Introduzione alla modellazione PL

Indice

Che cosa faremo

Modelli lineari e sigle usate

Notazione

Una scelta di campo: solo variabili continue

Mappa dei modelli

Struttura di ogni capitolo

Organizzazione del corso

Obiettivi (1/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- descrivere il percorso di ogni capitolo: problema gestionale, modello, Python e solver, interpretazione;
- usare la notazione del corso per dati, variabili, duali, costi ridotti e scarti;

Obiettivi (2/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- spiegare perché il corso usa solo variabili continue e che cosa se ne guadagna;
- orientarsi nella mappa dei modelli e nella struttura di ogni capitolo.

Prerequisiti

- Dal modulo *Programmazione lineare*, Capitolo 4 «Problemi di programmazione lineare»: la forma di un problema di programmazione lineare: funzione obiettivo, vincoli lineari, domini delle variabili
- Dal modulo *Programmazione lineare*, Capitolo 16 «Tecniche di modellazione per la programmazione lineare»: le tecniche di base per tradurre un enunciato in un modello di programmazione lineare

Che cosa faremo

Introduzione: Che cosa faremo

- In questa sezione vediamo lo **scopo** del corso
- Useremo la programmazione lineare come strumento di *decisione*, non solo di calcolo
- Capire l'obiettivo ci guida in tutte le esercitazioni che seguiranno

Dal problema gestionale al modello

- Ogni capitolo parte da un **problema gestionale concreto**:
  - quanto produrre, come ricaricare una flotta
  - quanto è efficiente una filiale, quanto rischio accettare
- Il problema diventa un **modello di programmazione lineare**
- Il modello viene implementato in **Python** e risolto con un **solver**

Interrogare il modello

- Soprattutto, il modello viene *interrogato*:
  - quanto vale un'ora di capacità in più?
  - la soluzione resiste se i dati cambiano del 5%?
  - quale compromesso consiglieremmo a un decisore?

La domanda giusta

- Alla fine di ogni esercitazione la domanda non è soltanto

  "qual è l'ottimo?"

  ma

  "quale decisione suggeriamo e quanto è robusta?"

- Il valore di un modello sta nella **qualità della raccomandazione** che permette di formulare

Riepilogo: Che cosa faremo

- Problema gestionale $\rightarrow$ modello $\rightarrow$ Python e solver
- Il modello non si limita a dare un numero: va **interrogato**
- L'obiettivo finale è una **raccomandazione robusta** per il decisore

Modelli lineari e sigle usate

Modelli lineari

- Tutti i modelli del corso sono **LP** (*Linear Programming*, programmazione lineare): obiettivo e vincoli sono funzioni lineari delle variabili
- Un LP è sempre **convesso**: ogni ottimo locale è globale e la dualità vale senza eccezioni
- Le altre sigle ricorrenti sono definite al primo uso nel rispettivo capitolo

Prerequisiti e moduli vicini

- Prerequisito: il modulo **Programmazione lineare**, in particolare la dualità e l'analisi di sensitività
- I modelli con obiettivo quadratico o non lineare sono nel modulo **Modellazione PNL**

Notazione

Introduzione: Notazione

- In tutto il corso vale la **stessa convenzione** di notazione
- Una notazione uniforme permette di leggere ogni modello senza ambiguità
- Vediamo come si scrivono scalari, insiemi, dati, vettori, matrici, grafi, variabili duali e soluzioni

Scalari, indici e insiemi

- **Scalari e indici**: lettere minuscole in corsivo
  (x_{it}, b_t, λ, i, t)
- **Insiemi di oggetti indicizzati dai numeri**: gli oggetti di un modello (prodotti, canali, titoli, veicoli, quartieri, scenari) sono numerati

  $$i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

  così la notazione del testo è già quella del modello costruito
- I *conteggi* sono interi positivi ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$)

Dati, vettori, matrici e grafi

- **Dati numerici**: valori razionali, $\mathbb{Q}_{>0}$ o $\mathbb{Q}_{\geq 0}$
  (i dati di un'istanza reale sono sempre numeri di macchina)
- **Vettori**: lettere minuscole in grassetto ($\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{\mu}$); tutti i vettori sono colonna e $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}$ indica il prodotto scalare
- **Matrici**: lettere maiuscole in grassetto ($\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{A}$); $\boldsymbol{Q} \succeq 0$ significa semidefinita positiva
- **Grafi**: $G = (N, A)$ con nodi N e archi A (gli unici insiemi non enumerati, per loro natura)

Variabili duali e soluzioni

- **Variabili duali**: π_i, una per vincolo
- **Costi ridotti**: $\bar{c}_j$; **scarti**: $\bar{s}_i$
- **Soluzioni**:
  - le variabili incognite si scrivono lisce (x_j, π_i)
  - la *barra* indica i valori di una soluzione *ammissibile* $(\bar{x}_j, \bar{\pi}_i, \bar{s}_i, \bar{c}_j)$
  - la *tilde* quelli di una soluzione *ottima* $(\tilde{x}_j, \tilde{\pi}_i, \tilde{z})$

Come è scritto ogni modello

- Ogni coefficiente e ogni insieme è *definito prima di essere usato*
- In ogni modello:
  - (i) le variabili sono introdotte esplicitamente prima della formulazione
  - (ii) obiettivo e ciascuna famiglia di vincoli hanno un numero d'equazione
  - (iii) i vincoli di non negatività, che definiscono le variabili, chiudono il modello
  - (iv) dopo il modello, un elenco descrive obiettivo e vincoli famiglia per famiglia, con il numero di vincoli di ciascuna

Riepilogo: Notazione

- Minuscole corsive per scalari e indici, grassetto per vettori (minuscole) e matrici (maiuscole)
- Insiemi enumerati $\{1, \ldots, n\}$; dati razionali
- π_i duali, $\bar{c}_j$ costi ridotti, $\bar{s}_i$ scarti
- Barra = soluzione ammissibile, tilde = soluzione ottima
- Ogni modello: variabili, obiettivo e vincoli numerati, non negatività, descrizione

Una scelta di campo: solo variabili continue

Introduzione: Solo variabili continue

- Tutti i modelli del corso usano **esclusivamente variabili continue**
- Niente variabili binarie o intere
- È una scelta deliberata: vediamo le sue **tre motivazioni**

Tre motivazioni

1. **Didattica**: con variabili continue valgono la dualità, i prezzi ombra, i costi ridotti, gli strumenti che trasformano una soluzione numerica in una spiegazione economica; con variabili binarie questi strumenti si perdono o si indeboliscono
2. **Copertura**: una quantità sorprendente di decisioni reali è naturalmente continua: quantità, flussi, quote di portafoglio, potenze, pesi
3. **Progressione**: gli stessi strumenti (un LP, il suo duale, i prezzi ombra) servono per la produzione, la finanza e la statistica, senza cambiare solver

Riepilogo: Solo variabili continue

- Solo variabili continue, per scelta
- Così valgono **dualità**, **prezzi ombra** e **costi ridotti**
- Molte decisioni reali sono già continue
- Gli stessi strumenti servono in tutti i capitoli

Mappa dei modelli

Introduzione: Mappa dei modelli

- Vediamo le **applicazioni** che affronteremo nel corso
- Per ognuna: il capitolo, la classe del modello e il concetto centrale
- La mappa mostra il percorso dalle applicazioni deterministiche a quelle stocastiche

Mappa dei modelli

Cap.	Applicazione	Classe	Concetto centrale
4	Produzione e scorte multiperiodali	LP	dualità, capacità
5	Ricarica di veicoli elettrici	LP	energia, picchi
6	Data Envelopment Analysis	LP	efficienza relativa
7	Newsvendor e varianti	LP stoc.	decidere prima di sapere
8	VaR e CVaR	LP	rischio di coda
9	Arbitraggio e prezzatura	LP	la dualità che prezza
10	Regressione robusta e quantile	LP	stimare con un LP

Riepilogo: Mappa dei modelli

- Sette applicazioni gestionali, finanziarie e di stima
- Tutti LP: deterministici e stocastici a scenari
- Ogni applicazione ha un **concetto centrale** da portare a casa

Struttura di ogni capitolo

Introduzione: Struttura di ogni capitolo

- Ogni capitolo applicativo segue la **stessa scaletta in otto passi**
- La scaletta è pensata per essere replicata nelle **relazioni di laboratorio**
- Conoscerla aiuta a orientarsi in ogni capitolo

La scaletta in otto passi (1/2)

1. **Motivazione gestionale**: il problema raccontato come decisione aziendale
2. **Costruzione guidata del modello**: insiemi, parametri, variabili, vincoli e obiettivo, spiegati riga per riga
3. **Esempio numerico svolto a mano**: un'istanza minima risolta con tutti i passaggi, per capire il meccanismo prima di accendere il solver
4. **Caso di studio**: un'istanza realistica con dati riproducibili (CSV)

La scaletta in otto passi (2/2)

5. **Implementazione Python/Gurobi**: il codice completo, commentato
6. **Risultati**: l'output del solver tradotto in linguaggio manageriale
7. **Analisi di sensitività**: prezzi ombra, scenari, trade-off
8. **Esercizi**: dalla verifica alla piccola estensione di ricerca

Numeri riproducibili

Osservazione 1: Attenzione

I numeri riportati in ogni capitolo sono generati dagli script della cartella `python/`*: eseguendo* `python3 esegui_tutti.py` *si rigenerano dati, tabelle e figure.*

Se modificate i dati, i numeri della dispensa vanno rigenerati.

Riepilogo: Struttura di ogni capitolo

- Motivazione $\rightarrow$ modello $\rightarrow$ esempio a mano $\rightarrow$ caso di studio
- Codice $\rightarrow$ risultati $\rightarrow$ sensitività $\rightarrow$ esercizi
- Usate la stessa scaletta nelle vostre relazioni
- Tutti i numeri sono rigenerabili dagli script Python

Organizzazione del corso

Introduzione: Organizzazione del corso

- Vediamo il **percorso essenziale** del corso
- Il dettaglio è nel capitolo 11

Il percorso essenziale: quattro laboratori

1. Produzione e scorte con dualità e prezzi ombra
2. Data Envelopment Analysis e forma di inviluppo
3. Decisioni a scenari (Newsvendor o CVaR)
4. Progetto a scelta con presentazione manageriale

Riepilogo: Organizzazione del corso

- Quattro laboratori: produzione, DEA, scenari, progetto

Riepilogo finale (1/2)

Lo scopo:

- La programmazione lineare come strumento di decisione
- Un modello va risolto e poi **interrogato**

Gli strumenti:

- Solo modelli lineari: un LP è sempre convesso
- Solo variabili continue: dualità, prezzi ombra, costi ridotti

Riepilogo finale (2/2)

Il metodo:

- Una notazione uniforme in tutti i modelli
- Sette applicazioni, ognuna con un concetto centrale
- La stessa scaletta in otto passi in ogni capitolo

Il corso:

- Quattro laboratori: produzione, DEA, scenari, progetto