VaR e CVaR: misurare e ottimizzare il rischio

Indice

Motivazione gestionale

Definizioni e proprietà

Esempio svolto a mano

Caso di studio 1: portafoglio mean-CVaR

Caso di studio 2: supply chain a due stadi

Analisi di sensitività

Esercizi

Obiettivi (1/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- definire e calcolare VaR e CVaR su una distribuzione discreta;
- usare la formulazione lineare di Rockafellar–Uryasev;

Obiettivi (2/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- costruire portafogli e piani logistici protetti dagli scenari peggiori;
- riconoscere i limiti statistici delle stime delle code.

Prerequisiti

- Da questo modulo, Capitolo 7 «Il Newsvendor e le sue varianti»: l'LP a scenari, il trucco della parte positiva e l'obiettivo mean-CVaR
- Da questo modulo, Capitolo 2 «Richiami: programmazione lineare e analisi di sensitività»: i prezzi ombra e il protocollo di sensitività

Motivazione gestionale

Introduzione: Motivazione gestionale

- In questa sezione vediamo **perché** non basta ottimizzare un valore medio
- Introduciamo le due misure di rischio del capitolo: **VaR** e **CVaR**
- Elenchiamo gli obiettivi: definizioni, modello LP, casi di studio, limiti statistici

La media non basta

- Molti modelli ottimizzano un **valore medio**: scelta semplice, ma che può nascondere perdite **rare e molto elevate**
- VaR e CVaR descrivono la **coda** della distribuzione delle perdite e trasformano l'avversione al rischio in decisioni quantitative
- Il **VaR** risponde a: "qual è una soglia di perdita elevata?"
- Il **CVaR** risponde anche a: "quanto perdiamo *in media* quando quella soglia viene superata?"

Il linguaggio del rischio di coda

- Dopo le crisi finanziarie, "quanto perdiamo negli scenari peggiori?" è diventata una domanda **regolamentare** oltre che gestionale
- VaR e CVaR sono il linguaggio standard con cui banche, assicurazioni e, sempre più, supply chain manager parlano di rischio di coda
- **La sorpresa didattica:** il CVaR, concetto apparentemente sofisticato, si ottimizza con un semplice **LP**

Riepilogo

- Ottimizzare la media può nascondere perdite rare ed elevate
- VaR: una **soglia** di perdita elevata; CVaR: la perdita **media oltre** la soglia
- Il CVaR si ottimizza con un LP: è il cuore del capitolo

Definizioni e proprietà

Introduzione: Definizioni e proprietà

- Definiamo formalmente **VaR** e **CVaR** di una perdita aleatoria
- Confrontiamo le loro proprietà: perché il CVaR è preferibile per ottimizzare
- Costruiamo il **modello LP di Rockafellar–Uryasev**, che calcola e ottimizza il CVaR su un insieme di scenari

Il problema a parole

- *Decidiamo* come prima: quote di portafoglio, quantità, capacità prenotate
- *L'obiettivo* cambia: non minimizzare la perdita **media**, bensì una misura della sua **coda**, cioè quanto si perde negli scenari peggiori
- *I vincoli* restano quelli del problema sottostante, più i vincoli lineari ausiliari che definiscono il CVaR

Perdita aleatoria e livello di confidenza

- Sia L la **perdita aleatoria** (valori alti $=$ esiti peggiori)
- Sia $\alpha \in (0, 1)$ un **livello di confidenza** (tipicamente 0,90–0,99)
- Come per la domanda del newsvendor, la variabile aleatoria è maiuscola e le sue realizzazioni minuscole (ℓ_s)
- È l'eccezione, per aderenza alla letteratura, alla convenzione che riserva le maiuscole a insiemi e matrici

VaR e CVaR

VaR e CVaR

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \inf\{\eta \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(L \leq \eta) \geq \alpha\},$$

$\mathrm{CVaR}_\alpha(L) =$ perdita media nella coda peggiore di massa $1 - \alpha$.

Proprietà a confronto

Convessità	il CVaR è convesso nelle decisioni (se L lo è); il VaR in generale no
Subadditività	il CVaR premia la diversificazione; il VaR può violarla
Coda	il VaR non distingue due code con lo stesso quantile ma gravità diversa
Ottimizzazione	il CVaR ammette una formulazione LP a scenari; il VaR no

Dati del modello a scenari

- Numero di scenari $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, indicizzati da $s \in \{1, 2, \ldots, k\}$
- Per ogni scenario, la probabilità $\pi_s \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$, con $\sum_{s=1}^{k} \pi_s = 1$
- Per ogni scenario, la perdita $\ell_s(\boldsymbol{x})$, funzione lineare del vettore delle decisioni $\boldsymbol{x}$, vincolato in un poliedro X
- Il livello di confidenza $\alpha \in (0, 1)$

Variabili decisionali

Oltre alle decisioni $\boldsymbol{x}$, introduciamo una variabile libera e k variabili non negative:

$$\begin{cases} \eta = \text{soglia candidata di perdita (all'ottimo: un VaR)} \\ \xi_s = \text{eccesso di perdita oltre } \eta \text{ nello scenario } s \end{cases}$$

$$\forall s \in \{1, 2, \ldots, k\}.$$

Modello LP di Rockafellar–Uryasev

Modello LP di Rockafellar–Uryasev per il CVaR

$$\min \quad \eta + \frac{1}{1-\alpha} \sum_{s=1}^{k} \pi_s \xi_s \tag{8.1a}$$

$$\text{soggetto a} \quad \xi_s \geq \ell_s(\boldsymbol{x}) - \eta, \quad \forall s \in \{1, 2, \ldots, k\}, \tag{8.1b}$$

$$\boldsymbol{x} \in X, \tag{8.1c}$$

$$\eta \gtreqless 0, \tag{8.1d}$$

$$\xi_s \geq 0, \qquad \forall s \in \{1, 2, \ldots, k\}. \tag{8.1e}$$

Descrizione del modello (1/2)

- **Funzione obiettivo:** la soglia η più la media pesata degli eccessi di coda, amplificata di $1/(1-\alpha)$
- *All'ottimo η^* è un VaR e il valore obiettivo è il CVaR*: un solo LP fornisce entrambe le misure
- **Vincoli di coda** $\xi_s \geq \ell_s(\boldsymbol{x}) - \eta$: definiscono gli eccessi; solo gli scenari con perdita oltre la soglia contribuiscono (k vincoli lineari)

Descrizione del modello (2/2)

- **Vincolo $\boldsymbol{x} \in X$**: raccoglie i vincoli del problema decisionale sottostante (poliedrali)
- **Definizione delle variabili:** η è *libera* (il simbolo $\gtreqless$), le ξ_s sono non negative

Perché il modello funziona

- La variabile $\xi_s = (\ell_s - \eta)^+$ è l'eccesso di perdita oltre la soglia candidata η (stesso trucco delle parti positive del Newsvendor)
- Minimizzare su η bilancia due spinte: alzare η riduce gli eccessi ma sposta in su la soglia
- Il punto di equilibrio è esattamente il **quantile** α
- Se X è un poliedro e ℓ_s è lineare, tutto il modello è un **LP**

Riepilogo

- VaR_α: quantile α della perdita; CVaR_α: perdita media nella coda di massa $1-\alpha$
- Il CVaR è convesso, subadditivo, sensibile alla gravità della coda e ottimizzabile con un LP; il VaR no
- Modello di Rockafellar–Uryasev: soglia libera η, eccessi $\xi_s \geq 0$, k vincoli di coda
- All'ottimo: η^* è un VaR, il valore ottimo è il CVaR

Esempio svolto a mano

Introduzione: Esempio svolto a mano

- Calcoliamo a mano VaR e CVaR su un esempio con **sei scenari**
- Verifichiamo che l'LP di Rockafellar–Uryasev restituisce gli stessi valori
- Confrontiamo media, VaR e CVaR: tre numeri, tre storie

Esempio: sei scenari, $\alpha = 0{,}80$ (1/3)

- Perdite equiprobabili: $\{2, 4, 5, 7, 12, 20\}$, ciascuna con probabilità $1/6$
- **VaR.** La cumulata raggiunge 0,80 in corrispondenza della quinta perdita ordinata:

$$\mathrm{VaR}_{0{,}80} = 12$$

Esempio: sei scenari, $\alpha = 0{,}80$ (2/3)

- **CVaR con la formula.** La coda peggiore ha massa 0,20
- Lo scenario da 20 pesa $1/6 = 0{,}167$, e la massa restante 0,033 sta *sul punto* 12:

$$\mathrm{CVaR}_{0{,}80} = 12 + \frac{1}{0{,}20} \cdot \frac{1}{6}\,(20 - 12) = 12 + 6{,}67 = 18{,}67$$

Esempio: sei scenari, $\alpha = 0{,}80$ (3/3)

- **Verifica con l'LP** (script): $\eta^* = 12$, $\xi = (0, 0, 0, 0, 0, 8)$, valore 18,6667
- La formula tratta correttamente la massa "a cavallo" del quantile senza selezionare scenari con variabili binarie
- **Confronto.** Perdita media 8,33; VaR 12; CVaR 18,67
- La media rassicura, il VaR dà una soglia, il CVaR dice quanto fa male quando va male

Riepilogo

- Il VaR si legge sulla cumulata: è la perdita in cui essa raggiunge α
- Il CVaR media la coda di massa $1 - \alpha$, contando anche la massa che sta sul quantile
- L'LP restituisce gli stessi valori senza variabili binarie

Caso di studio 1: portafoglio mean-CVaR

Introduzione: portafoglio mean-CVaR

- Applichiamo il modello di Rockafellar–Uryasev a un **portafoglio** di titoli
- Il rischio si misura con il CVaR della perdita mensile, a rendimento atteso fissato
- Vedremo che il CVaR guarda **solo la coda** delle perdite

Il caso: otto titoli con code grasse

- Otto titoli azionari settoriali e $k = 220$ scenari mensili generati con **code grasse** (fattore di mercato t di Student, gradi di libertà 4)
- È il mondo in cui il CVaR mostra il suo valore
- Perdita di scenario: $\ell_s(\boldsymbol{x}) = -\sum_{i=1}^{n} r_{is}\, x_i$, dove r_{is} è il rendimento del titolo i nello scenario s
- Minimizziamo $\mathrm{CVaR}_{0,90}$ con rendimento atteso $\geq 8\%$ annuo

Il modello in Gurobi

```
eta = m.addVar(lb=-GRB.INFINITY, name="eta")  # soglia: libera!
xi  = m.addVars(S, name="xi")
m.addConstr(x.sum() == 1)
m.addConstr(gp.quicksum(mu[i]*x[i] for i in range(n))
            >= r_min)
m.addConstrs((xi[s] >=
              -gp.quicksum(R[s, i]*x[i] for i in range(n))
              - eta for s in range(S)))
m.setObjective(eta + gp.quicksum(xi[s] for s in range(S))
               / (S * (1 - alpha)), GRB.MINIMIZE)
```

Risultati: misure di rischio

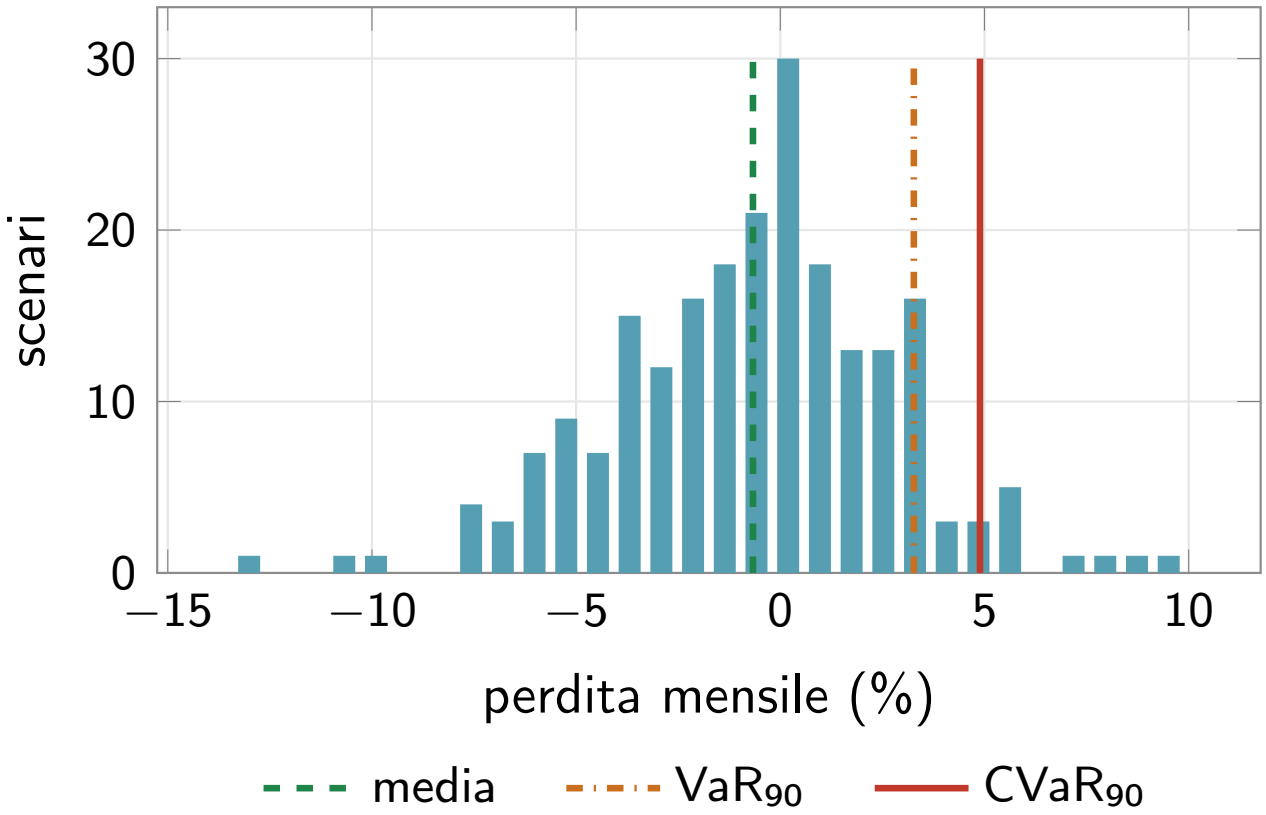
Perdite mensili del portafoglio mean-CVaR:

	perdita media	VaR_{90}	CVaR_{90}
mean-CVaR	$-0{,}0067$	$0{,}0327$	$0{,}0489$

Risultati: composizioni (%)

	ENE	FIN	TEC	SAN	UTL	MAT
mean-CVaR	9,9	1,9	10,5	8,6	46,5	22,5

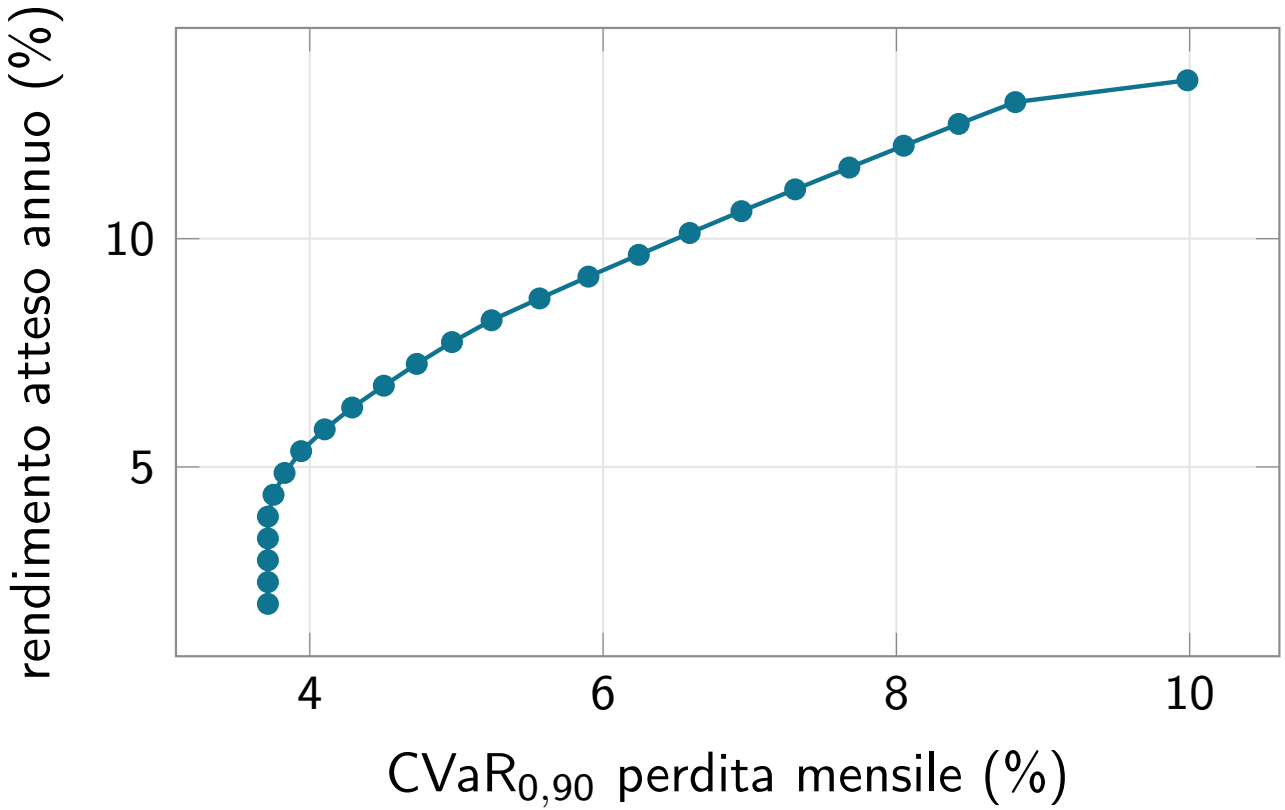
Distribuzione delle perdite (mean-CVaR)



Come leggere l'istogramma

- Istogramma delle perdite mensili del portafoglio mean-CVaR sui 220 scenari
- Linee verticali: media, VaR_{90} e CVaR_{90}
- Il CVaR è la **media della coda** a destra del VaR

Frontiera rendimento-CVaR



Ottenuta variando il rendimento minimo richiesto.

Il CVaR guarda la coda

- Con rendimento atteso dell'8% annuo il portafoglio guadagna in media lo 0,67% al mese, ma nel 10% dei mesi peggiori perde in media il 4,89%
- Il CVaR concentra il portafoglio su UTL e MAT e tiene una quota di TEC, che pur mediocre in media si muove in controtendenza negli scenari peggiori
- Misurare il rischio con la varianza porta al portafoglio di Markowitz, un modello quadratico: è nel modulo *Modellazione PNL*, «Portafoglio di Markowitz»

Riepilogo

- Con rendimento atteso dell'8% il portafoglio guadagna in media lo 0,67% al mese, ma nel 10% dei mesi peggiori perde in media il 4,89%
- Il portafoglio si concentra su UTL e MAT, con titoli che proteggono negli scenari peggiori
- Variando il rendimento minimo si traccia la frontiera rendimento-CVaR

Caso di studio 2: supply chain a due stadi

Introduzione: supply chain a due stadi

- Usiamo il CVaR in un problema **logistico a due stadi**: prima si prenota capacità, poi si decide il ricorso
- Un parametro λ bilancia costo medio e rischio di coda
- Misureremo il **costo della resilienza**: quanto costo medio serve per ridurre il CVaR

Il caso: due fornitori

- Prima di osservare lo scenario si *prenota* capacità dai fornitori; poi, visto lo scenario, si decide il **ricorso**
- **F1** è economico ma fragile: nel 12% degli scenari la sua disponibilità crolla al 30%
- **F2** è caro ma affidabile
- Penalità di shortage: 40 euro/unità; $k = 400$ scenari

Dati del modello

- Due fornitori $a \in \{1, 2\}$ (1 economico ma fragile, 2 caro ma affidabile)
- Costi di prenotazione $c_a^{\text{pre}} \in \mathbb{Q}_{>0}$ e di acquisto $c_a^{\text{uso}} \in \mathbb{Q}_{>0}$
- k scenari $s \in \{1, 2, \ldots, k\}$ con domanda $d_s \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$
- Disponibilità $\delta_{as} \in (0, 1]$: il dato che modella il guasto
- Penalità di shortage $g \in \mathbb{Q}_{>0}$
- Peso del rischio $\lambda \in [0, 1]$ e livello $\alpha \in (0, 1)$

Variabili decisionali

Variabili non negative:

- x_a = capacità prenotata dal fornitore a: **di primo stadio**, uguale in tutti gli scenari
- f_{as} = acquisto dal fornitore a nello scenario s
- u_s = domanda non servita nello scenario s

Le f_{as} e le u_s sono variabili **di ricorso**.

Modello a due stadi con CVaR

Modello a due stadi con CVaR

$$\min \ (1-\lambda)\Big[\sum_{a=1}^{2} c_a^{\text{pre}} x_a + \sum_{s=1}^{k} \pi_s \, \phi_s\Big] + \lambda \, \mathrm{CVaR}_\alpha \tag{8.2a}$$

$$\text{soggetto a} \quad f_{as} \le \delta_{as} \, x_a, \quad \forall a \in \{1,2\}, \ \forall s \in \{1,2,\dots,k\}, \tag{8.2b}$$

$$f_{1s} + f_{2s} + u_s \ge d_s, \qquad \forall s \in \{1,2,\dots,k\}, \tag{8.2c}$$

$$x_a, \ f_{as}, \ u_s \ge 0, \qquad \forall a \in \{1,2\}, \ \forall s \in \{1,2,\dots,k\},$$

dove $\phi_s = \sum_{a=1}^{2} c_a^{\text{uso}} f_{as} + g \, u_s$ è il costo di ricorso dello scenario s e CVaR_α è il CVaR del costo totale, linearizzato con le variabili η, ξ_s di (8.1).

Descrizione del modello (1/2)

- **Funzione obiettivo:** combina, con peso λ, il costo medio (prenotazioni più valore atteso di acquisti e penalità) e il CVaR del costo totale
- **Vincoli di capacità** $f_{as} \leq \delta_{as} x_a$: nello scenario s si può usare il fornitore a solo fino alla capacità prenotata x_a, ridotta dalla disponibilità δ_{as} ($2\,k$ vincoli lineari)

Descrizione del modello (2/2)

- **Vincoli di domanda:** la domanda va coperta con i flussi o, in mancanza, conteggiata come shortage u_s, che in obiettivo paga la penalità (k vincoli lineari)
- Il modello non è mai inammissibile: "compra" l'inammissibilità al prezzo della penalità
- **Ultimi vincoli:** definiscono le variabili del modello

Risultati al variare di λ

λ	forn. 1	forn. 2	costo medio	CVaR_{90}	servizio
0,0	161,5	134,2	1.724	2.902	98,7%
0,5	92,7	212,7	1.803	2.217	99,9%
1,0	68,5	236,9	1.906	2.139	99,0%

Le colonne forn. 1 e forn. 2 riportano la capacità prenotata.

Il costo della resilienza

- Il decisore neutrale ($\lambda = 0$) compra dal fornitore economico e accetta che nel 12% degli scenari lo shortage faccia esplodere i costi (CVaR 2.902)
- Al crescere di λ la capacità migra verso il fornitore affidabile
- $+79$ euro di costo medio comprano -685 euro di CVaR
- È il **costo della resilienza**: il numero che serve in una discussione su rishoring e dual sourcing

Riepilogo

- Due stadi: capacità prenotata prima dello scenario, acquisti e shortage dopo
- L'obiettivo combina costo medio e CVaR con peso λ; lo shortage rende il modello sempre ammissibile
- Al crescere di λ la capacità passa al fornitore affidabile: il CVaR scende molto più di quanto salga il costo medio

Analisi di sensitività

Introduzione: Analisi di sensitività

- Vediamo quali parametri variare e con quale effetto atteso
- Mettiamo in guardia sui **limiti statistici** delle stime di coda

Parametri da variare

α	più alto $\Rightarrow$ coda più estrema stimata da meno scenari: servono più scenari per stime stabili
λ	controlla il compromesso prestazione media / protezione
π_s	scenari ripesati o stress test (aggiungere scenari estremi)
$\lvert S \rvert$	stabilità statistica: ripetere con campioni diversi, come nel capitolo sul newsvendor

Attenzione alle stime di coda

Osservazione 1: Code stimate da pochi scenari

Con $\alpha = 0{,}99$ e $k = 220$ scenari la coda contiene solo 2–3 scenari: il CVaR stimato è quasi rumore.

Regola pratica: servono almeno qualche decina di scenari oltre il quantile.

Con distribuzioni discrete il VaR può non essere unico (η^* è un VaR): confrontare sempre η^* con il quantile empirico.

Riepilogo

- α, λ, π_s e il numero di scenari sono le leve dell'analisi
- Code estreme con pochi scenari danno stime rumorose: servono decine di scenari oltre il quantile
- η^* è *un* VaR: va confrontato con il quantile empirico

Esercizi

Introduzione: Esercizi

- Cinque esercizi per consolidare i concetti del capitolo
- Si va dal calcolo a mano alla modifica dei modelli dei casi di studio, da risolvere con lo script del laboratorio

Esercizio: verifica

- Ricalcolare a mano VaR e CVaR dell'esempio a 6 scenari con $\alpha = 0{,}90$
- Verificare con l'LP
- Attenzione: la coda ha massa 0,10 e lo scenario da 20 pesa $0{,}167 > 0{,}10$

Esercizio: subadditività

- Costruire un esempio a scenari con due attività in cui

$$\mathrm{VaR}(L_1 + L_2) > \mathrm{VaR}(L_1) + \mathrm{VaR}(L_2)$$

- Verificare che il CVaR invece non viola la subadditività

Esercizio: frontiera in α

- Per il portafoglio, tracciare il CVaR ottimo per

$$\alpha \in \{0{,}80;\ 0{,}90;\ 0{,}95;\ 0{,}99\}$$

  a parità di rendimento
- Come cambia la composizione?
- Quando iniziano le instabilità numeriche?

Esercizio: CVaR vincolato

- Riformulare il portafoglio come

$$\max \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \quad \text{soggetto a} \quad \mathrm{CVaR}_{0,90} \leq \bar{c}$$

- Verificare che variando $\bar{c}$ si percorre la stessa frontiera
- Leggere il duale del vincolo

Esercizio: stress test

- Aggiungere alla supply chain uno scenario estremo (domanda +50% e F1 al 10%) con probabilità 1%
- Quanto cambia la prenotazione ottima per $\lambda = 0{,}5$?
- E il CVaR?

Riepilogo finale (1/2)

Misure di rischio:

- VaR: soglia di perdita (quantile α); CVaR: perdita media nella coda di massa $1 - \alpha$
- Il CVaR è convesso, subadditivo e si ottimizza con un LP

Modello di Rockafellar–Uryasev:

- Soglia libera η ed eccessi $\xi_s \geq \ell_s(\boldsymbol{x}) - \eta$
- All'ottimo η^* è un VaR e il valore ottimo è il CVaR

Riepilogo finale (2/2)

Casi di studio:

- Portafoglio: il mean-CVaR controlla la coda delle perdite
- Supply chain: λ misura il costo della resilienza

Limiti:

- Code estreme con pochi scenari danno stime rumorose
- η^* è *un* VaR: confrontarlo con il quantile empirico