# Produzione e scorte multiperiodali

# Indice

Motivazione gestionale

Costruzione guidata del modello

Esempio svolto a mano

Caso di studio

Risultati

Analisi di sensitività

Esercizi

# Obiettivi (1/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- formulare un LP multiperiodale con vincoli di bilancio delle scorte;
- leggere e verificare i prezzi ombra della capacità e i loro intervalli di validità;

# Obiettivi (2/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- costruire la curva del valore della capacità;
- spiegare come le scorte spostano capacità dai mesi scarichi ai mesi di picco.

# Prerequisiti

- Da questo modulo, Capitolo 2 «Richiami: programmazione lineare e analisi di sensitività»: i prezzi ombra, i loro intervalli di validità e il protocollo di sensitività
- Da questo modulo, Capitolo 3 «Il solver: costruire, risolvere, interpretare»: la costruzione di un LP in `gurobipy` e la lettura di `Pi` e `SARHS`

# Motivazione gestionale

# Introduzione: Motivazione gestionale

- Un'azienda decide quanto **produrre oggi** e quanto **conservare a scorta** per la domanda futura
- Produrre in anticipo costa **giacenza**
- Produrre all'ultimo momento rischia di sbattere contro il limite di **capacità** proprio nei mesi di picco
- Classe del problema: **LP**

# Il compromesso da bilanciare

- Il modello bilancia quattro grandezze:
  - margini
  - capacità
  - scorte
  - stabilità del piano
- È il punto di partenza ideale del laboratorio: **ogni numero ha un'interpretazione economica immediata**

# Dove si incontra questo problema

- Ogni volta che un'azienda pianifica la produzione su **più periodi** con risorse condivise:
  - piani principali di produzione (MPS)
  - pianificazione aggregata
  - contratti di fornitura con profili mensili
- Il nucleo della difficoltà è il **legame intertemporale**: la decisione di oggi (produrre in anticipo o no) cambia i vincoli di domani

# Riepilogo

- Decidere quanto produrre e quanto tenere a scorta in ogni mese
- Il conflitto è tra **costo di giacenza** e **limite di capacità** nei mesi di picco
- Il legame intertemporale impedisce di risolvere i mesi uno alla volta

# Costruzione guidata del modello

# Introduzione: Costruzione guidata del modello

- Descriviamo il problema a parole, poi fissiamo **dati** e **variabili**
- Scriviamo il **modello LP** di produzione e scorte a costo minimo
- Spieghiamo una per una la funzione obiettivo e le famiglie di vincoli
- Capiremo perché il **bilancio delle scorte** è il cuore del modello

# Il problema a parole

- **Decidiamo** quante unità di ogni prodotto produrre in ogni mese e quante tenerne a scorta
- **L'obiettivo** è minimizzare la somma dei costi di produzione e di giacenza sull'intero orizzonte
- **I vincoli** sono due:
  - la contabilità di magazzino deve tornare in ogni mese (ciò che entra uguaglia ciò che esce, e tutta la domanda va servita)
  - le ore macchina usate in un mese non possono superare quelle disponibili

# Dati (input del modello) (1/2)

| Simbolo | Tipo | Significato |
|---|---|---|
| $n$ | $\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ | numero di prodotti; i prodotti sono indicizzati da $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ |
| $m$ | $\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ | numero di mesi dell'orizzonte; i mesi sono indicizzati da $t \in \{1, 2, \ldots, m\}$ |
| $d_{it}$ | $\in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ | domanda del prodotto $i$ nel mese $t$ (unità) |

# Dati (input del modello) (2/2)

| Simbolo | Tipo | Significato |
|---|---|---|
| $c_{it}$ | $\in \mathbb{Q}_{>0}$ | costo di produzione di un'unità di $i$ nel mese $t$ (€) |
| $h_{it}$ | $\in \mathbb{Q}_{>0}$ | costo di giacenza di un'unità di $i$ per il mese $t$ (€) |
| $a_i$ | $\in \mathbb{Q}_{>0}$ | ore macchina per produrre un'unità del prodotto $i$ |
| $b_t$ | $\in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ | ore macchina disponibili nel mese $t$ |
| $s_{i0}$ | $\in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ | scorta iniziale del prodotto $i$ (unità) |

# Variabili decisionali

Introduciamo le seguenti $2\,n\,m$ variabili non negative:

$$\begin{cases} x_{it} = \text{unità del prodotto } i \text{ prodotte nel mese } t \\ s_{it} = \text{unità del prodotto } i \text{ a scorta alla fine del mese } t \end{cases}$$

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \forall t \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Usando queste variabili, scriviamo un modello LP per il problema.

# Modello LP

## Modello LP di produzione e scorte a costo minimo

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{m}\left(c_{it}\,x_{it} + h_{it}\,s_{it}\right) \tag{4.1a}$$

$$\text{soggetto a} \quad s_{i,t-1} + x_{it} = d_{it} + s_{it}, \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,n\},\ \forall t \in \{1,2,\ldots,m\}, \tag{4.1b}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\,x_{it} \le b_t, \qquad \forall t \in \{1,2,\ldots,m\}, \tag{4.1c}$$

$$x_{it} \ge 0, \qquad \forall i \in \{1,2,\ldots,n\},\ \forall t \in \{1,2,\ldots,m\}, \tag{4.1d}$$

$$s_{it} \ge 0, \qquad \forall i \in \{1,2,\ldots,n\},\ \forall t \in \{1,2,\ldots,m\}. \tag{4.1e}$$

# Funzione obiettivo e bilanci delle scorte

- La **funzione obiettivo** lineare minimizza il costo totale del piano: somma dei costi di produzione $c_{it}\, x_{it}$ e di giacenza $h_{it}\, s_{it}$ su tutti i prodotti e i mesi
- I **bilanci delle scorte**: per ogni prodotto e ogni mese, ciò che entra (scorta precedente più produzione) è uguale a ciò che esce (domanda servita più scorta successiva)
  - per $t = 1$ si usa la scorta iniziale $s_{i0}$
  - sono $n\, m$ vincoli lineari

# Capacità e dominio delle variabili

- I **vincoli di capacità**

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \, x_{it} \leq b_t$$

  assicurano che, in ogni mese, le ore macchina usate da tutti i prodotti non superino quelle disponibili

- Sono $m$ vincoli lineari
- I vincoli $x_{it} \geq 0$ e $s_{it} \geq 0$ definiscono le variabili del modello

# Perché il bilancio è il cuore del modello

- È il vincolo che **lega i mesi tra loro**
- Senza di esso il problema si spezzerebbe in $m$ **problemi indipendenti**
- E le scorte non avrebbero alcun senso: nulla collegherebbe quello che resta in magazzino a fine mese con il mese successivo

# Cosa succede se... togliamo il bilancio?

- Il modello **produce zero** (costo minimo!) perché nulla lo obbliga a servire la domanda
- Se invece la domanda totale supera la capacità cumulata, il modello diventa **inammissibile**; in tal caso:
  - o si consente la domanda persa con una variabile $u_{it} \geq 0$ e una penalità $\pi_{it}$ in obiettivo
  - oppure si rivede la capacità

# Riepilogo

- Variabili: $x_{it}$ (produzione) e $s_{it}$ (scorta di fine mese)
- Obiettivo: costi di **produzione** più costi di **giacenza**
- Vincoli: **bilancio delle scorte** per ogni prodotto e mese, **capacità** in ore macchina per ogni mese
- Il bilancio è ciò che rende il problema davvero **multiperiodale**

# Esempio svolto a mano

# Introduzione: Esempio svolto a mano

- Un esempio minimo: **un prodotto** e **due mesi**
- Lo risolviamo interamente a mano, senza solver
- Calcoliamo anche il **prezzo ombra** della capacità per perturbazione, e ritroveremo lo stesso meccanismo nel caso di studio

# Esempio: Un prodotto, due mesi (1/3)

**Dati:**

- domanda $d_1 = 60$, $d_2 = 100$
- capacità $b_1 = b_2 = 80$ unità/mese (con $a = 1$)
- costo di produzione $c = 10$ €, giacenza $h = 1$ €/unità/mese
- scorta iniziale nulla

**Passo 1 — è ammissibile?** Domanda totale 160 $\leq$ capacità totale 160: sì, ma solo producendo al massimo in *entrambi* i mesi.

# Esempio: Un prodotto, due mesi (2/3)

**Passo 2 — bilanci.**

$$x_1 = 60 + s_1, \qquad s_1 + x_2 = 100$$

- Con $x_2 \leq 80$ serve $s_1 \geq 20$, quindi $x_1 \geq 80$
- Ma $x_1 \leq 80$: dunque $x_1 = 80$, $s_1 = 20$, $x_2 = 80$

**Passo 3 — costo.**

$$10 \cdot (80 + 80) + 1 \cdot 20 = 1620 \text{ €}$$

La soluzione è **forzata**: entrambi i vincoli di capacità sono attivi.

# Esempio: Un prodotto, due mesi (3/3)

**Passo 4 — prezzo ombra a mano.**

- Con un'ora in più nel mese 2 ($b_2 = 81$): $x_2 = 81$, $s_1 = 19$, $x_1 = 79$
- Il costo scende di 1 € (un'unità non sta più a scorta un mese): il duale della capacità del mese 2 è $-1$ €/unità
- Con un'ora in più nel mese 1 non cambia nulla (il mese 1 produce già il necessario): duale 0

Il meccanismo — **la capacità di un mese vale quanto giacenza fa risparmiare** — riappare identico nel caso di studio.

# Riepilogo

- Con capacità stretta la soluzione può essere **forzata**: i bilanci la determinano da soli
- Il **prezzo ombra** di una capacità si verifica aggiungendo un'ora e ricalcolando il costo
- Una capacità **non satura** ha prezzo ombra nullo
- Il valore di un'ora in più è la **giacenza risparmiata**

# Caso di studio

# Introduzione: Caso di studio

- Applichiamo il modello a un'istanza realistica: **tre prodotti** su **sei mesi**
- La domanda è **stagionale crescente**, con picco nei mesi 4–5, e la risorsa è unica e condivisa
- Vediamo poi come si scrive il modello in **Python con Gurobi**

# I dati dei prodotti

Tre prodotti ($n = 3$) su sei mesi ($m = 6$):

| Prodotto | $c_i$ (€/u) | $h_i$ (€/u/mese) | $a_i$ (ore/u) | $s_{i0}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 12,00 | 0,80 | 0,9 | 30 |
| 2 | 18,00 | 1,20 | 1,4 | 20 |
| 3 | 25,00 | 1,60 | 2,1 | 10 |

Il prodotto 3 è il più caro **e** il più oneroso in ore macchina: sarà lui a usare il magazzino.

# Capacità e domanda mensile

| mese | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $b_t$ (ore) | 420 | 420 | 460 | 460 | 460 | 420 |
| $d_{1,t}$ | 110 | 130 | 150 | 190 | 210 | 160 |
| $d_{2,t}$ | 70 | 80 | 110 | 140 | 150 | 100 |
| $d_{3,t}$ | 50 | 55 | 60 | 80 | 95 | 70 |

- Dati nei file CSV `produzione_domanda` e `produzione_capacita`
- La capacità cresce di poco ($420 \rightarrow 460$ ore) mentre la domanda cresce molto

# Il modello in Gurobi (1/2)

Variabili e bilanci delle scorte:

```
m = gp.Model("produzione_scorte")
x = m.addVars(prodotti, mesi, name="x")  # prodotto
s = m.addVars(prodotti, mesi, name="s")  # a scorta

# bilancio: scorta entrante + produzione
#           = domanda + scorta uscente
m.addConstrs(
    ((s0[i] if t == 1 else s[i, t-1]) + x[i, t]
     == domanda[i, t] + s[i, t]
     for i in prodotti for t in mesi), name="bilancio")
```

# Il modello in Gurobi (2/2)

Capacità condivisa e funzione obiettivo:

```
# capacita' condivisa (conservo i vincoli per i duali)
v_cap = m.addConstrs(
    (gp.quicksum(a[i] * x[i, t] for i in prodotti)
     <= capacita[t] for t in mesi), name="capacita")

m.setObjective(
    gp.quicksum(c[i]*x[i, t] + h[i]*s[i, t]
                for i in prodotti for t in mesi),
    GRB.MINIMIZE)
m.optimize()
```

# Riepilogo

- Istanza: 3 prodotti, 6 mesi, una sola risorsa condivisa
- Domanda stagionale con picco nei mesi 4–5, capacità quasi costante
- In Gurobi: `addVars` per $x$ e $s$, `addConstrs` per bilanci e capacità
- I vincoli di capacità si **conservano in una variabile** (`v_cap`) per poterne leggere i duali

# Risultati

# Introduzione: Risultati

- Leggiamo il **piano di produzione ottimo** e le **scorte** mese per mese
- Guardiamo i grafici del piano e delle scorte
- Scopriremo la strategia che il solver ha trovato da solo: il **pre-build**

# Il piano di produzione ottimo

Costo totale ottimo: **32.889,33 €**

| unità/mese | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| prod. 1 | 80,0 | 130,0 | 150,0 | 190,0 | 210,0 | 160,0 |
| prod. 2 | 50,0 | 80,0 | 110,0 | 140,0 | 150,0 | 100,0 |
| prod. 3 | 89,5 | 91,0 | 81,4 | 44,3 | 29,0 | 64,8 |

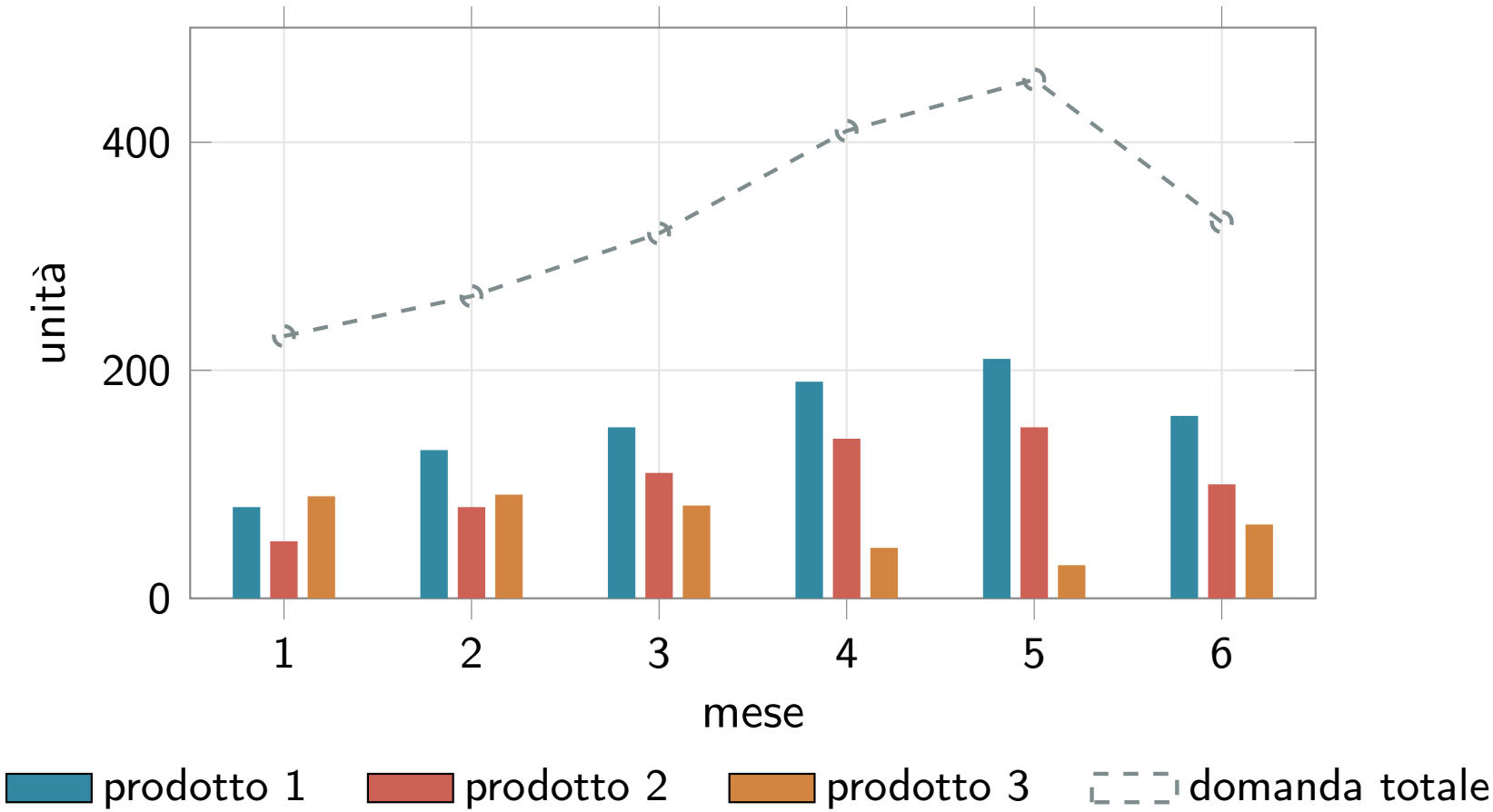
I prodotti 1 e 2 seguono la domanda; il prodotto 3 no.

# Le scorte a fine mese

| unità | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| prod. 1 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| prod. 2 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| prod. 3 | 49,5 | 85,5 | 106,9 | 71,2 | 5,2 | 0,0 |

- Solo il prodotto 3 usa il magazzino
- Le scorte si **azzerano** nel mese finale

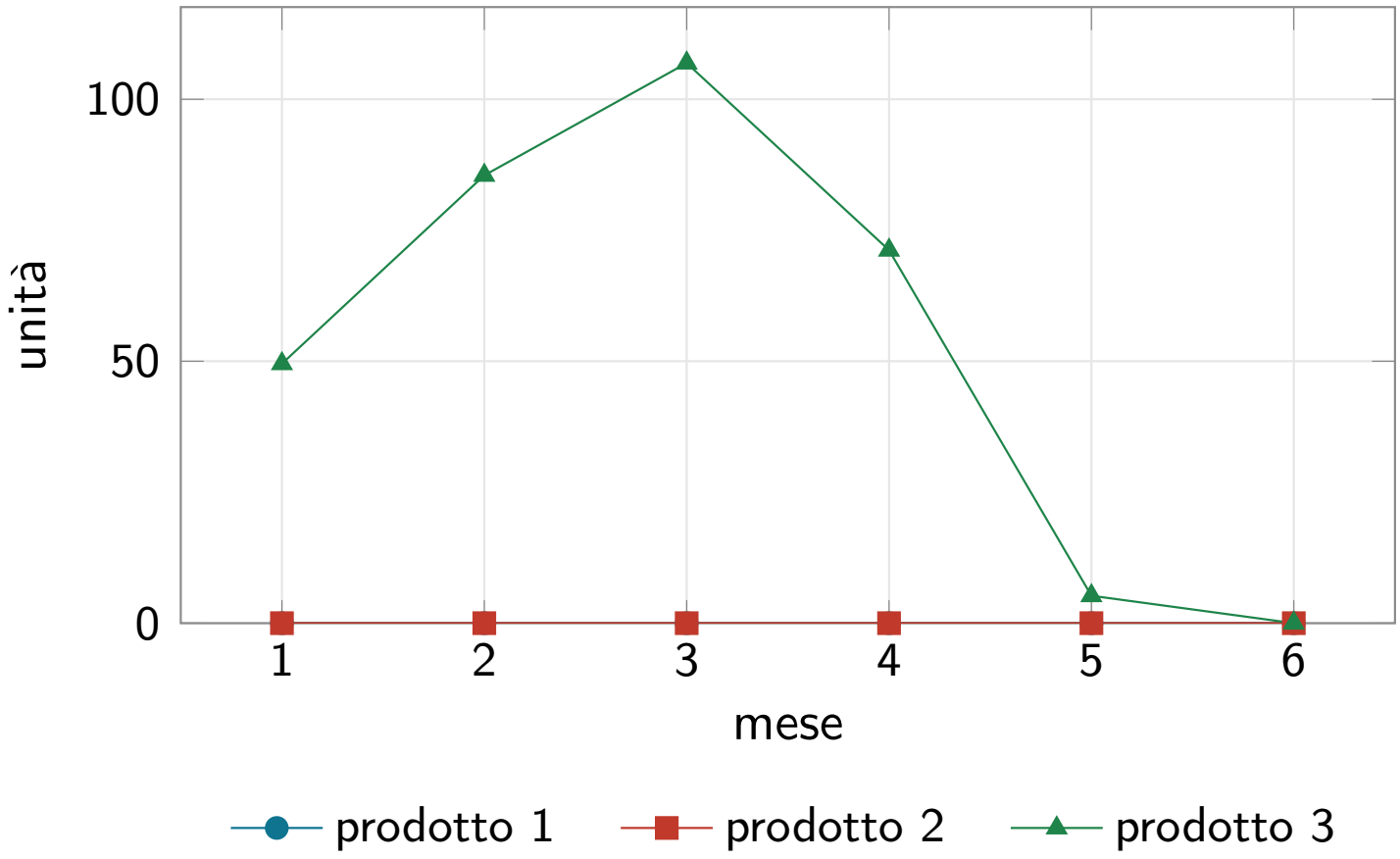
# Piano di produzione ottimo e domanda totale



# Come leggere il grafico del piano

- Le **barre** sono le unità prodotte dei tre prodotti in ciascun mese
- La **linea tratteggiata** è la domanda totale del mese
- Nei mesi di picco (4–5) la produzione totale resta **sotto** la domanda
- La differenza è coperta dalle **scorte del prodotto 3** accumulate nei primi mesi

# Scorte di fine mese




Solo il prodotto 3 usa il magazzino (strategia di **pre-build**).

# La strategia del pre-build (1/2)

- Il solver ha scoperto **da solo** la strategia del *pre-build*
- I prodotti 1 e 2 (margini di giacenza alti rispetto alle ore assorbite) vengono prodotti **su domanda**
- Il prodotto 3 — il più oneroso in ore macchina — viene prodotto in anticipo nei mesi 1–3 e accumulato (fino a 107 unità a scorta)
- Così si **libera capacità** nei mesi di picco

# La strategia del pre-build (2/2)

- Le scorte tornano a **zero** nel mese finale
- Una scorta terminale positiva sarebbe denaro sprecato, e il modello lo sa
- Nessuno ha "insegnato" il pre-build al solver: è una conseguenza dei bilanci e dei vincoli di capacità

# Riepilogo

- Costo totale ottimo: **32.889,33 €**
- Prodotti 1 e 2 prodotti su domanda; prodotto 3 in **pre-build**
- Le scorte sono uno strumento per **spostare capacità** dai mesi scarichi ai mesi di picco
- Scorta terminale nulla: è sempre ottimo svuotare il magazzino alla fine

# Analisi di sensitività

# Introduzione: Analisi di sensitività

- Leggiamo i **prezzi ombra** della capacità mese per mese, con i loro intervalli di validità
- Ne ricaveremo un'interpretazione economica **esatta**
- Costruiamo infine la **curva del valore della capacità**

# Prezzi ombra della capacità

| mese | uso | $\Pi$ (€/ora) | validità di $b_t$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 330,0 / 420 | 0,000 | $[330{,}0, +\infty)$ |
| 2 | 420,0 / 420 | $-0{,}762$ | $[330{,}0, 524{,}0]$ |
| 3 | 460,0 / 460 | $-1{,}524$ | $[370{,}0, 564{,}0]$ |
| 4 | 460,0 / 460 | $-2{,}286$ | $[370{,}0, 564{,}0]$ |
| 5 | 460,0 / 460 | $-3{,}048$ | $[399{,}0, 564{,}0]$ |
| 6 | 420,0 / 420 | $-3{,}810$ | $[330{,}0, 431{,}0]$ |

Verifica: $+1$ ora nel mese 6 porta il costo da 32889,33 a 32885,52 (delta $-3{,}810$).

# Come leggere i prezzi ombra

- Il mese 1 **non è saturo** (330 ore su 420): il suo prezzo ombra è nullo
- Tutti gli altri mesi sono saturi e hanno prezzo ombra **negativo**: un'ora in più *riduce* il costo
- Il valore cresce di mese in mese: l'ora più preziosa è quella del **mese 6**
- L'intervallo di validità dice entro quali valori di $b_t$ il prezzo ombra resta quello

# Da dove viene il numero 0,762 (1/2)

- I duali crescono di esattamente 0,762 € al mese: non è un caso

$$0{,}762 = \frac{h_3}{a_3} = \frac{1{,}6}{2{,}1}$$

- Un'ora in più nel mese $t$ permette di produrre $1/a_3$ unità del prodotto 3 *un mese più tardi*
- Si risparmia così un mese di giacenza: $h_3 \cdot (1/a_3)$

# Da dove viene il numero 0,762 (2/2)

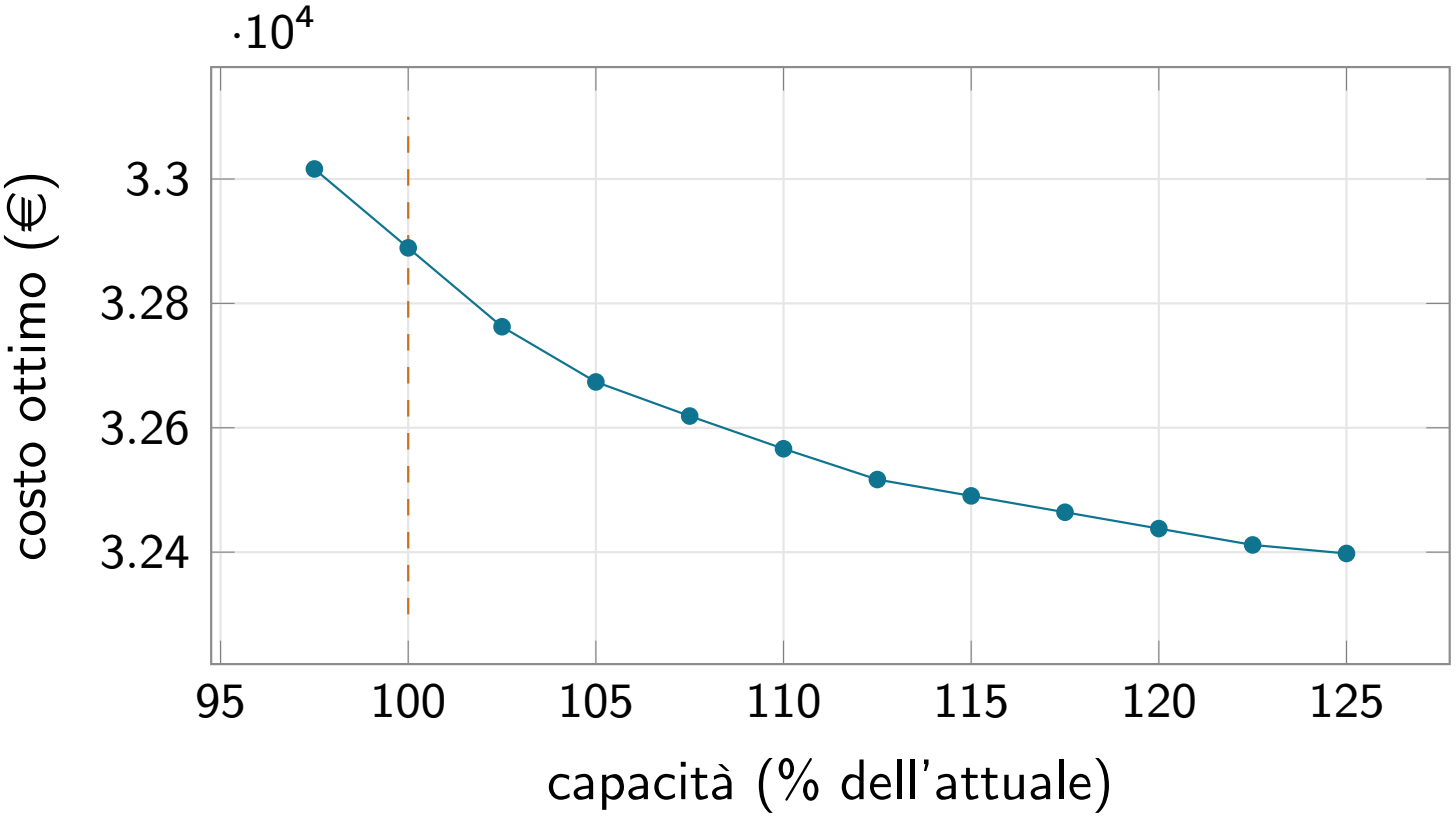
- Il duale del mese 6 vale

$$5 \times 0{,}762 = 3{,}81 \text{ €/ora}$$

  perché un'ora lì evita **cinque mesi** di giacenza a un'unità prodotta nel mese 1

- Quando il solver e un ragionamento economico elementare danno lo stesso numero, il modello è probabilmente **giusto**

# Curva del valore della capacità




La linea tratteggiata arancione segna la capacità corrente.

# Come leggere la curva del valore della capacità

- La curva è **convessa e decrescente**: le prime ore extra valgono molto, poi sempre meno
- Sotto il **97%** dell'attuale capacità il modello diventa **inammissibile**: la domanda non è più servibile per intero
- È un'informazione gestionale preziosa quanto l'ottimo stesso

# La variante quadratica

- Un piano **regolare** penalizza le variazioni della produzione da un mese all'altro
- Serve un termine quadratico nell'obiettivo: il modello **non è più un LP**
- È la variante quadratica di questo modello, nel modulo *Modellazione PNL*: «Produzione con smoothing quadratico»

# La raccomandazione gestionale

Raccomandazione tipo da relazione di laboratorio:

- Conviene acquistare **ore straordinarie** nei mesi 5–6 fino a 3–3,8 €/ora sotto il prezzo interno
- Sotto il **97%** della capacità attuale il servizio completo non è garantibile

# Riepilogo

- I prezzi ombra della capacità crescono di $h_3/a_3 = 0{,}762$ € al mese
- Il mese non saturo ha prezzo ombra nullo; il mese 6 è il più prezioso (3,81 €/ora)
- La curva del valore della capacità è **convessa e decrescente**, e si interrompe al 97%

# Esercizi

# Introduzione: Esercizi

- Cinque esercizi da svolgere con lo script del caso di studio
- Verificano i prezzi ombra, estendono il modello (domanda persa, profitto, emissioni) e provano una politica di scorta di sicurezza

# Esercizio: verifica

- Verificare per perturbazione i duali dei mesi 3 e 4 (aggiungere un'ora e riottimizzare)
- Perché il duale del mese 1 è nullo?

# Esercizio: domanda persa

- Aggiungere la variabile $u_{it}$ (domanda non servita) con penalità $\pi = 40$ €/unità
- Ridurre la capacità al 90%
- Quanta domanda si perde, di quale prodotto, in quali mesi? Interpretare la scelta del modello

# Esercizio: massimo profitto

- Trasformare il modello in massimizzazione del profitto con ricavi $p = (20, 30, 42)$ €
- Rendere il servizio facoltativo con $y_{it} \leq d_{it}$
- Quale domanda conviene *non* servire, e perché?

# Esercizio: emissioni

- Ogni unità del prodotto 3 emette 2,5 kg di $CO_2$, i prodotti 1 e 2 un kg
- Aggiungere all'obiettivo il termine

$$\tau \sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{m} e_i \, x_{it}$$

- Tracciare la frontiera costo-emissioni per $\tau \in [0, 10]$ €/kg

# Esercizio: scorta di sicurezza

- Imporre la scorta di sicurezza del 10%:

$$s_{it} \geq 0{,}1\, d_{i,t+1}$$

- Quanto costa questa politica?
- Quale vincolo di capacità diventa più critico?

# Riepilogo

- Verifica dei duali per perturbazione
- Estensioni del modello: **domanda persa**, **massimo profitto**, **emissioni**
- Politiche di magazzino: **scorta di sicurezza** e il suo costo

# Riepilogo finale (1/2)

**Modello:**

- LP multiperiodale con variabili di produzione $x_{it}$ e di scorta $s_{it}$
- Bilancio delle scorte in ogni prodotto e mese, capacità in ore macchina
- Il bilancio è ciò che lega i mesi tra loro

**Soluzione ottima:**

- Costo 32.889,33 €; pre-build del prodotto 3 nei mesi 1–3
- Scorta terminale nulla

# Riepilogo finale (2/2)

**Lettura economica:**

- Prezzi ombra della capacità = giacenza risparmiata, $h_3/a_3$ per mese
- Curva del valore della capacità convessa e decrescente, inammissibile sotto il 97%