Richiami: programmazione lineare e analisi di sensitività

Indice

Teoria della programmazione lineare
- La dualità
- Le condizioni di ottimalità: gli scarti complementari
- L'analisi di sensitività e i prezzi ombra

Il protocollo di analisi di sensitività

Obiettivi (1/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- scrivere il duale di un LP in forma generale con le regole di conversione;
- verificare l'ottimalità con gli scarti complementari;
- dedurre il segno di un prezzo ombra dal verso del vincolo e dal verso dell'obiettivo;

Obiettivi (2/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- leggere un prezzo ombra e un costo ridotto insieme ai loro intervalli di validità;
- applicare i sei passi del protocollo di sensitività.

Prerequisiti

- Dal modulo *Programmazione lineare*, Capitolo 9 «Teoria della dualità»: il duale di un problema di programmazione lineare, la dualità debole e forte, gli scarti complementari
- Dal modulo *Programmazione lineare*, Capitolo 14 «Analisi di sensitività»: prezzi ombra, costi ridotti e i loro intervalli di validità

Di che cosa parliamo

- Raccogliamo gli **strumenti teorici** usati in tutto il corso
- La *teoria della programmazione lineare*: dualità, condizioni di ottimalità, analisi di sensitività
- La teoria completa è nel modulo **Programmazione lineare**
- Chiude il **protocollo di sensitività** usato in ogni laboratorio
- Serve anche da riferimento rapido

Teoria della programmazione lineare

Introduzione: Teoria della programmazione lineare

- Ogni LP di massimo ha un problema **duale** di minimo
- Le variabili duali sono i **prezzi ombra**: il valore di un'unità in più di risorsa
- Gli **scarti complementari** dicono quando una coppia primale-duale è ottima
- L'**analisi di sensitività** dice come cambia l'ottimo quando cambiano i dati: è la domanda che interessa al decisore

Insiemi e dati

- $M = \{1, 2, \ldots, m\}$: indici dei vincoli; $N = \{1, 2, \ldots, n\}$: indici delle variabili
- **Dati**: costi $c_j \in \mathbb{R}$ $(j \in N)$, coefficienti $a_{ij} \in \mathbb{R}$, termini noti $b_i \in \mathbb{R}$ $(i \in M)$
- $M_{\leq}$, $M_{=}$, $M_{\geq}$ ripartiscono M secondo il verso del vincolo
- $N_{\geq 0}$, $N_{\gtreqless 0}$, $N_{\leq 0}$ ripartiscono N secondo il segno della variabile (non negative, libere, non positive)
- **Variabili**: le x_j del primale e, nel duale, una π_i per ciascuno degli m vincoli del primale

Il primale (P)

Il primale (P), forma generale

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{P}) \qquad \max \quad & \sum_{j \in N} c_j \, x_j \\
\text{soggetto a} \quad & \sum_{j \in N} a_{ij} \, x_j \leq b_i, \quad \forall i \in M_{\leq}, \\
& \sum_{j \in N} a_{ij} \, x_j = b_i, \quad \forall i \in M_{=}, \\
& \sum_{j \in N} a_{ij} \, x_j \geq b_i, \quad \forall i \in M_{\geq}, \\
& x_j \geq 0, \quad \forall j \in N_{\geq 0}, \\
& x_j \gtreqless 0, \quad \forall j \in N_{\gtreqless 0}, \\
& x_j \leq 0, \quad \forall j \in N_{\leq 0}.
\end{aligned}
$$

Il primale (P) (2/2)

- Tre versi di vincolo ($\leq$, $=$, $\geq$) e tre segni di variabile (non negativa, libera, non positiva)

Il duale (D)

Il duale (D), forma generale

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{D}) \qquad \min \quad & \sum_{i \in M} b_i \, \pi_i \\
\text{soggetto a} \quad & \sum_{i \in M} a_{ij} \, \pi_i \geq c_j, \quad \forall j \in N_{\geq 0}, \\
& \sum_{i \in M} a_{ij} \, \pi_i = c_j, \quad \forall j \in N_{\gtreqless 0}, \\
& \sum_{i \in M} a_{ij} \, \pi_i \leq c_j, \quad \forall j \in N_{\leq 0}, \\
& \pi_i \geq 0, \quad \forall i \in M_{\leq}, \\
& \pi_i \gtreqless 0, \quad \forall i \in M_{=}, \\
& \pi_i \leq 0, \quad \forall i \in M_{\geq}.
\end{aligned}
$$

Il duale (D) (2/2)

- Il segno di π_i dipende dal verso del vincolo i del primale

Le regole della dualità (1/2)

Ogni vincolo del primale genera una variabile duale, ogni variabile del primale un vincolo duale:

Primale (max)	Duale (min)
vincolo $\leq b_i \quad (i \in M_{\leq})$	variabile $\pi_i \geq 0$
vincolo $= b_i \quad (i \in M_{=})$	variabile $\pi_i \gtreqless 0$
vincolo $\geq b_i \quad (i \in M_{\geq})$	variabile $\pi_i \leq 0$
variabile $x_j \geq 0 \quad (j \in N_{\geq 0})$	vincolo $\geq c_j$
variabile $x_j \gtreqless 0 \quad (j \in N_{\gtreqless 0})$	vincolo $= c_j$
variabile $x_j \leq 0 \quad (j \in N_{\leq 0})$	vincolo $\leq c_j$

Le regole della dualità (2/2)

Due letture veloci:

- le *uguaglianze* del primale danno variabili duali *libere* (e viceversa)
- in un massimo un vincolo $\leq$ di risorsa ha $\pi_i \geq 0$ (più risorsa, più valore)

Per un primale di *minimo* la tabella si legge da destra a sinistra

I teoremi della dualità

- La coppia primale-duale è legata dai **due teoremi della dualità**
- Nel primo la *barra* indica una soluzione ammissibile qualsiasi
- Nel secondo la *tilde* indica una soluzione ottima

Dualità debole

Teorema della dualità debole

Per ogni soluzione ammissibile $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ del primale (P) e ogni soluzione ammissibile $(\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2, \ldots, \bar{\pi}_m)$ del duale (D) vale

$$\sum_{j \in N} c_j \, \bar{x}_j \;\leq\; \sum_{i \in M} b_i \, \bar{\pi}_i .$$

Dualità forte

Teorema della dualità forte

Il primale (P) ha una soluzione ottima $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$ *se e solo se* il duale (D) ha una soluzione ottima $(\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \ldots, \tilde{\pi}_m)$, e in tal caso i due valori ottimi coincidono:

$$\sum_{j \in N} c_j \, \tilde{x}_j \;=\; \sum_{i \in M} b_i \, \tilde{\pi}_i .$$

Che cosa dicono i due teoremi

- **Dualità debole**: ogni soluzione ammissibile del duale è un *limite superiore* per il valore del primale di massimo (e ogni soluzione ammissibile del primale un limite inferiore per il duale)
- Se due soluzioni ammissibili hanno lo stesso valore, sono entrambe ottime
- **Dualità forte**: all'ottimo questo accade sempre, il divario si chiude
- Esistenza non significa unicità: gli ottimi possono essere più d'uno, ma i valori ottimi coincidono

Esempio: il duale dell'LP 2×2 (1/3)

Applichiamo le regole all'LP 2×2, che è proprio nella forma canonica di massimo (vincoli $\leq$, variabili non negative):

$$
\begin{array}{rrcrcr}
\max & 30\,x_1 & + & 50\,x_2 & & \\
\text{soggetto a} & x_1 & + & 3\,x_2 & \leq & 90 \\
& 2\,x_1 & + & x_2 & \leq & 80 \\
& x_1, & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Esempio: il duale dell'LP 2×2 (2/3)

- **Passo 1 — ogni vincolo genera una variabile duale.** Due vincoli $\leq$ in un massimo $\Rightarrow \pi_1, \pi_2 \geq 0$
- **Passo 2 — ogni variabile genera un vincolo duale.** I coefficienti sono le *colonne* del primale, i termini noti i costi:
  - da $x_1 \geq 0$ nasce $\pi_1 + 2\pi_2 \geq 30$
  - da $x_2 \geq 0$ nasce $3\pi_1 + \pi_2 \geq 50$
- **Passo 3 — l'obiettivo scambia i ruoli**: i termini noti $(90, 80)$ diventano i costi del duale, che è un problema di *minimo*

Esempio: il duale dell'LP 2×2 (3/3)

Il duale è:

$$
\begin{array}{rrcrcr}
\min & 90\,\pi_1 & + & 80\,\pi_2 & & \\
\text{soggetto a} & \pi_1 & + & 2\,\pi_2 & \geq & 30 \\
& 3\,\pi_1 & + & \pi_2 & \geq & 50 \\
& \pi_1, & & \pi_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Esempio: tutti i casi in un solo LP (1/3)

Un LP di *minimo* con tutti i casi della tabella: tre variabili con i tre segni e tre vincoli con i tre versi (la tabella si legge da destra a sinistra):

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
\min & 5x_1 & + 8x_2 & - 9x_3 & & & \\
\text{soggetto a} & x_1 & + x_2 & & \geq & 30 \\
& x_1 & + x_2 & - x_3 & = & 100 \\
& x_1 & - 2x_2 & & \leq & -20 \\
& x_1 & & & \geq & 0 \\
& & x_2 & & \lessgtr & 0, \\
& & & x_3 & \leq & 0
\end{array}
$$

Esempio: tutti i casi in un solo LP (2/3)

- **Passo 1 — le variabili duali**, una per vincolo, con il segno dato dal verso:
  - $\pi_1 \geq 0$ (vincolo $\geq$ in un minimo)
  - $\pi_2 \gtreqless 0$ (uguaglianza)
  - $\pi_3 \leq 0$ (vincolo $\leq$ in un minimo)
- **Passo 2 — i vincoli duali**, uno per variabile, con il verso dato dal segno:
  - da $x_1 \geq 0$ nasce $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \leq 5$
  - da $x_2 \gtreqless 0$ nasce $\pi_1 + \pi_2 - 2\pi_3 = 8$
  - da $x_3 \leq 0$ nasce $-\pi_2 \geq -9$
- **Passo 3 — l'obiettivo**: il duale è un massimo,
  $\max\ 30\pi_1 + 100\pi_2 - 20\pi_3$

Esempio: tutti i casi in un solo LP (3/3)

Il duale è:

$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
\max & 30\,\pi_1 & + & 100\,\pi_2 & - & 20\,\pi_3 & & \\
\text{soggetto a} & \pi_1 & + & \pi_2 & + & \pi_3 & \leq & 5 \\
 & \pi_1 & + & \pi_2 & - & 2\,\pi_3 & = & 8 \\
 & & - & \pi_2 & & & \geq & -9 \\
 & \pi_1 & & & & & \geq & 0 \\
 & & & \pi_2 & & & \lessgtr & 0, \\
 & & & & & \pi_3 & \leq & 0
\end{array}
$$

Scarti e costi ridotti

A ogni vincolo del primale associamo il suo *scarto* $\bar{s}_i$, e a ogni variabile il suo *costo ridotto* $\bar{c}_j$, cioè lo scarto del corrispondente vincolo *duale*:

$$\bar{s}_i = \sum_{j \in N} a_{ij}\, \bar{x}_j - b_i, \quad \forall i \in M, \qquad \bar{c}_j = c_j - \sum_{i \in M} a_{ij}\, \bar{\pi}_i, \quad \forall j \in N$$

- Lo scarto misura quanto il vincolo i è lontano dall'essere attivo
- Il costo ridotto misura il coefficiente c_j al netto del valore delle risorse consumate da x_j, valutate con le variabili duali

Condizioni di ottimalità

Condizioni di ottimalità dell'LP (scarti complementari)

Una coppia di soluzioni ammissibili, $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ per il primale (P) e $(\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2, \ldots, \bar{\pi}_m)$ per il duale (D), è ottima per entrambi i problemi *se e solo se*

$$\bar{\pi}_i \cdot \bar{s}_i = 0, \quad \forall i \in M,$$

$$\bar{x}_j \cdot \bar{c}_j = 0, \quad \forall j \in N.$$

Gli scarti complementari in parole

- **Vincolo lasco $\Rightarrow$ duale a zero**

$$\bar{s}_i \neq 0 \Rightarrow \bar{\pi}_i = 0$$

- **Variabile diversa da zero $\Rightarrow$ costo ridotto nullo**

$$\bar{x}_j \neq 0 \Rightarrow \bar{c}_j = 0$$

- All'ottimo sono *implicazioni*, non equivalenze: per la degenerazione un vincolo attivo può avere duale nullo, e una variabile a zero costo ridotto nullo
- Gli esempi di verifica più avanti controllano proprio queste condizioni

Due letture per il laboratorio (1/3)

Prezzo ombra $\tilde{\pi}_i$: il valore marginale del termine noto b_i,

$$\tilde{\pi}_i = \frac{\partial \tilde{z}}{\partial b_i}$$

- Vale per b_i nell'*intervallo di validità del termine noto* $[b_i^{\min}, b_i^{\max}]$
- È il più grande intervallo in cui, variando solo b_i, il prezzo ombra resta esattamente $\tilde{\pi}_i$ (oltre, cambia e va ricalcolato)
- Caso particolare: vincolo non attivo $\Rightarrow \tilde{\pi}_i = 0$

Due letture per il laboratorio (2/3)

Costo ridotto $\bar{c}_j$ (lo scarto del vincolo duale):

- per una variabile a zero dice di quanto deve migliorare c_j perché convenga attivarla
- vale per c_j nell'*intervallo di validità del coefficiente* $[c_j^{\min}, c_j^{\max}]$: il più grande intervallo in cui, variando solo c_j, la soluzione ottima non cambia
- per una variabile a zero la soglia di convenienza è proprio uno dei due estremi
- caso particolare: variabile diversa da zero $\Rightarrow \bar{c}_j = 0$

Due letture per il laboratorio (3/3)

Attenzione alla degenerazione:

- può esistere una variabile *a zero con costo ridotto nullo*, anche se non viene usata
- vale quindi solo l'implicazione

$$\bar{c}_j \neq 0 \Rightarrow \text{variabile su un suo bound}$$

non il viceversa

I segni dei prezzi ombra (1/4)

Il prezzo ombra è sempre, con un'unica convenzione,

$$\tilde{\pi}_i = \frac{\partial \tilde{z}}{\partial b_i}$$

la derivata del valore ottimo rispetto al termine noto del vincolo i: di quanto cambia $\tilde{z}$ se b_i aumenta di una (piccola) unità

Il segno si deduce sempre rispondendo a **due domande**

I segni dei prezzi ombra (2/4)

- **Aumentare b_i allarga o restringe la regione ammissibile?**
  - con un vincolo $\leq$ la allarga (il tetto si alza)
  - con un vincolo $\geq$ la restringe (la richiesta cresce)
  - con un'uguaglianza la sposta soltanto
- **Una regione più ampia come cambia l'ottimo?**
  - non può mai peggiorarlo
  - in un minimo il valore ottimo scende o resta uguale
  - in un massimo sale o resta uguale

I segni dei prezzi ombra (3/4)

Combinando le due risposte:

Verso del vincolo	minimo	massimo
$\leq$ (b_i cresce $\Rightarrow$ regione più ampia)	$\tilde{\pi}_i \leq 0$	$\tilde{\pi}_i \geq 0$
$\geq$ (b_i cresce $\Rightarrow$ regione più stretta)	$\tilde{\pi}_i \geq 0$	$\tilde{\pi}_i \leq 0$
$=$	segno qualunque (duale libera)	

I segni dei prezzi ombra (4/4)

Due letture tipiche in un *minimo*:

- un vincolo $\leq$ (una capacità) ha $\tilde{\pi}_i \leq 0$: allentarlo riduce il costo, e $|\tilde{\pi}_i|$ è il risparmio per ogni unità di capacità in più
- un vincolo $\geq$ (una richiesta da soddisfare) ha $\tilde{\pi}_i \geq 0$: alzare la richiesta costa, e $\tilde{\pi}_i$ è il costo marginale

In un *massimo* le letture si ribaltano

In ogni caso un vincolo non attivo ha $\tilde{\pi}_i = 0$ per complementarietà

Esempio: dualità sull'LP 2×2 (1/4)

Riprendiamo l'LP 2×2 e il suo duale e verifichiamo le condizioni di ottimalità.

Passo 1 — risolvendo si ottiene:

$$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = (30,\, 20), \qquad \tilde{z} = 1900,$$

$$(\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2) = (14,\, 8), \qquad (\bar{c}_1, \bar{c}_2) = (0,\, 0)$$

con intervalli di validità

$$[b_1^{\min}, b_1^{\max}] = [40, 240], \qquad [b_2^{\min}, b_2^{\max}] = [30, 180],$$
$$[c_1^{\min}, c_1^{\max}] = [50/3,\, 100], \quad [c_2^{\min}, c_2^{\max}] = [15,\, 90].$$

Entrambi i vincoli sono attivi.

Esempio: dualità sull'LP 2×2 (2/4)

Passo 2 — verifica dei prezzi ombra.

- Una unità in più di b_1 vale 14, una unità in più di b_2 vale 8
- $\tilde{x}_1$ e $\tilde{x}_2$ sono diverse da zero: per gli scarti complementari i loro vincoli duali devono essere attivi ($\bar{c}_1 = \bar{c}_2 = 0$):

$$\tilde{\pi}_1 + 2\tilde{\pi}_2 = 14 + 16 = 30 = c_1, \qquad 3\tilde{\pi}_1 + \tilde{\pi}_2 = 42 + 8 = 50 = c_2 \quad \checkmark$$

Esempio: dualità sull'LP 2×2 (3/4)

Passo 3 — verifica della dualità forte.

$$\sum_{i \in M} b_i \, \tilde{\pi}_i = 90 \cdot 14 + 80 \cdot 8 = 1260 + 640 = 1900 = \tilde{z} \quad \checkmark$$

Esempio: dualità sull'LP 2×2 (4/4)

Passo 4 — verifica dei costi ridotti. Con $\bar{c}_j = c_j - \sum_{i \in M} a_{ij}\, \tilde{\pi}_i$:

$$\bar{c}_1 = 30 - (1 \cdot 14 + 2 \cdot 8) = 0, \qquad \bar{c}_2 = 50 - (3 \cdot 14 + 1 \cdot 8) = 0$$

- Entrambi nulli, come per ogni variabile positiva all'ottimo: le due variabili ripagano esattamente le risorse che consumano
- Un costo ridotto diverso da zero può averlo solo una variabile che sta su un proprio bound

Esempio: verifica su tutti i casi (1/5)

Riprendiamo l'LP "tutti i casi" e il suo duale: i casi sono gli stessi che torneranno, uno alla volta, nei capitoli applicativi.

Passo 1 — risolvendo si ottiene:

$$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = (60,\ 40,\ 0), \qquad \tilde{z} = 620,$$

$$(\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \tilde{\pi}_3) = (0,\ 6,\ -1), \qquad (\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3) = (0,\ 0,\ -3)$$

- intervalli dei termini noti: $(-\infty, 100]$, $[30, +\infty)$, $[-200, +\infty)$
- intervalli dei coefficienti: $(-\infty, 8]$, $[5, 17]$, $(-\infty, -6]$
- sono attivi il secondo e il terzo vincolo, con $\tilde{x}_3 = 0$

Esempio: verifica su tutti i casi (2/5)

Passo 2 — prezzi ombra con le regole della tabella.

- $\tilde{\pi}_1 = 0$, coerente con la complementarietà: il primo vincolo è lasco ($\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = 100 > 30$)
- $\tilde{\pi}_2 = 6$ (variabile duale libera, qui positiva)
- $\tilde{\pi}_3 = -1 \leq 0$, come dev'essere per un vincolo $\leq$ in un minimo

Esempio: verifica su tutti i casi (3/5)

I vincoli duali di x_1 e x_2 (diverse da zero) devono essere attivi:

$$\underbrace{0+6-1}_{x_1} = 5 = c_1, \qquad \underbrace{0+6-2\cdot(-1)}_{x_2} = 8 = c_2 \quad \checkmark$$

(x_2 è libera: il suo vincolo duale è di uguaglianza)

Verifica per perturbazione:

$$b_2 = 101 \;\Rightarrow\; \tilde{z} = 626\ (+6), \qquad b_3 = -19 \;\Rightarrow\; \tilde{z} = 619\ (-1) \quad \checkmark$$

Esempio: verifica su tutti i casi (4/5)

Passo 3 — verifica della dualità forte.

$$\sum_{i \in M} b_i \, \tilde{\pi}_i = 30 \cdot 0 + 100 \cdot 6 + (-20) \cdot (-1) = 620 = \tilde{z} \quad \checkmark$$

Passo 4 — costi ridotti, uno per segno. Con $\bar{c}_j = c_j - \sum_{i \in M} a_{ij} \, \tilde{\pi}_i$:

$$\bar{c}_1 = 5 - (0 + 6 - 1) = 0, \qquad \bar{c}_2 = 8 - (0 + 6 + 2) = 0$$

coerente con $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \neq 0$

Esempio: verifica su tutti i casi (5/5)

x_3 vale zero, che per una variabile ≤ 0 è il suo *bound superiore*:

$$\bar{c}_3 = -9 - (-1) \cdot 6 = -3$$

- forzare $x_3 = -1$ peggiorerebbe l'ottimo di 3
- x_3 si attiverebbe solo se il suo coefficiente salisse almeno a -6 (proprio l'estremo $c_3^{\max}$ dell'intervallo di validità)

Verifica:

$$x_3 = -1 \;\Rightarrow\; \tilde{z} = 623\ (+3) \quad \checkmark$$

L'analisi di sensitività

- Risolvere un LP dà una soluzione ottima
- L'**analisi di sensitività** risponde alla domanda successiva, quella che interessa davvero un decisore:

  come cambia l'ottimo se cambiano i dati?
- Negli LP gran parte della risposta arriva gratis insieme alla soluzione, sotto forma di **quattro numeri** per ogni vincolo e variabile

I quattro numeri (1/2)

- Il **prezzo ombra** $\tilde{\pi}_i$ di un vincolo: di quanto migliora il valore ottimo se il termine noto del vincolo aumenta di una unità

  "quanto pagherei per un'unità in più di quella risorsa"

- L'**intervallo di validità del termine noto** $[b_i^{\min}, b_i^{\max}]$: dove quel prezzo ombra resta esatto (fuori, va rifatta l'ottimizzazione)

I quattro numeri (2/2)

- Il **costo ridotto** $\bar{c}_j$ di una variabile a zero: di quanto deve migliorare il suo coefficiente in obiettivo perché convenga attivarla
- L'**intervallo di validità del coefficiente** in obiettivo $[c_j^{\min}, c_j^{\max}]$: dove il coefficiente può variare senza che la soluzione ottima cambi
- Nell'LP 2×2: c_1 può variare in $[50/3 \approx 16{,}7,\ 100]$ e c_2 in $[15, 90]$ senza spostare la soluzione $(30, 20)$

Esempio: prezzi ombra in pratica (1/2)

LP 2×2: ottimo 1900 con duali $\tilde{\pi}_1 = 14$ e $\tilde{\pi}_2 = 8$.

Lettura. Una unità in più di b_1 fa crescere l'ottimo di 14; se procurarla costasse 12, converrebbe ($14 > 12$).

Verifica per perturbazione. Risolvendo di nuovo:

$$b_1 = 91 \;\Rightarrow\; 1914 = 1900{+}14, \qquad b_1 = 100 \;\Rightarrow\; 2040 = 1900{+}10{\cdot}14$$

il prezzo ombra è ancora esatto perché 100 è dentro l'intervallo di validità $[40, 240]$.

Esempio: prezzi ombra in pratica (2/2)

Dove smette di valere.

- A $b_1 = 240$ il primo vincolo smette di essere la risorsa scarsa
- Oltre, ogni unità aggiuntiva vale meno di 14 e va ricalcolato tutto
- Ecco perché ogni prezzo ombra si cita *insieme* al suo intervallo di validità

Vincoli non attivi.

- Se fosse $b_1 = 300$ (vincolo non attivo all'ottimo), il suo prezzo ombra sarebbe 0
- Una risorsa che avanza non vale nulla al margine

Esempio: conviene una terza variabile? (1/3)

- Nell'LP 2×2 entrambe le variabili sono positive all'ottimo e i loro costi ridotti valgono 0: è sempre così per le variabili diverse da zero
- Per vedere un costo ridotto all'opera serve una variabile a zero
- Aggiungiamo al modello una variabile $x_3 \geq 0$ con coefficiente $c_3 = 20$ in obiettivo e consumi $a_{13} = a_{23} = 1$ nei due vincoli

Esempio: conviene una terza variabile? (2/3)

Passo 1 — valutazione con i prezzi ombra. Le risorse assorbite da un'unità di x_3 valgono, ai prezzi ombra,

$$1 \cdot 14 + 1 \cdot 8 = 22 > 20 = c_3$$

ogni unità di x_3 sottrarrebbe risorse a impieghi migliori.

Passo 2 — il costo ridotto. La differenza è proprio il costo ridotto:

$$\bar{c}_3 = 20 - 22 = -2$$

Risolvendo si conferma: l'ottimo resta $(30, 20, 0)$ con $\tilde{z} = 1900$, x_3 è a zero con $\bar{c}_3 = -2$ e $c_3^{\max} = 22$.

Esempio: conviene una terza variabile? (3/3)

- Il coefficiente c_3 dovrebbe salire almeno a 22 perché convenga attivare x_3
- **Passo 3 — controprova.** Con $c_3 = 23 > 22$ la soluzione cambia davvero, e non di poco: la nuova soluzione ottima è $(0, 5, 75)$ con valore 1975
- Il costo ridotto dice *quando* una variabile a zero entra in soluzione, non *come* cambia la soluzione: quella va ricalcolata

Riepilogo: Teoria della programmazione lineare (1/2)

Dualità:

- Ogni vincolo genera una variabile duale, ogni variabile un vincolo duale
- Dualità debole: il duale dà un limite; dualità forte: all'ottimo i valori coincidono

Scarti complementari:

- $\bar{\pi}_i \cdot \bar{s}_i = 0$ e $\bar{x}_j \cdot \bar{c}_j = 0$
- Vincolo lasco $\Rightarrow$ duale nullo; variabile non nulla $\Rightarrow$ costo ridotto nullo

Riepilogo: Teoria della programmazione lineare (2/2)

Sensitività:

- Prezzo ombra $\tilde{\pi}_i = \partial \tilde{z} / \partial b_i$, valido nel suo intervallo $[b_i^{\min}, b_i^{\max}]$
- Il segno si deduce da: la regione si allarga o si restringe? Min o max?
- Costo ridotto: di quanto deve migliorare c_j perché una variabile a zero convenga
- Si cita sempre un numero *insieme* al suo intervallo di validità

Il protocollo di analisi di sensitività

Introduzione: Il protocollo di sensitività

- L'analisi di sensitività è **parte del modello**, non un'appendice
- In ogni esercitazione seguiamo lo stesso **protocollo in sei passi**
- Chiudiamo con un esercizio sulla dualità

Il protocollo in sei passi (1/2)

1. Scenario base	risolvere, verificare l'ammissibilità, identificare i vincoli attivi
2. One-at-a-time	variare un parametro chiave su una griglia; grafico valore/decisioni
3. Prezzi ombra e costi ridotti	confrontare la previsione marginale del duale con una ri-ottimizzazione dopo una piccola perturbazione; leggere il costo ridotto $\bar{c}_j$ di ogni variabile a zero: la soglia oltre la quale conviene attivarla

Il protocollo in sei passi (2/2)

4. Scenari	costruire almeno tre scenari coerenti (pessimistico, centrale, ottimistico)
5. Trade-off	variare un peso o una soglia per tracciare una frontiera (costo-servizio, rischio-rendimento, costo-emissioni)
6. Stabilità	segnalare cambi bruschi del mix ottimo e parametri stimati fragili

Esercizio: dualità

- Nell'LP 2×2 dell'esempio è possibile aumentare b_1 di 10 unità pagando 12 per unità. Conviene?
- Fino a che prezzo unitario conviene?
- Fino a quale valore di b_1 vale il prezzo ombra di 14?

Suggerimento: ricalcolare il vertice ottimo quando il primo vincolo si sposta a $90 + \Delta$ e trovare il Δ oltre il quale la soluzione cambia struttura.

Soluzione

- Con il primo vincolo a $90 + \Delta$ il vertice ottimo risolve $x_1 + 3x_2 = 90 + \Delta$, $2x_1 + x_2 = 80$:

$$\tilde{x}_1 = \frac{150 - \Delta}{5}, \qquad \tilde{x}_2 = \frac{100 + 2\Delta}{5}$$

- $\tilde{x}_1 \geq 0$ finché $\Delta \leq 150$, cioè fino a $b_1 = 240$: fin lì il prezzo ombra 14 è esatto
- 10 unità valgono $10 \cdot 14 = 140$ e costano $10 \cdot 12 = 120$: conviene (guadagno netto 20)
- Conviene finché il prezzo unitario è inferiore a 14

Riepilogo: Il protocollo di sensitività

- La sensitività è parte del modello
- Sei passi: scenario base, one-at-a-time, prezzi ombra e costi ridotti, scenari, trade-off, stabilità
- Ogni previsione marginale va confrontata con una ri-ottimizzazione

Riepilogo finale (1/2)

Programmazione lineare:

- Primale e duale, legati dalla dualità debole e forte
- Scarti complementari come condizioni di ottimalità
- Prezzi ombra, costi ridotti e intervalli di validità

Riepilogo finale (2/2)

In laboratorio:

- I prezzi ombra si verificano per perturbazione
- Ogni prezzo ombra si cita con il suo intervallo di validità
- Ogni esercitazione segue il protocollo di sensitività in sei passi