Data Envelopment Analysis

Sapienza Università di Roma

Indice

Motivazione gestionale

Efficienza e modello CCR

La forma di inviluppo: il duale

BCC, scala e scarti

Esempio svolto a mano

Caso di studio e risultati

Analisi di sensitività

Esercizi

Obiettivi (1/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- definire l'efficienza relativa come rapporto pesato fra output e input;
- trasformare il modello frazionario in un LP e scriverne il duale;

Obiettivi (2/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- leggere nel duale le unità di riferimento e gli obiettivi di miglioramento;
- separare l'inefficienza tecnica da quella di scala.

Prerequisiti

- Dal modulo *Programmazione lineare*, Capitolo 9 «Teoria della dualità»: il duale di un LP e la dualità forte, da cui viene la forma di inviluppo
- Da questo modulo, Capitolo 2 «Richiami: programmazione lineare e analisi di sensitività»: i prezzi ombra e la loro verifica per perturbazione

Motivazione gestionale

Introduzione: Motivazione gestionale

- In questo capitolo confrontiamo l'**efficienza** di unità simili
- Classe del problema: **LP**, uno per ogni unità
- Il duale dice a chi ispirarsi e di quanto ridurre le risorse

Dodici filiali da confrontare

- Una banca ha dodici filiali: usano personale e costi operativi, producono prestiti e depositi
- Quali lavorano bene? Di quanto dovrebbero ridurre le risorse le altre?
- Gli output non hanno un prezzo comune, e una filiale grande non è inefficiente solo perché spende di più
- Serve un confronto con le **migliori pratiche osservate**

La Data Envelopment Analysis

- La **DEA** (*Data Envelopment Analysis*) costruisce un indice di efficienza risolvendo un LP per unità
- Nessun prezzo fissato a priori: ogni unità sceglie i pesi più favorevoli
- Si usa per ospedali, scuole, uffici pubblici, impianti, reparti

Riepilogo: Motivazione gestionale

- Unità simili con più input e più output
- Nessun prezzo comune per gli output
- Un LP per unità: efficienza, peer, target

Efficienza e modello CCR

Introduzione: Efficienza e modello CCR

- Definiamo le unità, i dati e l'efficienza relativa
- Scriviamo il modello frazionario di Charnes, Cooper e Rhodes (CCR)
- Lo trasformiamo in un LP: la forma dei moltiplicatori

Dati (input del modello)

Le unità si chiamano DMU (*Decision Making Unit*)

Simbolo	Tipo	Significato
n	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero di DMU, indicizzate da $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$
m	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero di input, indicizzati da $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$
p	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero di output, indicizzati da $r \in \{1, 2, \ldots, p\}$
x_{ij}	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	quantità dell'input i usata dalla DMU j
y_{rj}	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	quantità dell'output r prodotta dalla DMU j
o	$\in \{1, 2, \ldots, n\}$	la DMU che si sta valutando

Efficienza relativa

Definizione 1: Efficienza relativa

Dati i pesi $u_r \geq 0$ *e* $v_i \geq 0$, *non tutti nulli, il rapporto di efficienza della DMU* j *è*

$$E_j(u, v) = \frac{\sum_{r=1}^{p} u_r \, y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i \, x_{ij}}.$$

L'efficienza relativa della DMU o *è il massimo di* $E_o(u, v)$ *sui pesi per cui nessuna DMU ha rapporto maggiore di* 1. *La DMU* o *è efficiente se vale* 1.

Il problema a parole

- *Decidiamo* i pesi degli input e degli output
- *L'obiettivo* è massimizzare il rapporto di efficienza della DMU o
- *I vincoli*: con gli stessi pesi nessuna DMU ha rapporto maggiore di 1
- Introduciamo le seguenti $p + m$ variabili non negative:

$$\begin{cases} u_r = \text{peso dell'output } r, & \forall r \in \{1, 2, \ldots, p\}, \\ v_i = \text{peso dell'input } i, & \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}. \end{cases}$$

Il modello frazionario

Modello CCR frazionario per la DMU o

$$\max \quad \frac{\sum_{r=1}^{p} u_r\, y_{ro}}{\sum_{i=1}^{m} v_i\, x_{io}} \tag{6.1a}$$

$$\text{soggetto a} \quad \frac{\sum_{r=1}^{p} u_r\, y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i\, x_{ij}} \leq 1, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{6.1b}$$

$$u_r \geq 0, \quad \forall r \in \{1, 2, \ldots, p\}, \tag{6.1c}$$

$$v_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}. \tag{6.1d}$$

- (6.1a) massimizza il rapporto della DMU o
- (6.1b): nessuna DMU supera il rapporto 1 (n vincoli frazionari)
- (6.1c) e (6.1d) definiscono le variabili

La trasformazione di Charnes–Cooper

- Se tutti i pesi si moltiplicano per lo stesso $t > 0$, nessun rapporto cambia
- Si sceglie t in modo che il denominatore dell'obiettivo valga 1:

$$\sum_{i=1}^{m} v_i \, x_{io} = 1$$

- L'obiettivo diventa il solo numeratore
- Ogni vincolo (6.1b), moltiplicato per il suo denominatore positivo, diventa lineare

La forma dei moltiplicatori

Modello CCR, forma dei moltiplicatori, per la DMU o

$$\max \quad \sum_{r=1}^{p} u_r \, y_{ro} \tag{6.2a}$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{i=1}^{m} v_i \, x_{io} = 1, \tag{6.2b}$$

$$\sum_{r=1}^{p} u_r \, y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i \, x_{ij} \leq 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{6.2c}$$

$$u_r \geq 0, \quad \forall r \in \{1, 2, \ldots, p\}, \tag{6.2d}$$

$$v_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}. \tag{6.2e}$$

Funzione obiettivo e vincoli

- (6.2a) massimizza l'output pesato della DMU o: è il suo rapporto, perché l'input pesato vale 1
- (6.2b) normalizza a 1 l'input pesato della DMU o (1 vincolo lineare)
- (6.2c): per ogni DMU l'output pesato non supera l'input pesato (n vincoli lineari)
- (6.2d) e (6.2e) definiscono le variabili
- Il valore ottimo $\tilde{h}_o \in (0, 1]$ è l'efficienza relativa; per n DMU si risolvono n LP

Riepilogo: Efficienza e modello CCR

- Efficienza = rapporto pesato output/input, con i pesi più favorevoli
- Il modello frazionario è invariante per scala dei pesi
- Fissando l'input pesato a 1 si ottiene un LP

La forma di inviluppo: il duale

Introduzione: La forma di inviluppo

- Scriviamo il duale della forma dei moltiplicatori
- Lo leggiamo come una DMU virtuale costruita con le DMU osservate
- Ricaviamo peer, target e prezzi ombra

Le variabili duali

- Il primale è di massimo: un vincolo di uguaglianza e n vincoli $\leq$
- Per aderire alla letteratura della DEA le variabili duali non si chiamano π:

$$\begin{cases} \theta = \text{variabile duale del vincolo (6.2b)}, \\ \lambda_j = \text{variabile duale del vincolo (6.2c) della DMU } j. \end{cases}$$

- θ è libera (uguaglianza), $\lambda_j \geq 0$ (vincoli $\leq$ di un massimo)
- Teoria completa: Teoria della dualità (corso di Programmazione lineare)

La forma di inviluppo

Modello CCR, forma di inviluppo, per la DMU o

$$\min \quad \theta \tag{6.3a}$$

$$\text{soggetto a} \quad \theta\, x_{io} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, x_{ij} \geq 0, \qquad \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}, \tag{6.3b}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, y_{rj} \geq y_{ro}, \quad \forall r \in \{1, 2, \ldots, p\}, \tag{6.3c}$$

$$\theta \gtreqless 0, \tag{6.3d}$$

$$\lambda_j \geq 0, \qquad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{6.3e}$$

Funzione obiettivo e vincoli

- (6.3a) minimizza il fattore θ con cui si contraggono tutti gli input della DMU o
- (6.3b): la combinazione pesata con i λ_j usa al più θ volte ogni input di o (m vincoli, dalle v_i)
- (6.3c): la stessa combinazione produce almeno ogni output di o (p vincoli, dalle u_r)
- (6.3d) e (6.3e) definiscono le variabili

Che cosa dice la forma di inviluppo

- $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(x_{\cdot j}, y_{\cdot j}\right)$ è una DMU **virtuale**
- Con $\lambda_o = 1$ e gli altri $\lambda_j = 0$ si ha $\theta = 1$: quindi $\tilde{\theta} \leq 1$
- Dualità forte: $\tilde{\theta} = \tilde{h}_o$
- La contrazione radiale ottima degli input **è** l'efficienza relativa

Tre informazioni gestionali

- **Peer**: l'insieme di riferimento $\{j : \tilde{\lambda}_j > 0\}$, le DMU efficienti a cui ispirarsi
- **Target**: la proiezione di o sulla frontiera efficiente
- **Prezzi ombra** dei vincoli (6.3b) e (6.3c): sono i pesi ottimi $\tilde{v}_i$ e $\tilde{u}_r$ del primale (uno dei vettori ottimi, se non è unico)

Riepilogo: La forma di inviluppo

- Il duale cerca la DMU virtuale che fa almeno lo stesso con meno
- $\tilde{\theta} = \tilde{h}_o$ per la dualità forte
- I $\tilde{\lambda}_j > 0$ indicano i peer

BCC, scala e scarti

Introduzione: BCC, scala e scarti

- Rendimenti di scala variabili: il modello BCC
- L'efficienza di scala come rapporto CCR/BCC
- Gli scarti, i target e l'efficienza debole e forte

Rendimenti di scala

- Il CCR assume rendimenti di scala **costanti**: doppi input, doppi output
- Per filiali di dimensioni molto diverse è un'ipotesi forte
- Il modello di Banker, Charnes e Cooper (BCC) chiede $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$
- La DMU virtuale diventa una combinazione **convessa**, di dimensione comparabile

Il modello BCC

Modello BCC, forma di inviluppo, per la DMU o

$$\min \quad \theta \tag{6.4a}$$

$$\text{soggetto a} \quad \theta\, x_{io} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, x_{ij} \geq 0, \qquad \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}, \tag{6.4b}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, y_{rj} \geq y_{ro}, \quad \forall r \in \{1, 2, \ldots, p\}, \tag{6.4c}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \tag{6.4d}$$

$$\theta \gtreqless 0, \tag{6.4e}$$

$$\lambda_j \geq 0, \qquad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{6.4f}$$

Efficienza di scala

- (6.4d) restringe la regione: in un minimo $\tilde{\theta}^{\mathrm{BCC}} \geq \tilde{\theta}^{\mathrm{CCR}}$

Definizione 2: Efficienza di scala

$$\mathrm{SE}_o = \frac{\tilde{\theta}_o^{\mathrm{CCR}}}{\tilde{\theta}_o^{\mathrm{BCC}}} \in (0, 1].$$

Vale 1 *alla scala più produttiva; è minore di* 1 *quando parte dell'inefficienza dipende solo dalla dimensione.*

- Nel CCR: $\sum_{j=1}^{n} \tilde{\lambda}_j < 1$ troppo piccola, > 1 troppo grande (se la soluzione è unica)

Gli scarti: la seconda fase

Seconda fase: massimi scarti per la DMU o

$$\max \quad \sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{p} s_r^+ \tag{6.5a}$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, x_{ij} + s_i^- = \tilde{\theta} \, x_{io}, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}, \tag{6.5b}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, y_{rj} - s_r^+ = y_{ro}, \quad \forall r \in \{1, 2, \ldots, p\}, \tag{6.5c}$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{6.5d}$$

$$s_i^- \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}, \tag{6.5e}$$

$$s_r^+ \geq 0, \quad \forall r \in \{1, 2, \ldots, p\}. \tag{6.5f}$$

Target ed efficienza debole e forte

- Target della DMU o:

$$\hat{x}_{io} = \tilde{\theta}\, x_{io} - \tilde{s}_i^-, \qquad \hat{y}_{ro} = y_{ro} + \tilde{s}_r^+$$

Definizione 3: Efficienza debole e forte

La DMU o è fortemente efficiente se $\tilde{\theta} = 1$ e tutti gli scarti ottimi sono nulli; è debolmente efficiente se $\tilde{\theta} = 1$ ma almeno uno scarto è positivo.

Riepilogo: BCC, scala e scarti

- BCC: $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$, rendimenti variabili
- $\mathrm{SE} = \tilde{\theta}^{\mathrm{CCR}} / \tilde{\theta}^{\mathrm{BCC}}$
- La seconda fase misura gli scarti e dà i target

Esempio svolto a mano

Introduzione: Esempio svolto a mano

- Cinque DMU con un input e un output
- I valori li dà il solver, poi si verificano
- CCR, dualità, BCC ed efficienza debole sullo stesso esempio

L'istanza

DMU	1	2	3	4	5
x_{1j}	2	4	6	5	2
y_{1j}	2	6	7	3	1

Forma dei moltiplicatori per la DMU 1

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 2\,u_1 & & & & \\
\text{soggetto a} \quad & & 2\,v_1 & = & 1 \\
& 2\,u_1 & - 2\,v_1 & \leq & 0 \\
& 6\,u_1 & - 4\,v_1 & \leq & 0 \\
& 7\,u_1 & - 6\,v_1 & \leq & 0 \\
& 3\,u_1 & - 5\,v_1 & \leq & 0 \\
& u_1 & - 2\,v_1 & \leq & 0 \\
& u_1, & v_1 & \geq & 0
\end{aligned}
$$

Esempio (1/3)

- **Passo 1 — i valori del solver.**

$$\tilde{\theta}^{\mathrm{CCR}} = (0{,}6667;\ 1;\ 0{,}7778;\ 0{,}4;\ 0{,}3333)$$

$$\tilde{\theta}^{\mathrm{BCC}} = (1;\ 1;\ 1;\ 0{,}5;\ 1)$$

DMU 1: $\tilde{u}_1 = 0{,}3333$, $\tilde{v}_1 = 0{,}5$, unico peer la DMU 2 con $\tilde{\lambda}_2 = 0{,}3333$; DMU 5 (BCC): scarto $\tilde{s}_1^+ = 1$

- **Passo 2 — verifica del CCR.** Il rapporto y/x diviso per il migliore, 1,5:

$$\tilde{h}_1 = \frac{2/2}{1{,}5} = 0{,}6667, \quad \tilde{h}_3 = \frac{7/6}{1{,}5} = 0{,}7778, \quad \tilde{h}_4 = \frac{3/5}{1{,}5} = 0{,}4$$

Esempio (2/3)

- **Passo 3 — dualità per la DMU 1.** Normalizzazione, efficienza, vincolo attivo della DMU 2:

$$2 \cdot 0{,}5 = 1, \qquad 2 \cdot 0{,}3333 = 0{,}6667, \qquad 6 \cdot 0{,}3333 - 4 \cdot 0{,}5 = 0$$

La DMU virtuale $\tilde{\lambda}_2 \cdot (4, 6)$:

$$0{,}3333 \cdot 4 = 1{,}3333 = 0{,}6667 \cdot 2, \qquad 0{,}3333 \cdot 6 = 2$$

Esempio (3/3)

- **Passo 4 — BCC per la DMU 4.** $\tilde{\lambda}_1 = 0{,}75$, $\tilde{\lambda}_2 = 0{,}25$:

  $$0{,}75 \cdot 2 + 0{,}25 \cdot 4 = 2{,}5 = 0{,}5 \cdot 5, \qquad 0{,}75 \cdot 2 + 0{,}25 \cdot 6 = 3$$

  Efficienza di scala: DMU 4 0,8, DMU 1 0,6667, DMU 3 0,7778

- **Passo 5 — efficienza debole.** La DMU 5 ha $\tilde{\theta}^{\mathrm{BCC}} = 1$, ma la DMU 1 usa lo stesso input e produce 1 in più: con $\tilde{s}_1^+ = 1$ la DMU 5 è debolmente efficiente

Riepilogo: Esempio svolto a mano

- Con un input e un output l'efficienza CCR è (y/x) diviso il migliore
- Il vincolo attivo del primale indica il peer del duale
- Il BCC confronta con combinazioni convesse

Caso di studio e risultati

Introduzione: Caso di studio e risultati

- Dodici filiali, due input e due output
- Efficienze CCR, BCC e di scala, peer e target
- La frontiera in una vista a un input e un output

I dati delle filiali

filiale	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
personale (FTE)	10	25	23	18	17	27	9	24	12	10	20	30
costi (k€)	720	1420	1130	940	990	1620	640	1300	690	500	1020	1370
prestiti (M€)	19,6	60,7	43,5	31,7	39,6	39,7	21,9	34,5	29,2	23,7	42,8	63,5
depositi (M€)	18,5	58,7	63,0	50,5	43,2	73,1	38,0	72,7	28,7	26,3	45,7	62,9

- Dati sintetici realistici generati dallo script con seme fisso (`dea_filiali.csv`)
- FTE: *Full-Time Equivalent*

Il modello in Gurobi

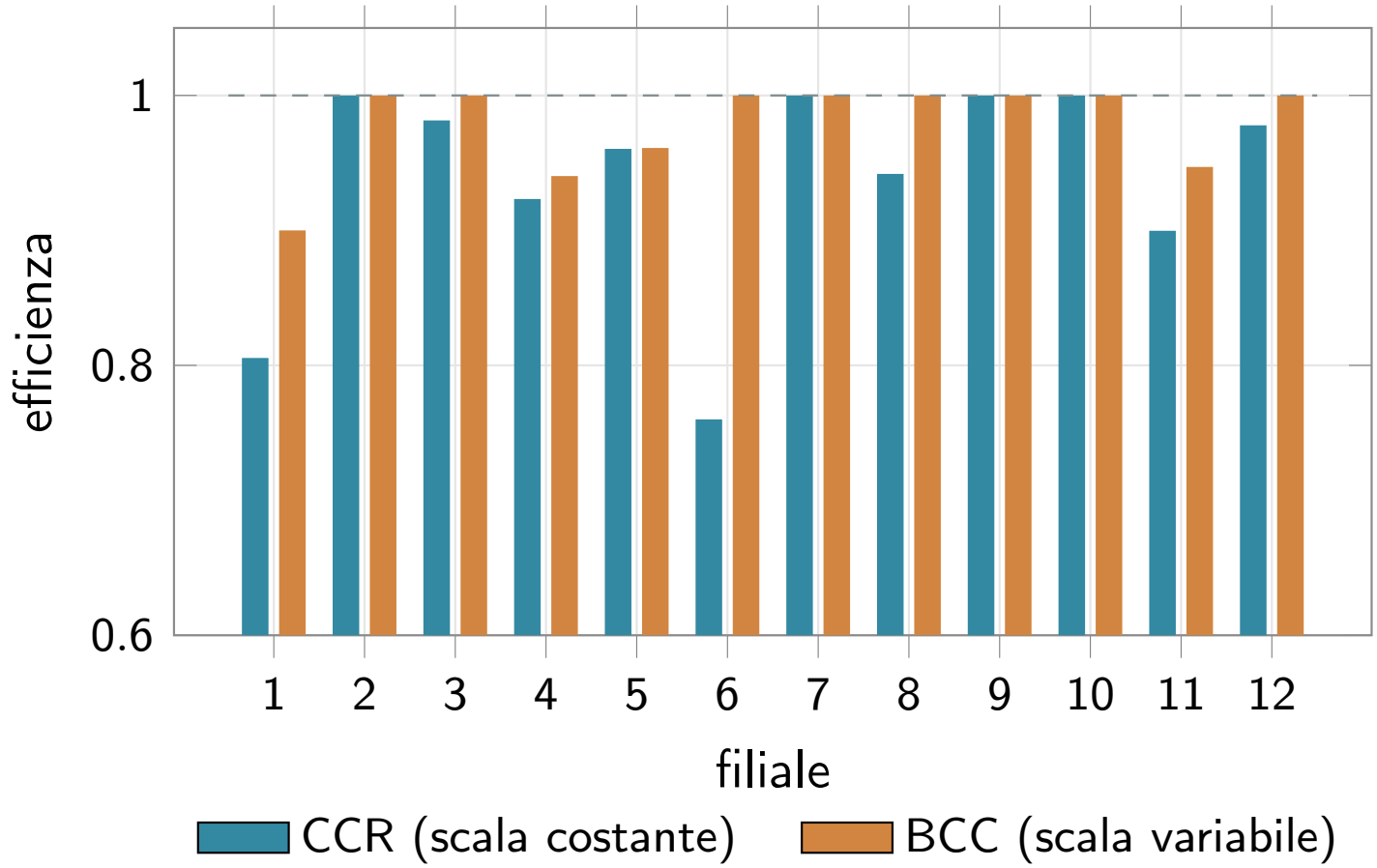
```
def inviluppo(X, Y, o, vrs=False):
    m_, n_ = X.shape           # input x DMU
    p_ = Y.shape[0]            # output
    md = gp.Model("dea_inviluppo")
    theta = md.addVar(lb=-GRB.INFINITY, name="theta")
    lam = md.addVars(n_, name="lambda")
    c_in = md.addConstrs(
        (theta * X[i, o] - gp.quicksum(lam[j] * X[i, j]
         for j in range(n_)) >= 0 for i in range(m_)), name="input")
    c_out = md.addConstrs(
        (gp.quicksum(lam[j] * Y[r, j] for j in range(n_))
         >= Y[r, o] for r in range(p_)), name="output")
    if vrs:                    # BCC: combinazione convessa
        md.addConstr(lam.sum() == 1, name="convessita")
    md.setObjective(theta, GRB.MINIMIZE)
    md.optimize()
    return md, theta, lam, c_in, c_out
```

Risultati

filiale	CCR	BCC	scala	somma lambda (CCR)	rendimenti
1	0.8055	0.9000	0.8950	0.671	crescenti
2	1.0000	1.0000	1.0000	1.000	costanti
3	0.9815	1.0000	0.9815	1.917	decrescenti
4	0.9233	0.9403	0.9819	1.423	decrescenti
5	0.9604	0.9611	0.9993	1.450	decrescenti
6	0.7600	1.0000	0.7600	1.924	decrescenti
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.000	costanti
8	0.9419	1.0000	0.9419	1.913	decrescenti
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.000	costanti
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.000	costanti
11	0.8997	0.9470	0.9501	1.641	decrescenti
12	0.9779	1.0000	0.9779	2.679	decrescenti

- Per tutte le filiali $\tilde{\theta}$ (duale) $= \tilde{h}_o$ (primale)

Efficienze CCR e BCC



- CCR-efficienti: 2, 7, 9, 10; BCC-efficienti anche 3, 6, 8, 12

Peer e target degli input

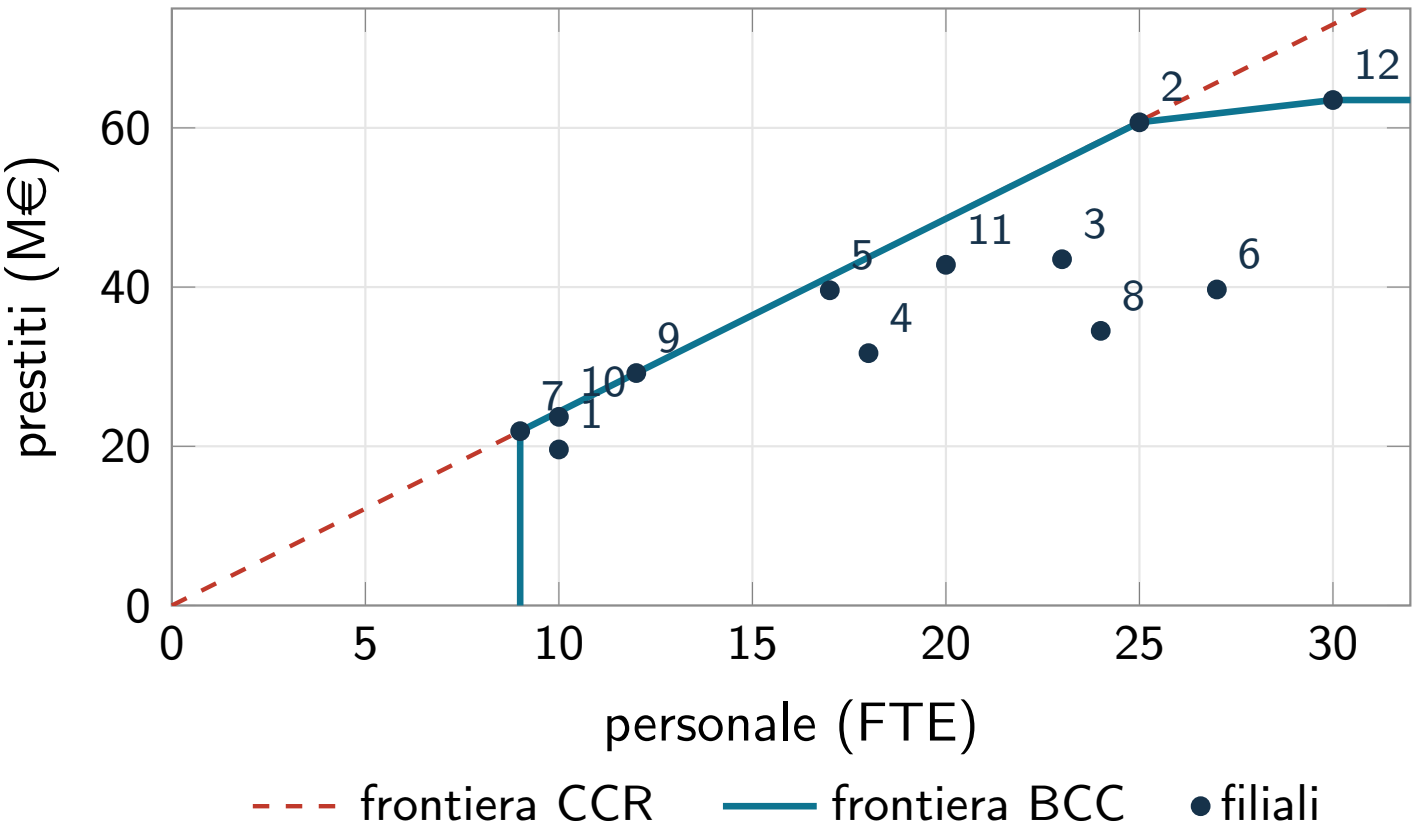
filiale	$\tilde{\theta}$	peer (j: $\tilde{\lambda}_j$)	personale	target	costi	target
1	0,8055	9: 0,671	10	8,05	720	463,2
3	0,9815	7: 1,075; 10: 0,842	23	18,10	1130	1109,1
4	0,9233	7: 1,119; 10: 0,304	18	13,11	940	867,9
5	0,9604	7: 0,223; 9: 1,024; 10: 0,203	17	16,33	990	950,8
6	0,7600	7: 1,924	27	17,31	1620	1231,2
8	0,9419	7: 1,913	24	17,22	1300	1224,4
11	0,8997	2: 0,106; 10: 1,535	20	17,99	1020	917,7
12	0,9779	10: 2,679	30	26,79	1370	1339,7

- Target dopo la seconda fase (`dea_target.csv`)

Insight manageriale

- La filiale 6 è la meno efficiente (0,76) ma è BCC-efficiente: è **troppo grande**
- Unico peer la filiale 7 presa 1,924 volte: rendimenti decrescenti; valutare una divisione in due sportelli
- La filiale 1 è troppo piccola ($\sum \tilde{\lambda}_j = 0{,}671$) e inefficiente anche nel BCC (0,90)
- Alla filiale 1 resta uno scarto di 116,8 k€ sui costi: target 463,2 contro 720

Frontiere efficienti: personale e prestiti



Lettura del grafico

- Vista ridotta a un input e un output: le efficienze cambiano rispetto al modello completo
- Frontiera CCR: semiretta dall'origine con pendenza 2,4333 M€ per FTE (filiale 9)
- Frontiera BCC: spezzata per le filiali 7, 9, 2 e 12
- Sotto la semiretta si paga inefficienza tecnica e di scala; sotto la spezzata solo la tecnica
- Filiale 12: BCC 1, CCR 0,870 nella vista

Riepilogo: Caso di studio e risultati

- Quattro filiali CCR-efficienti, otto BCC-efficienti
- Le filiali 3, 6, 8, 12 hanno solo inefficienza di scala
- Le filiali 7 e 10 sono i peer più citati (cinque volte ciascuna)

Analisi di sensitività

Introduzione: Analisi di sensitività

- Prezzi ombra della forma di inviluppo, verificati per perturbazione
- Stabilità della frontiera: che cosa succede senza un peer

Prezzi ombra: filiale 6

```
filiale 6: theta = 0.7600
 prestiti: y = 39.7 | Pi = 0.00000 | valido in [-inf, 42.13]
 depositi: y = 73.1 | Pi = 0.01040 | valido in [68.89, inf]
Verifica: depositi da 73.1 a 74.1
  -> theta da 0.7600 a 0.7704 (variazione +0.01040)
Peso u del primale = (0.00000, 0.01040)
```

- Vincoli $\geq$ in un minimo: aumentare il termine noto restringe la regione, $\tilde{\theta}$ non scende, prezzi ombra ≥ 0
- Il prezzo ombra dei depositi è il peso $\tilde{u}_2$ del primale

Lettura dei prezzi ombra

- Un milione di depositi in più alza $\tilde{\theta}$ di 0,0104, per qualunque termine noto sopra 68,89
- Il prezzo ombra dei prestiti è nullo fino a 42,13
- La DMU virtuale produce già 2,43 milioni di prestiti in più (lo scarto della seconda fase)

Stabilità: senza la filiale 7

```
  filiale  3: CCR 0.9815 -> 1.0000  <- cambia
  filiale  4: CCR 0.9233 -> 0.9795  <- cambia
  filiale  5: CCR 0.9604 -> 0.9791  <- cambia
  filiale  6: CCR 0.7600 -> 0.9156  <- cambia
  filiale  8: CCR 0.9419 -> 1.0000  <- cambia
Senza la filiale 7: 5 filiali cambiano efficienza;
nuove efficienti: [3, 8]
```

- L'efficienza è **relativa**: una sola DMU sulla frontiera cambia il giudizio su molte
- Prima di agire: controllare i dati dei peer più citati e ripetere l'analisi senza di essi

Riepilogo: Analisi di sensitività

- I prezzi ombra dei vincoli sugli output sono i pesi u_r
- Verificati per perturbazione, con i loro intervalli
- La frontiera dipende dalle DMU osservate

Esercizi

Introduzione: Esercizi

- Cinque esercizi per consolidare i concetti del capitolo
- Verifica, orientamento all'output, efficienza debole, restrizioni sui pesi, super-efficienza
- Si risolvono con lo script del laboratorio

Esercizi (1/2)

- **Verifica.** Con i pesi ottimi della filiale 4 calcolare il rapporto di tutte le filiali: quali hanno rapporto 1? Che relazione c'è con i peer?
- **Orientamento all'output.** Scrivere il CCR orientato all'output e verificare $\tilde{\varphi} = 1/\tilde{\theta}$; nel BCC la relazione non vale in generale
- **Una filiale debolmente efficiente.** Filiale 13 uguale alla 7 ma con costi 700 k€: $\tilde{\theta}$ e scarti?

Esercizi (2/2)

- **Restrizioni sui pesi.** Aggiungere $u_2 \geq u_1$ alla forma dei moltiplicatori: quali filiali restano efficienti?
- **Super-efficienza.** Togliere la DMU o dall'insieme di riferimento ($\lambda_o = 0$) per ordinare le filiali efficienti: quale è la più solida?

Riepilogo (1/2)

Modello:

- Efficienza relativa = rapporto pesato output/input con i pesi più favorevoli
- Charnes–Cooper: forma dei moltiplicatori (LP)
- Duale: forma di inviluppo, $\tilde{\theta} = \tilde{h}_o$, peer e target

Scala:

- BCC con $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$; $\mathrm{SE} = \tilde{\theta}^{\mathrm{CCR}} / \tilde{\theta}^{\mathrm{BCC}}$

Riepilogo (2/2)

Messaggio manageriale:

- Distinguere chi lavora male da chi ha la dimensione sbagliata
- I target dicono di quanto ridurre ogni input

Cautela:

- L'efficienza è relativa alle DMU osservate: controllare i peer più citati