il suo payoff è replicabile con gli altri due stati)
- Per questo il "se e solo se" del teorema richiede $q > 0$: con $q_3 = 0$ resta un arbitraggio di tipo B latente sullo stato 3

Riepilogo

- Prezzi $(6, 20)$: LP illimitato; normalizzato, ottimo -1
- Prezzi coerenti: ottimo 0 e $q = (0{,}296;\ 0{,}704;\ 0)$ dai duali
- $q_3 = 0$: stato non necessario alla prezzatura, arbitraggio di tipo B latente

Analisi di sensitività: l'intervallo dei prezzi coerenti

Introduzione: l'intervallo dei prezzi coerenti

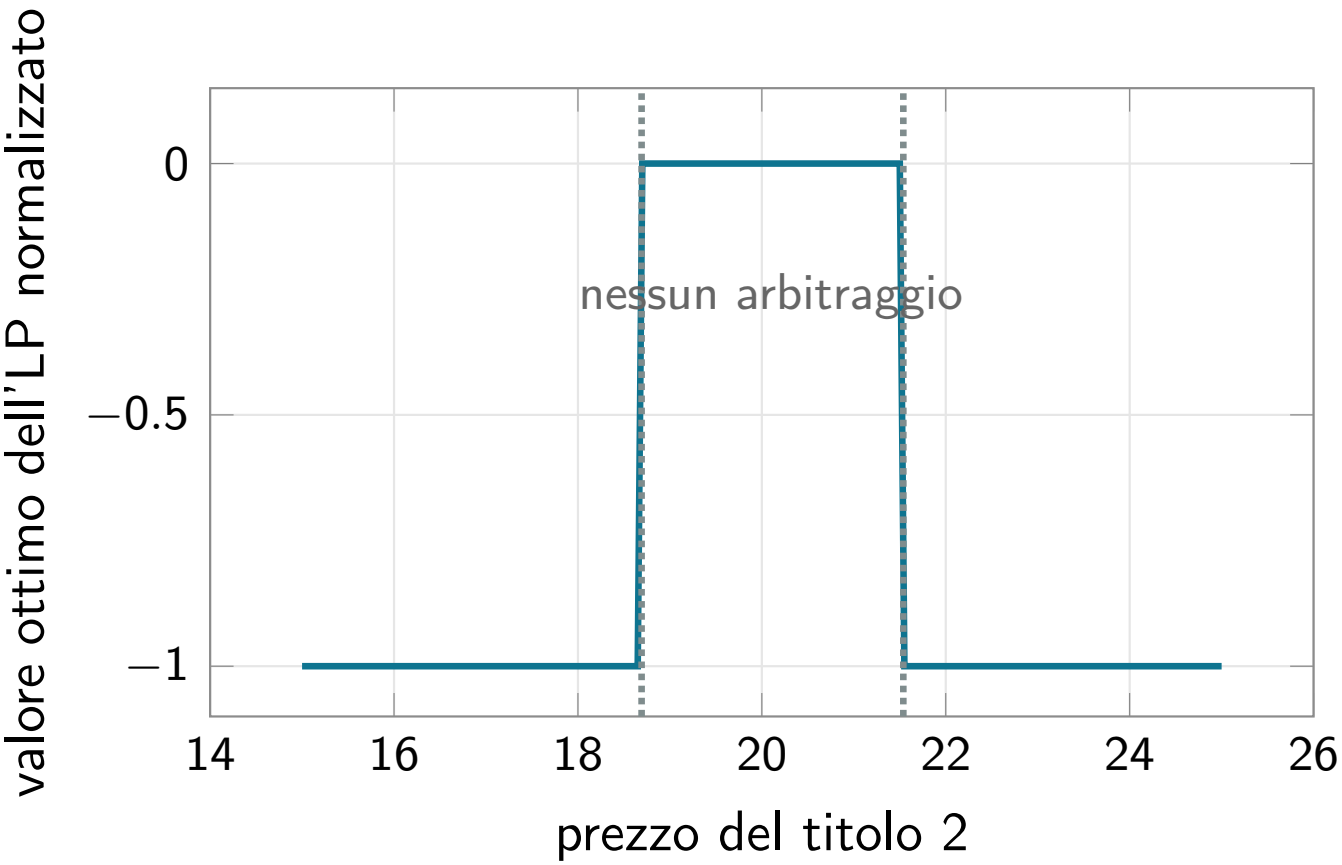
- Se alcuni titoli non sono quotati, quali loro prezzi sono **coerenti**?
- Due LP sulle misure di prezzatura danno un **intervallo** di prezzi senza arbitraggio
- Con la stessa idea prezziamo un titolo nuovo (una **call**) in un mercato completo e in uno incompleto

L'intervallo dei prezzi coerenti

- Sono quotati solo il titolo 0 (prezzo 1) e il titolo 1 (prezzo 13)
- Quali prezzi del titolo 2 *non* creano arbitraggio?
- Due LP: minimizzare e massimizzare $\sum_j s_{2j}^1 p_j$ sui $p \geq 0$ coerenti con i titoli quotati
- Risultato:

$$s_2^0 \in [18{,}69,\ 21{,}54]$$

Il guadagno da arbitraggio al variare del prezzo



Come leggere il grafico

- Valore ottimo dell'LP di arbitraggio normalizzato al variare del prezzo del titolo 2 (titoli 0 e 1 quotati a 1 e 13)
- Dentro l'intervallo [18,69, 21,54] (linee tratteggiate) il valore è 0: prezzi **coerenti**
- Fuori, il valore scende a -1: esiste un **arbitraggio**, in una direzione o nell'altra

Prezzare un titolo nuovo: completo vs incompleto

- La stessa coppia di LP prezza qualunque titolo nuovo
- Una *call* sul titolo 1 con strike 12 paga $\max(s^1_{1j} - 12, 0) = (0, 3, 1)$ nei tre stati
- **Mercato completo** (titoli 0, 1, 2 quotati): la misura di prezzatura è unica e il prezzo pure: 2,0308
- **Mercato incompleto** (solo titoli 0 e 1): le misure coerenti sono infinite e il prezzo è un *intervallo*, [1,4615, 2,0308]

Perché un intervallo

- Nel mercato incompleto, sotto il minimo o sopra il massimo dell'intervallo chiunque potrebbe costruire un arbitraggio combinando call e titoli quotati
- Dentro l'intervallo ogni prezzo è coerente con i titoli quotati

Riepilogo

- Due LP (min e max sulle misure di prezzatura) danno l'intervallo dei prezzi coerenti: [18,69, 21,54] per il titolo 2
- Fuori dall'intervallo l'LP normalizzato vale -1: arbitraggio
- Mercato completo: prezzo unico (2,0308 per la call); incompleto: intervallo ([1,4615, 2,0308])

Esercizi

Introduzione: Esercizi

- Tre esercizi per consolidare i concetti del capitolo
- Scala dell'arbitraggio, estremi dell'intervallo dei prezzi coerenti, prezzatura di una call

Esercizio: scala dell'arbitraggio

- Con i prezzi $(6, 20)$, trovare una strategia che incassa 5 oggi senza rischi domani
- Suggerimento: le soluzioni dell'LP omogeneo si possono scalare

Esercizio: estremo dell'intervallo

- Porre il prezzo del titolo 2 all'estremo superiore 21,5385 e risolvere l'LP di arbitraggio
- Verificare che l'ottimo è 0 e calcolare la misura di prezzatura associata
- Che cosa succede appena sopra, a 21,60?

Esercizio: prezzatura di una call

- Nel mercato completo (prezzi 1, 13, 18,6923), prezzare una call sul titolo 2 con strike 20

$$\text{payoff} = \max(s_{2j}^1 - 20, 0)$$

- Verificare il prezzo con le probabilità neutrali al rischio del caso di studio

Riepilogo finale (1/2)

Modello di ricerca dell'arbitraggio:

- LP con posizioni libere: minimo costo oggi, payoff ≥ 0 in ogni stato
- Ottimo < 0: tipo A (normalizzare); ottimo 0 con vincolo sempre lasco: tipo B

Dualità e prezzatura:

- I duali p_j, moltiplicati per R, sono probabilità neutrali al rischio
- Prezzo = valore atteso scontato dei payoff sotto q

Riepilogo finale (2/2)

Teorema fondamentale:

- Nessun arbitraggio $\iff$ esiste q neutrale al rischio con $q_j > 0$

Prezzi coerenti:

- Due LP sulle misure di prezzatura danno l'intervallo dei prezzi senza arbitraggio
- Mercato completo: prezzo unico; incompleto: intervallo