Problemi misti (1/3)

10.1–10.3

Indice

Perché un capitolo di problemi misti

Premi acquistabili con due modalità

Asta combinatoria

Dieta con conteggio dei cibi e lotto minimo

Obiettivi (1/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- riconoscere quali pezzi di modellazione combina un problema senza una struttura nota;
- modellare selezione con modi alternativi, copertura con confezioni e suddivisione con bilanciamento;

Obiettivi (2/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- spiegare perché il rilassamento LP di un problema di suddivisione è debole;
- trovare un bound duale con un argomento combinatorio: parità, numero di contenitori, dominanza.

Prerequisiti

- Da questo modulo, Capitolo 5 «Logica e variabili binarie»: i vincoli logici fra variabili binarie
- Da questo modulo, Capitolo 6 «Legami fra variabili»: lotto minimo, variabile di massimo, min-max e max-min
- Da questo modulo, Capitolo 9 «Pianificazione della produzione»: il protocollo dei bound applicato a una famiglia di problemi

Perché un capitolo di problemi misti

Introduzione: problemi misti

- Le tre famiglie dei capitoli precedenti hanno una struttura riconoscibile: si **assegna**, si **localizza**, si **pianifica**
- I nove problemi di questo capitolo non ce l'hanno, e non gliene va imposta una
- Ciascuno mette insieme pezzi diversi: il lavoro di modellazione consiste proprio nel **riconoscere quali**
- È il capitolo in cui si impara a modellare senza uno schema già pronto

I quattro gruppi (1/2)

- **Selezione con modalità alternative** (problemi 10.1 e 10.2)
  - si sceglie un sottoinsieme, ma ogni oggetto ha più di un modo di essere scelto
  - i modi si escludono a vicenda
- **Conteggi con lotto minimo** (problema 10.3)
  - le variabili non sono binarie ma quantità intere
  - una quantità può stare a zero oppure sopra una soglia

I quattro gruppi (2/2)

- **Copertura con contenitori** (problemi 10.4 e 10.5)
  - un fabbisogno va coperto acquistando confezioni di composizione fissa
  - la quantità in eccesso si paga oppure si spreca
- **Divisione e bilanciamento** (problemi 10.6–10.9)
  - un insieme va diviso fra più contenitori
  - la qualità si misura su quanto i contenitori si somigliano

Il tratto nuovo: il rilassamento LP è debole

- Quattro di questi problemi hanno in comune un tratto che nelle tre famiglie non si era presentato: il **rilassamento LP è debole**
- In due casi vale **esattamente zero**
- La ragione è sempre la stessa: una soluzione frazionaria può spezzare a metà ogni oggetto e metterne una metà in ciascun contenitore, **pareggiando tutto**
- Il bound duale utile va allora cercato altrove

Dove cercare il bound duale

Tre argomenti che il duale del rilassamento non può vedere:

- la **parità**, quando un conteggio non può che essere pari
- il **numero di contenitori** necessari, letto dalle capacità
- la **dominanza di una classe** di oggetti sulle altre

Sono argomenti *combinatori*: nascono dall'interezza, e il duale del rilassamento non può vederli.

Lo schema di ogni problema

Per ogni problema, come nelle famiglie:

- descrizione e variabili decisionali
- modello simbolico e modello dell'istanza
- una soluzione ammissibile con il suo **bound primale** UB
- il rilassamento LP con il suo duale
- una soluzione duale con il suo **bound duale** LB
- la soluzione ottima $z(MILP)$ e il confronto finale

Classe dei modelli: **BIP** / **MILP**. Uno script Python per problema.

Riepilogo: perché un capitolo di problemi misti

- Nove problemi senza una struttura comune: modellare vuol dire riconoscere i pezzi
- Quattro gruppi: modalità alternative, lotto minimo, copertura con contenitori, divisione e bilanciamento
- In quattro problemi il rilassamento LP è debole (in due vale zero)
- I bound utili arrivano da argomenti combinatori: parità, numero di contenitori, dominanza

Premi acquistabili con due modalità

Introduzione: Premi con due modalità

- Un problema di scelta in cui ogni premio si può ottenere in **due modi alternativi**: con i soli punti oppure con meno punti e un contributo in denaro
- Impareremo a usare **due famiglie di binarie** e il vincolo di mutua esclusione $x_i + y_i \leq 1$
- Costruiremo un bound primale con un'euristica costruttiva e un bound duale a mano
- Vedremo un caso in cui il bound duale è onesto ma **molto lontano** dall'ottimo intero

Problema 10.1: premi con due modalità (1/2)

- Un programma fedeltà mette a disposizione $s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ premi e un cliente dispone di $p \in \mathbb{Q}_{>0}$ punti
- Ogni premio $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ si può ottenere in due modi alternativi:
  - con i soli punti, spendendone $a_i \in \mathbb{Q}_{>0}$
  - oppure spendendone soltanto $b_i \in \mathbb{Q}_{>0}$ (con $b_i < a_i$) e aggiungendo un contributo in denaro di $c_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ euro
- Ogni premio si può ottenere al più una volta, e in una sola delle due modalità

Problema 10.1: premi con due modalità (2/2)

- A ogni premio è associato un valore di preferenza $d_i \in \mathbb{Q}_{>0}$
- Il cliente vuole raggiungere una preferenza complessiva di almeno $\ell \in \mathbb{Q}_{>0}$
- Il cliente vuole **minimizzare il denaro speso**

Il problema a parole

- **Decidiamo** quali premi prendere e, per ciascuno, con quale delle due modalità
- **L'obiettivo**: contributo in denaro minimo
- **I vincoli**:
  - i punti non bastano per tutto
  - la preferenza complessiva deve arrivare alla soglia
  - uno stesso premio non si prende due volte

Dati (input del modello)

Simbolo	Tipo	Significato
s	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero di premi, $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$
a_i	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	punti richiesti dalla modalità a soli punti
b_i	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	punti richiesti dalla modalità con contributo, $b_i < a_i$
c_i	$\in \mathbb{Q}_{\geq 0}$	contributo in euro della seconda modalità
d_i	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	valore di preferenza del premio i
p	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	punti disponibili
ℓ	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	preferenza minima richiesta

Variabili decisionali

Servono *due* famiglie di binarie, una per modalità:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se il premio } i \text{ si prende con i soli punti,} \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se il premio } i \text{ si prende con punti e contributo,} \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

per ogni $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$: in tutto $2s$ variabili binarie.

Modello 10.1

Modello 10.1 — premi con due modalità

$$\min \quad \sum_{i=1}^{s} c_i\, y_i \tag{10.1a}$$

$$\text{soggetto a} \quad x_i + y_i \le 1, \qquad \forall i \in \{1, 2, \ldots, s\}, \tag{10.1b}$$

$$\sum_{i=1}^{s} \left(a_i\, x_i + b_i\, y_i\right) \le p, \tag{10.1c}$$

$$\sum_{i=1}^{s} d_i\, (x_i + y_i) \ge \ell, \tag{10.1d}$$

$$x_i,\ y_i \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, s\}. \tag{10.1e}$$

L'obiettivo conta solo gli euro: la modalità a soli punti non vi compare.

Descrizione del modello

- La **funzione obiettivo** conta solo il denaro: la modalità a soli punti non compare, perché non costa euro
- I vincoli di **mutua esclusione** sono uno per premio (s vincoli lineari)
- Il vincolo di **budget in punti** è uno solo
- Il vincolo di **soglia di preferenza** è uno solo

Che cosa dice e che cosa non dice la mutua esclusione (1/2)

Il vincolo $x_i + y_i \leq 1$ ammette *tre* configurazioni: $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Vieta soltanto $(1, 1)$.

- Non dice «il premio i va preso»: la configurazione $(0, 0)$ è legittima e significa che quel premio si lascia perdere
- Non dice «se non lo prendo a punti allora lo prendo con contributo»: la conversa

$$x_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_i = 1$$

è falsa, e il controesempio è proprio $(0, 0)$

Che cosa dice e che cosa non dice la mutua esclusione (2/2)

- Se si volesse imporre che *ogni* premio venga preso, il vincolo andrebbe scritto con l'uguaglianza

$$x_i + y_i = 1$$

- È un set *partitioning* invece di un set *packing*, e il problema cambia
- La quantità $x_i + y_i$ è dunque l'**indicatore** «il premio i è stato preso, in un modo o nell'altro»
- Ed è esattamente questa somma che compare nel vincolo di preferenza

Il modello in gurobipy

```
m = gp.Model("premi")
x = m.addVars(s, vtype=GRB.BINARY, name="x")
y = m.addVars(s, vtype=GRB.BINARY, name="y")
m.setObjective(gp.quicksum(c[i] * y[i]
                for i in range(s)), GRB.MINIMIZE)
m.addConstrs((x[i] + y[i] <= 1 for i in range(s)),
             name="una_modalita")
m.addConstr(gp.quicksum(a[i] * x[i] + b[i] * y[i]
            for i in range(s)) <= p, name="punti")
m.addConstr(gp.quicksum(d[i] * (x[i] + y[i])
            for i in range(s)) >= ell, name="preferenza")
```

L'istanza

$s = 5$ premi, $p = 20$ punti, $\ell = 16$:

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
a_i	8	6	10	5	7
b_i	4	3	6	2	4
c_i	10	8	15	5	9
d_i	5	4	7	3	6

Dieci variabili binarie: cinque x_i e cinque y_i.

Modello 10.1 sull'istanza

Il modello dell'istanza

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrr}
\min & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
\text{soggetto a} & x_1 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & x_2 & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & x_3 & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & x_4 & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & x_5 & & & & & & & & & & & & \\
 & 8x_1 & +6x_2 & +10x_3 & +5x_4 & +7x_5 & +4y_1 & +3y_2 & & +6y_3 & +2y_4 & +4y_5 & \leq 20 \\
 & 5x_1 & +4x_2 & +7x_3 & +3x_4 & +6x_5 & +5y_1 & +4y_2 & & +7y_3 & +3y_4 & +6y_5 & \geq 16 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & & & & & & & \in \{0,1\} \\
 & & & & & & y_1, & y_2, & & y_3, & y_4, & y_5 & \in \{0,1\}
\end{array}
$$

Euristica costruttiva: il bound primale (1/2)

- Si scorrono i premi per **preferenza decrescente**
- Ciascuno si prende con i soli punti se bastano, altrimenti con il contributo se bastano i punti ridotti, altrimenti si salta
- Ci si ferma appena la preferenza richiesta è raggiunta
- È un'euristica costruttiva: si costruisce una sola soluzione, un elemento per volta, senza mai tornare indietro

Euristica costruttiva: il bound primale (2/2)

Sull'istanza l'ordine per preferenza è $3, 5, 1, 2, 4$.

- Premio 3 (preferenza 7): bastano i soli punti ($10 \leq 20$), si prende; restano 10 punti, preferenza 7
- Premio 5 (preferenza 6): bastano i soli punti ($7 \leq 10$), si prende; restano 3 punti, preferenza 13
- Premio 1 (preferenza 5): i punti non bastano né per la modalità a ($8 > 3$) né per la b ($4 > 3$): si salta
- Premio 2 (preferenza 4): non bastano per la a ($6 > 3$), bastano per la b ($3 \leq 3$): si prende con 8 euro; la preferenza arriva a $17 \geq 16$ e ci si ferma

$$z(MILP) \leq UB = 8$$

Duale del rilassamento LP del modello 10.1

Associamo $\sigma_i \geq 0$ alla mutua esclusione, $\pi \geq 0$ al budget di punti e $\rho \geq 0$ alla soglia di preferenza.

Duale del rilassamento LP del modello 10.1

$$\max \quad -\sum_{i=1}^{s} \sigma_i - p\,\pi + \ell\,\rho \tag{10.2a}$$

$$\text{soggetto a} \quad -\sigma_i - a_i\,\pi + d_i\,\rho \leq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, s\}, \tag{10.2b}$$

$$-\sigma_i - b_i\,\pi + d_i\,\rho \leq c_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, s\}, \tag{10.2c}$$

$$\sigma_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, s\}, \tag{10.2d}$$

$$\pi \geq 0, \tag{10.2e}$$

$$\rho \geq 0. \tag{10.2f}$$

Duale sull'istanza

Il modello dell'istanza

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrl}
\max & -\sigma_1 & -\sigma_2 & -\sigma_3 & -\sigma_4 & -\sigma_5 & -20\pi & +16\rho & & \\
\text{soggetto a} & -\sigma_1 & & & & & -8\pi & +5\rho & \leq & 0 \\
& & -\sigma_2 & & & & -6\pi & +4\rho & \leq & 0 \\
& & & -\sigma_3 & & & -10\pi & +7\rho & \leq & 0 \\
& & & & -\sigma_4 & & -5\pi & +3\rho & \leq & 0 \\
& & & & & -\sigma_5 & -7\pi & +6\rho & \leq & 0 \\
& -\sigma_1 & & & & & -4\pi & +5\rho & \leq & 10 \\
& & -\sigma_2 & & & & -3\pi & +4\rho & \leq & 8 \\
& & & -\sigma_3 & & & -6\pi & +7\rho & \leq & 15 \\
& & & & -\sigma_4 & & -2\pi & +3\rho & \leq & 5 \\
& & & & & -\sigma_5 & -4\pi & +6\rho & \leq & 9 \\
& \sigma_1, & \sigma_2, & \sigma_3, & \sigma_4, & \sigma_5 & & & \geq & 0 \\
& & & & & & \pi & & \geq & 0 \\
& & & & & & & \rho & \geq & 0
\end{array}
$$

Descrizione del duale

- π è il **prezzo di un punto**, ρ il **valore di una unità di preferenza**, σ_i il prezzo della mutua esclusione del premio i
- L'**obiettivo** incassa la soglia ℓ valutata a ρ e paga il budget p valutato a π e i moltiplicatori σ_i
- **Colonne delle** x_i: il premio preso a soli punti frutta $d_i\,\rho$, consuma $a_i\,\pi$ e σ_i, e il saldo non può superare il costo in denaro di quella modalità, che è zero
- **Colonne delle** y_i: la seconda modalità consuma solo b_i punti e il saldo può arrivare fino a c_i

Una soluzione duale a mano (1/2)

- Qui la ricetta ha *due* parametri liberi: il prezzo π di un punto e il prezzo ρ di una unità di preferenza
- Fissati questi due, i moltiplicatori della mutua esclusione si ricavano prendendo il più piccolo valore ammissibile

$$\bar{\sigma}_i = \max\bigl(0,\ d_i\,\rho - a_i\,\pi\bigr)$$

- Restano da verificare soltanto i vincoli sulla seconda modalità
- La funzione

$$V(\pi,\rho) = -\sum_{i=1}^{s} \bar{\sigma}_i(\pi,\rho) - p\,\pi + \ell\,\rho$$

è concava e lineare a tratti: si può esplorare su una griglia

Una soluzione duale a mano (2/2)

Sull'istanza il massimo si trova in

$$\bar{\pi} = 2, \qquad \bar{\rho} = 3, \qquad \bar{\sigma} = (0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 4)$$

con valore

$$LB = -(0 + 0 + 1 + 0 + 4) - 20 \cdot 2 + 16 \cdot 3 = -5 - 40 + 48 = 3$$

- Questa soluzione è *ottima* per il rilassamento senza i bound: infatti

$$z(LP) = z(LP^{+}) = 3$$

Un bound onesto può essere molto lontano

Osservazione 1: Un bound onesto può essere molto lontano

Qui $LB = 3$ *e* $z(MILP) = 5$*: il gap fra il bound duale e l'ottimo intero è del* 40%*, e il gap certificato fra euristica e duale è del* 100%*.*

Non c'è nulla di sbagliato: il rilassamento LP può prendere «mezzo premio» a metà preferenza, e questa libertà vale molto. È il caso più estremo del corso, e serve a ricordare che un bound valido non è automaticamente un bound utile.

Soluzione ottima

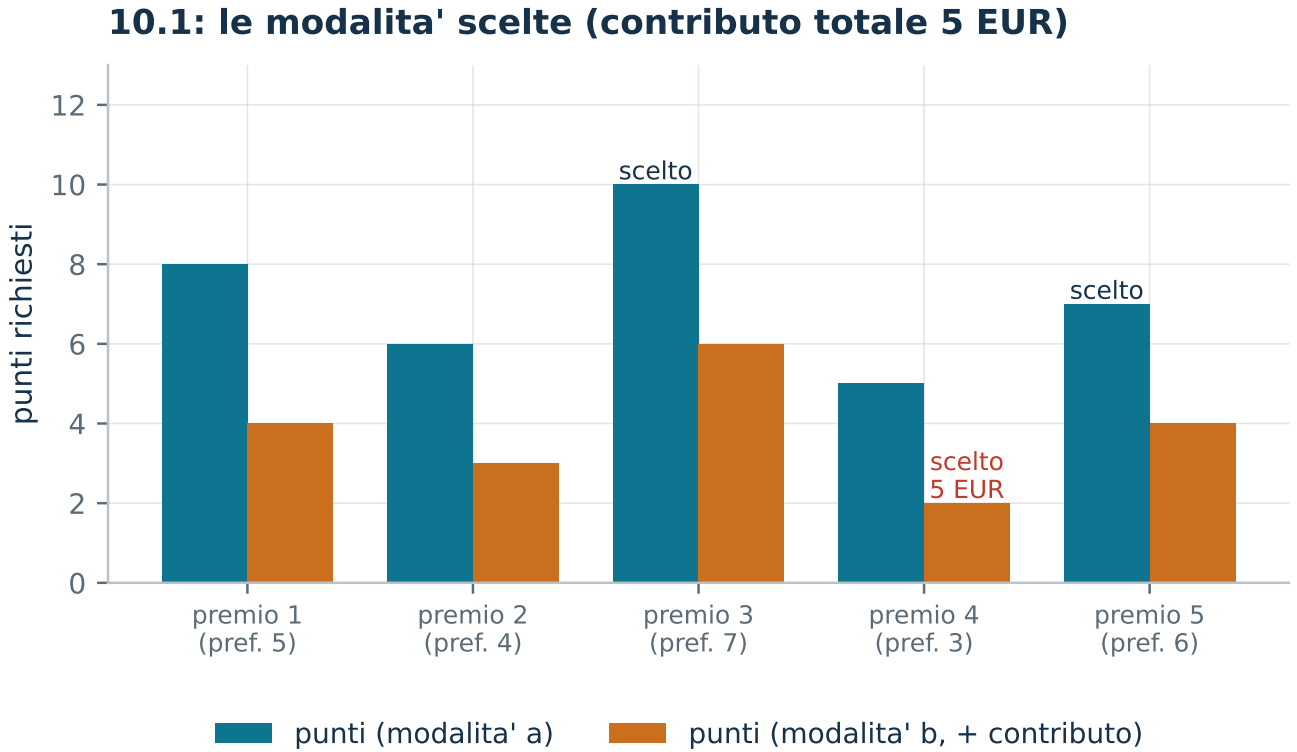
	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$
soli punti x_i	0	0	1	0	1
con contributo y_i	0	0	0	1	0

Premi 3 e 5 a soli punti $(10+7=17)$ e premio 4 con il contributo (2 punti e 5 euro): si usano 19 punti su 20, la preferenza è $7+6+3=16$ ed è

$$z(MILP)=5, \qquad 3=LB=z(LP) \leq z(MILP)=5 \leq UB=8$$

L'euristica sbaglia perché guarda solo la preferenza: resta con 3 punti e deve comprare il premio 2 a 8 euro, mentre l'ottimo tiene i punti per il premio 4, che costa 5.

L'ottimo in figura



Per ogni premio, i punti richiesti dalle due modalità; le etichette segnalano quale modalità è scelta all'ottimo e il contributo pagato.

Considerazioni aggiuntive

- Le disuguaglianze valide $x_i \leq 1$ e $y_i \leq 1$ sono implicate dai vincoli di mutua esclusione: infatti $z(LP) = z(LP^+)$
- Se per qualche premio fosse $c_i = 0$, la seconda modalità dominerebbe la prima (meno punti, stesso costo) e la variabile x_i potrebbe essere eliminata: è un controllo sui dati che vale la pena fare
- Il modello si estende a k modalità senza fatica: bastano k famiglie di binarie e il vincolo $\sum_{m=1}^{k} x_i^{(m)} \leq 1$. La struttura resta un set packing per righe

Domanda di modellazione: premi alternativi

I premi 3 e 5 provengono dallo stesso fornitore e sono alternativi: se ne può prendere al più uno, in qualunque modalità.

Come cambia il modello? Qual è il nuovo ottimo?

Il confronto finale

I tre numeri che ogni problema del corso produce:

	valore	che cos'è
UB	8	soluzione euristica
LB	3	bound certificato
$z(MILP)$	5	ottimo del MILP

- Gap dell'euristica rispetto all'ottimo: $\dfrac{|UB - z(MILP)|}{|z(MILP)|} = 60.0\%$
- Gap certificato, noto *prima* di risolvere il MILP: $UB - LB = 5$, cioè $\dfrac{UB - LB}{|UB|} = 62.5\%$

Variante svolta: almeno quattro premi (1/3)

Oltre alla soglia di preferenza, il cliente vuole almeno quattro premi diversi. Si aggiunge il singolo vincolo lineare

$$\sum_{i=1}^{s}(x_i + y_i) \geq 4$$

- Di nuovo scritto sugli indicatori $x_i + y_i$
- Sull'istanza l'ottimo sale a 13: con soli 20 punti, quattro premi richiedono di usare più volte la modalità economica in punti, cioè quella che costa denaro

Variante svolta: almeno quattro premi (2/3)

- Il vincolo di preferenza e quello di conteggio **non** sono equivalenti, benché somiglino: il primo pesa i premi con d_i, il secondo li conta
- Nel duale il nuovo vincolo aggiunge una $\kappa \geq 0$ con termine noto 4: entra nell'obiettivo e compare in *tutte e due* le colonne di ogni premio, perché un premio conta comunque lo si sia preso
- Cercando anche κ sulla griglia dei quarti si ottiene $\pi = \rho = 3/2$, $\kappa = 9/2$, cioè $LB = 6$
- L'euristica enumera i $3^5 = 243$ stati possibili e trova 13, che è l'ottimo

Variante svolta: almeno quattro premi (3/3)

	valore	che cos'è
UB	13	soluzione euristica
LB	6	certificato duale costruito a mano
$z(LP)$	$\frac{25}{2}$	rilassamento senza i bound
$z(LP^+)$	$\frac{25}{2}$	rilassamento con i bound
$z(MILP)$	13	ottimo del MILP

Con cinque oggetti l'enumerazione è la regola più onesta: il sandwich si chiude sopra, non sotto.

Riepilogo: Premi con due modalità

- **Due famiglie di binarie**, una per modalità; la somma $x_i + y_i$ è l'indicatore «premio preso»
- **Mutua esclusione** $x_i + y_i \leq 1$: vieta solo $(1, 1)$, non obbliga a prendere il premio
- **I bound**: euristica $UB = 8$, duale a mano $LB = 3 = z(LP) = z(LP^+)$, ottimo $z(MILP) = 5$
- Gap dell'euristica 60%, gap certificato 62.5%: un bound valido non è automaticamente un bound utile
- **Variante** con almeno quattro premi: $z(MILP) = 13$ e $LB = 6$

Asta combinatoria

Introduzione: Asta combinatoria

- Un banditore ha degli oggetti da vendere e delle offerte che chiedono **gruppi** di oggetti: si accetta tutto o niente
- È il **set packing** puro: un vincolo per oggetto, una variabile per offerta
- Impareremo perché conviene scrivere i conflitti **per righe** e non a coppie
- Costruiremo un bound primale con un'euristica golosa e un bound duale con i prezzi degli oggetti

Problema 10.2: asta combinatoria (1/2)

- Un banditore ha un insieme $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ di $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ oggetti da vendere
- Ha ricevuto $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ offerte
- Per ogni offerta $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$:
  - $B_j \subseteq S$ è il sottoinsieme di oggetti richiesti
  - $p_j \in \mathbb{Q}_{>0}$ è il profitto in euro se l'offerta viene accettata

Problema 10.2: asta combinatoria (2/2)

- Ogni oggetto può essere venduto al più una volta
- Un'offerta può essere accettata solo se *tutti* i suoi oggetti sono disponibili
- Il banditore vuole scegliere un insieme di offerte di **profitto totale massimo**

Il problema a parole

- **Decidiamo** quali offerte accettare
- **L'obiettivo**: profitto massimo
- **Il vincolo**: due offerte accettate non possono chiedere lo stesso oggetto
- Un'offerta è *tutto o niente*: non se ne accetta una parte

Dati (input del modello)

Simbolo	Tipo	Significato
n	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero di oggetti, $i \in S = \{1, 2, \ldots, n\}$
r	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero di offerte, $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$
B_j	$\subseteq S$	oggetti richiesti dall'offerta j
p_j	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	profitto dell'offerta j

Variabili decisionali

Una sola famiglia di r variabili binarie:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se l'offerta } j \text{ viene accettata,} \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad \forall j \in \{1, 2, \ldots, r\}$$

Niente variabili sugli oggetti: gli oggetti compaiono soltanto nei vincoli, uno per riga.

Modello 10.2

Modello 10.2 — asta combinatoria

$$\max \quad \sum_{j=1}^{r} p_j x_j \tag{10.3a}$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{j:\, i \in B_j} x_j \leq 1, \qquad \forall i \in S, \tag{10.3b}$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad \forall j \in \{1,2,\ldots,r\}. \tag{10.3c}$$

Descrizione del modello

- È un **set packing** puro: un vincolo per oggetto (n vincoli lineari) e una variabile per offerta
- Il vincolo di riga dice che l'oggetto i viene venduto **al più una volta**
- La somma è sulle sole offerte che chiedono quell'oggetto
- Non c'è nessun vincolo che obblighi a vendere: i vincoli sono $\leq$, non $=$

Per righe, non per coppie

- Un modo alternativo, e peggiore, è elencare tutte le *coppie* di offerte in conflitto: $x_j + x_{j'} \leq 1$ per ogni $j \neq j'$ con $B_j \cap B_{j'} \neq \emptyset$
- Sull'istanza sarebbero nove vincoli invece di quattro; su istanze reali le coppie crescono come r^2, mentre i vincoli per oggetto restano n
- La forma per righe è anche più **stretta**: se tre offerte chiedono l'oggetto i, la riga dice $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$, mentre le tre disuguaglianze a coppie ammettono $x_1 = x_2 = x_3 = 1/2$
- È il confronto fra forma aggregata e disaggregata già visto, ma qui il verso della convenienza è opposto

Il modello in gurobipy

```
m = gp.Model("asta")
x = m.addVars(r, vtype=GRB.BINARY, name="x")
m.setObjective(gp.quicksum(p[j] * x[j]
                for j in range(r)), GRB.MAXIMIZE)
m.addConstrs((gp.quicksum(x[j] for j in range(r)
                          if i in B[j]) <= 1
              for i in range(n)), name="oggetto")
```

Una riga per oggetto, costruita scorrendo le offerte che lo chiedono.

L'istanza

$n = 4$ oggetti, $r = 6$ offerte:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$
B_j	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3, 4\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 4\}$	$\{1, 3, 4\}$
p_j	6	3	12	12	10	16

Sei variabili binarie e quattro vincoli di riga.

Modello 10.2 sull'istanza

Il modello dell'istanza

$$\max 6x_1 + 3x_2 + 12x_3 + 12x_4 + 10x_5 + 16x_6$$

$$\begin{aligned}
\text{soggetto a} \quad & x_1 & & & + x_4 & & + x_6 \leq 1 \\
& & x_2 & & & + x_5 & \leq 1 \\
& & & x_3 & + x_4 & & + x_6 \leq 1 \\
& & & x_3 & & + x_5 & + x_6 \leq 1 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 \in \{0, 1\}
\end{aligned}$$

Euristica costruttiva: il bound primale (1/2)

- Il problema è di **massimo**, quindi l'euristica dà il bound *primale*, che sta **sotto** l'ottimo
- Si ordinano le offerte per profitto *per oggetto* decrescente, cioè per $p_j/|B_j|$
- Si accettano quelle i cui oggetti sono ancora liberi
- È un'euristica costruttiva: una sola soluzione, un elemento per volta, senza tornare indietro. Tempo $O(r \log r + r\, n)$

Euristica costruttiva: il bound primale (2/2)

I rapporti sono 6, 3, 6, 6, 5 e $16/3 \approx 5{,}33$, quindi l'ordine è $1, 3, 4, 6, 5, 2$:

- offerta 1 $\{1\}$: accettata (profitto 6)
- offerta 3 $\{3, 4\}$: accettata (profitto 12)
- offerta 4 $\{1, 3\}$: scartata, gli oggetti 1 e 3 sono già venduti
- offerta 6 $\{1, 3, 4\}$: scartata
- offerta 5 $\{2, 4\}$: scartata, l'oggetto 4 è già venduto
- offerta 2 $\{2\}$: accettata (profitto 3)

Si accettano le offerte $1, 2, 3$:

$$z(MILP) \geq LB = 21$$

Duale del rilassamento LP del modello 10.2

Associamo una variabile duale non negativa λ_i a ciascun vincolo di riga.

Duale del rilassamento LP del modello 10.2

$$\min \quad \sum_{i \in S} \lambda_i \qquad (10.4a)$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{i \in B_j} \lambda_i \geq p_j, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, r\}, \qquad (10.4b)$$

$$\lambda_i \geq 0, \qquad \forall i \in S. \qquad (10.4c)$$

Duale sull'istanza

Il modello dell'istanza

$$
\begin{aligned}
\min\ & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 & \\
\text{soggetto a}\ & \lambda_1 & \geq 6 \\
& \lambda_2 & \geq 3 \\
& \lambda_3 + \lambda_4 & \geq 12 \\
& \lambda_1 + \lambda_3 & \geq 12 \\
& \lambda_2 + \lambda_4 & \geq 10 \\
& \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 & \geq 16 \\
& \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4 & \geq 0
\end{aligned}
$$

Descrizione del duale

- La variabile λ_i è il **prezzo** che il banditore attribuisce all'oggetto i
- L'**obiettivo** è il valore complessivo dei lotti a quei prezzi, e si vuole il più piccolo possibile
- I **vincoli** sono le colonne delle x_j, uno per offerta: gli oggetti che l'offerta j richiede, valutati ai prezzi λ_i, devono valere almeno quanto l'offerta paga, cioè p_j
- In altre parole: nessuna offerta deve risultare un affare

Una soluzione duale a mano (1/2)

Si spalma il profitto di ogni offerta sui suoi oggetti e si prende, per ogni oggetto, il massimo fra le offerte che lo chiedono:

$$\bar{\lambda}_i = \max_{j:\, i \in B_j} \frac{p_j}{|B_j|}$$

L'ammissibilità è immediata: per ogni offerta j,

$$\sum_{i \in B_j} \bar{\lambda}_i \;\geq\; \sum_{i \in B_j} \frac{p_j}{|B_j|} = |B_j| \cdot \frac{p_j}{|B_j|} = p_j$$

Una soluzione duale a mano (2/2)

Sull'istanza:

$$\bar{\lambda}_1 = \max\left(\frac{6}{1}, \frac{12}{2}, \frac{16}{3}\right) = 6, \qquad \bar{\lambda}_2 = \max\left(\frac{3}{1}, \frac{10}{2}\right) = 5$$

$$\bar{\lambda}_3 = \max\left(\frac{12}{2}, \frac{12}{2}, \frac{16}{3}\right) = 6, \qquad \bar{\lambda}_4 = \max\left(\frac{12}{2}, \frac{10}{2}, \frac{16}{3}\right) = 6$$

e quindi

$$z(MILP) \leq UB = 6 + 5 + 6 + 6 = 23$$

Una ricetta grossolana costa molto

Osservazione 2: Una ricetta grossolana costa molto

La ricetta «ovvia» $\bar{\lambda}_i = \max_{j:i\in B_j} p_j$ *(senza dividere per* $|B_j|$*) è anch'essa ammissibile, ma dà* $16 + 10 + 16 + 16 = 58$*: più del doppio.*

Dividere per la cardinalità dell'insieme richiesto è ciò che rende il bound utile. Vale la pena provare più ricette e tenere la migliore: sono tutte valide, non tutte informative.

Soluzione ottima

All'ottimo si accettano le offerte 4 ($\{1,3\}$, profitto 12) e 5 ($\{2,4\}$, profitto 10): tutti e quattro gli oggetti vengono venduti e

$$z(MILP) = 22$$

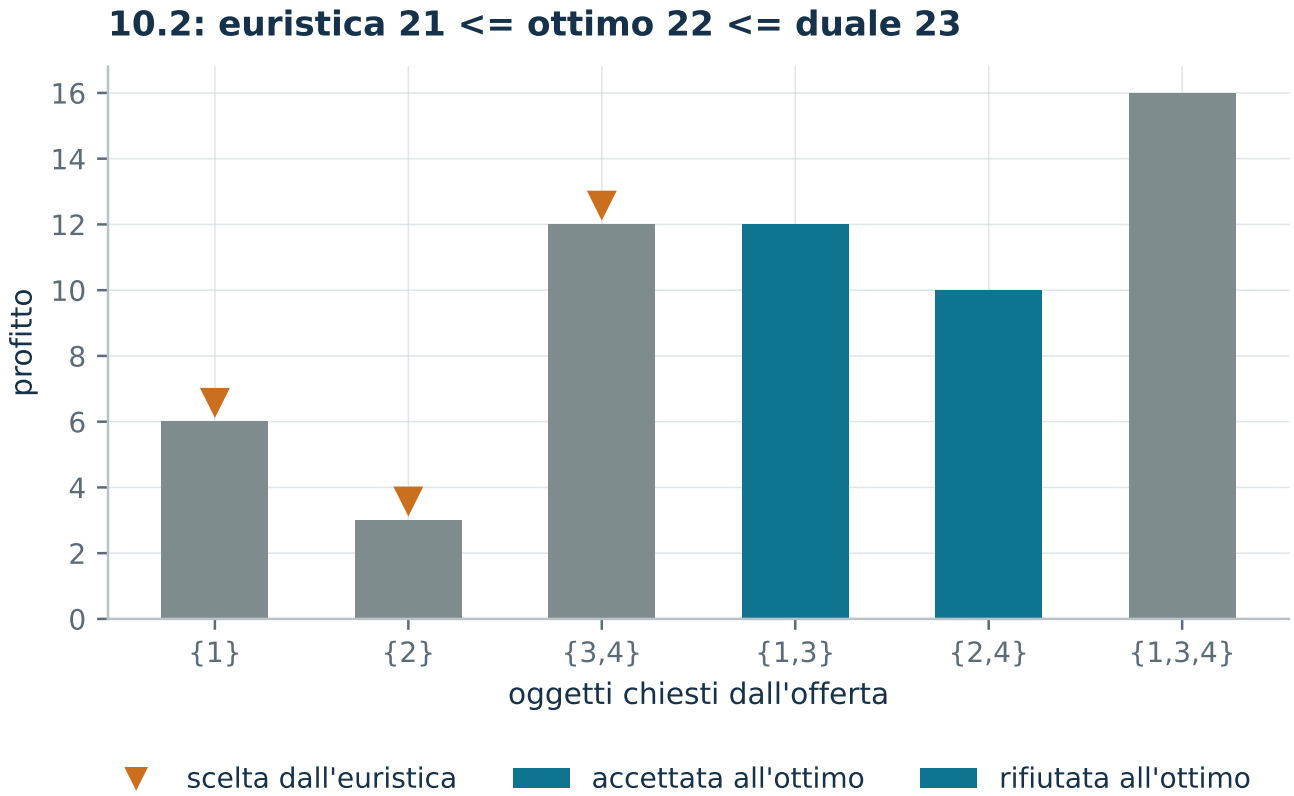
La catena dei bound è

$$21 = LB \leq z(MILP) = 22 = z(LP^+) = z(LP) \leq UB = 23$$

con un gap dell'euristica del 4,5%.

- Il banditore vende tutto, ma non perché un vincolo lo imponga: i vincoli sono $\leq$, non $=$
- Con altre offerte la soluzione ottima potrebbe lasciare oggetti sullo scaffale

Le offerte in figura



Le sei offerte con il loro profitto: in teal quelle accettate all'ottimo, in grigio quelle rifiutate; il triangolo segna quelle scelte dall'euristica.

Considerazioni aggiuntive (1/2)

- Le disuguaglianze valide $x_j \leq 1$ sono implicate dai vincoli di riga ogni volta che $B_j \neq \emptyset$: infatti $z(LP) = z(LP^+) = 22$
- Su questa istanza si ha anche $z(LP) = z(MILP)$: il rilassamento cade in un **vertice intero**
- È un caso fortunato, non una proprietà del set packing. Il controesempio minimo è il *triangolo*: tre oggetti e tre offerte che ne chiedono due ciascuna, tutte di profitto 1. Lì $z(LP) = 3/2$ (con $x = 1/2$ su tutte e tre) contro $z(MILP) = 1$

Considerazioni aggiuntive (2/2)

- Il set packing è NP-difficile in generale, ma diventa facile quando la matrice di incidenza è *perfetta* o *bilanciata*
- Il triangolo è proprio il più piccolo grafo non perfetto in questo senso
- Ed è il motivo per cui le *clique inequalities* sono i tagli classici per questa famiglia

Domanda di modellazione: offerte dello stesso partecipante

Le offerte 4 e 5 provengono dallo stesso partecipante, che può vincerne al più una.

Come cambia il modello? Qual è il nuovo ottimo?

Il confronto finale

I tre numeri che ogni problema del corso produce:

	valore	che cos'è
LB	21	soluzione euristica
UB	23	bound certificato
$z(MILP)$	22	ottimo del MILP

- Gap dell'euristica rispetto all'ottimo: $\frac{|LB - z(MILP)|}{|z(MILP)|} = 4.5\%$
- Gap certificato, noto *prima* di risolvere il MILP: $UB - LB = 2$, cioè $\frac{UB - LB}{|LB|} = 9.5\%$

Variante svolta: consegne limitate (1/3)

In questa tornata il banditore può consegnare al più due oggetti in totale. Si aggiunge il singolo vincolo lineare

$$\sum_{j=1}^{r} |B_j| \, x_j \leq 2$$

- Il coefficiente di ogni offerta è il numero di oggetti che chiede: è un vincolo di **zaino** sovrapposto al set packing
- Sull'istanza l'ottimo scende a 12: si accetta una sola offerta da due oggetti, la più redditizia fra la 3 e la 4 (entrambe valgono 12)

Variante svolta: consegne limitate (2/3)

- Il tetto sugli oggetti consegnati aggiunge al duale una $\mu \geq 0$ con termine noto 2, e nella colonna di ogni offerta compare moltiplicata per quanti oggetti quell'offerta chiede
- Fissato μ, ogni offerta si spalma sui suoi oggetti al netto di μ e λ_i è il massimo fra le offerte che chiedono l'oggetto i
- Provando μ fra i profitti per oggetto si arriva a $\mu = 6$, $\lambda = 0$ e $UB = 12$
- L'euristica accetta la sola offerta 3 e vale anch'essa 12: il sandwich si chiude, e l'ottimo si conosce senza risolvere il MILP

Variante svolta: consegne limitate (3/3)

	valore	che cos'è
UB	12	certificato duale costruito a mano
LB	12	soluzione euristica
$z(LP)$	12	rilassamento senza i bound
$z(LP^+)$	12	rilassamento con i bound
$z(MILP)$	12	ottimo del MILP

Qui i due lati del sandwich coincidono: il gap certificato è nullo.

Riepilogo: Asta combinatoria

- **Set packing** puro: una binaria per offerta, un vincolo ≤ 1 per oggetto
- I conflitti si scrivono **per righe**, non a coppie: meno vincoli e rilassamento più stretto
- **I bound**: euristica $LB = 21$, duale a mano $UB = 23$, ottimo $z(MILP) = 22 = z(LP) = z(LP^+)$
- Gap dell'euristica 4,5%, gap certificato 9,5%; la ricetta duale grossolana darebbe 58
- **Variante** con al più due oggetti consegnati: tutti i valori scendono a 12

Dieta con conteggio dei cibi e lotto minimo

Introduzione: Dieta con varietà

- Si sceglie **quali** cibi mettere nella dieta e **quanti** chili comprarne
- Ogni cibo scelto va comprato almeno in un **lotto minimo**: è questo che rende il conteggio onesto
- Vedremo la **variabile semicontinua**: o vale zero, oppure sta fra c_i e d_i
- Costruiremo un bound primale con un'euristica costruttiva e un bound duale a mano: è il sandwich più stretto del capitolo

Problema 10.3: dieta con varietà (1/2)

- Un nutrizionista deve comporre una dieta mensile scegliendo fra $s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ cibi e controllando $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ nutrienti
- Per ogni cibo $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$, il valore $w_i \in \mathbb{Q}_{>0}$ è il costo di un chilo
- Per ogni cibo i e ogni nutriente $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$, il valore $g_{ij} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ è la quantità di nutriente j contenuta in un chilo di cibo i

Problema 10.3: dieta con varietà (2/2)

- Per ogni nutriente j, l'assunzione mensile deve stare fra $a_j \in \mathbb{Q}_{>0}$ e $b_j \in \mathbb{Q}_{>0}$
- Se un cibo entra nella dieta se ne devono consumare almeno $c_i \in \mathbb{Q}_{>0}$ chili e al più $d_i \in \mathbb{Q}_{>0}$
- La dieta deve comprendere almeno $t \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ cibi diversi
- Si vuole la dieta di **costo minimo**

Il problema a parole

- **Decidiamo** quali cibi usare e in che quantità
- **L'obiettivo**: costo minimo
- **I vincoli**:
  - ogni nutriente entro la sua finestra
  - ogni cibo scelto in quantità fra il lotto minimo e il tetto
  - almeno t cibi diversi

Dati (input del modello)

Simbolo	Tipo	Significato
s	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero di cibi, $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$
r	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero di nutrienti, $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$
w_i	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	costo di un chilo di cibo i
g_{ij}	$\in \mathbb{Q}_{\geq 0}$	grammi di nutriente j per chilo di cibo i
a_j, b_j	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	minimo e massimo mensile del nutriente j
c_i, d_i	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	quantità minima e massima del cibo i, se scelto
t	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero minimo di cibi diversi

Variabili decisionali

s variabili continue non negative:

x_i = chili di cibo i consumati nel mese, $\quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, s\}$

s variabili binarie:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se il cibo } i \text{ entra nella dieta} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Modello 10.3

Modello 10.3 — dieta con varietà

$$\min \quad \sum_{i=1}^{s} w_i\, x_i \tag{10.5a}$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{i=1}^{s} g_{ij}\, x_i \geq a_j, \qquad \forall j \in \{1, 2, \ldots, r\}, \tag{10.5b}$$

$$\sum_{i=1}^{s} g_{ij}\, x_i \leq b_j, \qquad \forall j \in \{1, 2, \ldots, r\}, \tag{10.5c}$$

$$x_i - c_i\, y_i \geq 0, \qquad \forall i \in \{1, 2, \ldots, s\}, \tag{10.5d}$$

$$x_i - d_i\, y_i \leq 0, \qquad \forall i \in \{1, 2, \ldots, s\}, \tag{10.5e}$$

$$\sum_{i=1}^{s} y_i \geq t, \tag{10.5f}$$

$$x_i \geq 0, \qquad \forall i \in \{1, 2, \ldots, s\}, \tag{10.5g}$$

$$y_i \in \{0, 1\}, \qquad \forall i \in \{1, 2, \ldots, s\}. \tag{10.5h}$$

Descrizione del modello

- La **funzione obiettivo** è la spesa complessiva
- I vincoli di **fabbisogno minimo**, uno per nutriente, e quelli di **tetto**, sempre uno per nutriente, chiudono ogni nutriente nella sua finestra
- I vincoli di **lotto minimo** e di **attivazione**, uno per cibo ciascuno, rendono x_i una variabile **semicontinua**: o vale zero, o sta fra c_i e d_i
- Il vincolo di **varietà**, uno solo, chiede che i cibi comprati siano almeno t

Perché il lotto minimo serve al conteggio

- Il vincolo di varietà conta gli indicatori y_i, non le quantità
- Con il solo vincolo di attivazione si avrebbe $y_i = 1$ con $x_i = 0$: cibi accesi senza consumarne un grammo, e la varietà soddisfatta da indicatori vuoti
- Il lotto minimo chiude il cerchio: con $y_i = 1$ si ha $x_i \geq c_i > 0$, quindi ogni indicatore acceso è un cibo davvero consumato
- Sull'istanza, ponendo $c_i = 0$ l'ottimo scende da $48/5$ a $46/5$ e si accendono quattro cibi, due con quantità nulla: il conteggio non dice più niente

Il modello in gurobipy (1/2)

```
m = gp.Model("dieta")
x = m.addVars(s, name="x")
y = m.addVars(s, vtype=GRB.BINARY, name="y")
m.setObjective(gp.quicksum(w[i] * x[i]
                for i in range(s)), GRB.MINIMIZE)
m.addConstrs((gp.quicksum(g[i][j] * x[i]
              for i in range(s)) >= a[j]
              for j in range(r)), name="minimo")
```

Il modello in gurobipy (2/2)

```
m.addConstrs((gp.quicksum(g[i][j] * x[i]
              for i in range(s)) <= b[j]
              for j in range(r)), name="massimo")
m.addConstrs((x[i] - c[i] * y[i] >= 0
              for i in range(s)), name="lotto_minimo")
m.addConstrs((x[i] - d[i] * y[i] <= 0
              for i in range(s)), name="attiva")
m.addConstr(gp.quicksum(y[i] for i in range(s)) >= t,
            name="varieta")
```

L'istanza

$s = 4$ cibi, $r = 2$ nutrienti, $c_i = 1$, $d_i = 8$, $t = 3$:

	latte	riso	pane	patate
w_i (euro/kg)	2	3	1	4
ferro (g/kg)	10	20	5	25
calcio (g/kg)	5	10	15	5

	ferro	calcio
a_j	60	40
b_j	200	150

Quattro variabili continue x_i e quattro binarie y_i.

Modello 10.3 sull'istanza

Il modello dell'istanza

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrr}
\min & 2x_1 & +3x_2 & & +x_3 & +4x_4 & & & & & & & \\
\text{soggetto a} & 10x_1 & +20x_2 & & +5x_3 & +25x_4 & & & & & & \geq & 60 \\
& 5x_1 & +10x_2 & & +15x_3 & +5x_4 & & & & & & \geq & 40 \\
& 10x_1 & +20x_2 & & +5x_3 & +25x_4 & & & & & & \leq & 200 \\
& 5x_1 & +10x_2 & & +15x_3 & +5x_4 & & & & & & \leq & 150 \\
& x_1 & & & & & -y_1 & & & & & \geq & 0 \\
& & x_2 & & & & & -y_2 & & & & \geq & 0 \\
& & & & x_3 & & & & -y_3 & & & \geq & 0 \\
& & & & & x_4 & & & & -y_4 & & \geq & 0 \\
& x_1 & & & & & -8y_1 & & & & & \leq & 0 \\
& & x_2 & & & & & -8y_2 & & & & \leq & 0 \\
& & & & x_3 & & & & -8y_3 & & & \leq & 0 \\
& & & & & x_4 & & & & -8y_4 & & \leq & 0 \\
& & & & & & y_1 & +y_2 & +y_3 & +y_4 & & \geq & 3 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & & & & \geq & 0 \\
& & & & & & y_1, & & y_2, & & y_3, & y_4 \in & \{0,1\}
\end{array}
$$

Euristica costruttiva: il bound primale (1/2)

- Si accendono al **lotto minimo** i t cibi più economici
- Poi si copre il fabbisogno residuo di ciascun nutriente aggiungendo il cibo già acceso con il costo per grammo più basso

È un'euristica costruttiva: una sola soluzione, un elemento per volta, senza mai tornare indietro.

Sull'istanza i tre cibi più economici sono pane (1), latte (2) e riso (3): si accendono al lotto minimo, cioè 1 kg ciascuno.

ferro: $5 + 10 + 20 = 35$ g (ne servono 60), calcio: $15 + 5 + 10 = 30$ g (ne servono 40)

Euristica costruttiva: il bound primale (2/2)

- **Ferro:** mancano 25 grammi. Fra i cibi accesi il costo per grammo di ferro più basso è quello del riso, $3/20 = 0{,}15$; ne servono $25/20 = 1{,}25$ kg in più e il riso arriva a 2,25 kg
- **Calcio:** dopo l'aggiunta si hanno $30 + 12{,}5 = 42{,}5$ grammi, già oltre il minimo di 40: non serve altro

La dieta finale è latte 1 kg, riso 2,25 kg, pane 1 kg, per un costo di

$$z(MILP) \leq UB = \frac{39}{4} = 9{,}75$$

Duale del rilassamento LP del modello 10.3

$\alpha_j \geq 0$ ai minimi, $\beta_j \geq 0$ ai massimi, $\lambda_i \geq 0$ ai lotti minimi, $\mu_i \geq 0$ ai tetti, $\tau \geq 0$ alla varietà.

Duale del rilassamento LP del modello 10.3

$$\max \quad \sum_{j=1}^{r} a_j \alpha_j - \sum_{j=1}^{r} b_j \beta_j + t\tau \tag{10.6a}$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{j=1}^{r} g_{ij} (\alpha_j - \beta_j) + \lambda_i - \mu_i \leq w_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, s\}, \tag{10.6b}$$

$$-c_i \lambda_i + d_i \mu_i + \tau \leq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, s\}, \tag{10.6c}$$

$$\alpha_j \geq 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, r\}, \tag{10.6d}$$

$$\beta_j \geq 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, r\}, \tag{10.6e}$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, s\}, \tag{10.6f}$$

$$\mu_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, s\}, \tag{10.6g}$$

$$\tau \geq 0. \tag{10.6h}$$

Duale sull'istanza

Il modello dell'istanza

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrrrr}
\max & 60\alpha_1 & +40\alpha_2 & -200\beta_1 & -150\beta_2 & & & & & & & & & & +3\tau & & \\
\text{soggetto a} & 10\alpha_1 & +5\alpha_2 & -10\beta_1 & -5\beta_2 & +\lambda_1 & & & & -\mu_1 & & & & & & \leq & 2 \\
& 20\alpha_1 & +10\alpha_2 & -20\beta_1 & -10\beta_2 & & +\lambda_2 & & & & -\mu_2 & & & & & \leq & 3 \\
& 5\alpha_1 & +15\alpha_2 & -5\beta_1 & -15\beta_2 & & & +\lambda_3 & & & & -\mu_3 & & & & \leq & 1 \\
& 25\alpha_1 & +5\alpha_2 & -25\beta_1 & -5\beta_2 & & & & +\lambda_4 & & & & -\mu_4 & & & \leq & 4 \\
& & & & & -\lambda_1 & & & & +8\mu_1 & & & & & +\tau & \leq & 0 \\
& & & & & & -\lambda_2 & & & & +8\mu_2 & & & & +\tau & \leq & 0 \\
& & & & & & & -\lambda_3 & & & & +8\mu_3 & & & +\tau & \leq & 0 \\
& & & & & & & & -\lambda_4 & & & & +8\mu_4 & & +\tau & \leq & 0 \\
& \alpha_1, & & \alpha_2 & & & & & & & & & & & & \geq & 0 \\
& & & & \beta_1, & & \beta_2 & & & & & & & & & \geq & 0 \\
& & & & & \lambda_1, & \lambda_2, & \lambda_3, & \lambda_4 & & & & & & & \geq & 0 \\
& & & & & & & & & \mu_1, & \mu_2, & \mu_3, & \mu_4 & & & \geq & 0 \\
& & & & & & & & & & & & & & \tau & \geq & 0
\end{array}
$$

Descrizione del duale

- α_j è il prezzo di una unità del nutriente j quando serve a raggiungere il fabbisogno; β_j quello che si paga per non sforare il tetto
- λ_i e μ_i sono i prezzi dei due vincoli di semicontinuità del cibo i, τ il prezzo della varietà
- L'**obiettivo** incassa i fabbisogni valutati ad α, paga i tetti valutati a β e incassa la soglia t valutata a τ
- **Colonne delle** x_i: il contenuto nutrizionale di un chilo del cibo i, valutato ai prezzi $\alpha_j - \beta_j$ e corretto dalla semicontinuità, non può superare il prezzo w_i
- **Colonne delle** y_i: accendere il cibo i concede c_i unità di lotto minimo al prezzo λ_i, ne obbliga al più d_i al prezzo μ_i, e deve coprire il prezzo τ della varietà

Una soluzione duale a mano (1/2)

- Poniamo $\beta = \mu = \tau = 0$: massimi, tetti e varietà non si valutano
- Le colonne delle y_i diventano $-c_i\,\lambda_i \leq 0$, soddisfatte con $\lambda = 0$
- Resta da soddisfare $\sum_{j=1}^{r} g_{ij}\,\alpha_j \leq w_i$ per ogni cibo

Si può valutare *un solo* nutriente, al prezzo per grammo più basso fra i cibi:

$$\bar{\alpha}_j = \min_{i\,:\,g_{ij}>0} \frac{w_i}{g_{ij}}, \qquad \text{bound} = a_j\,\bar{\alpha}_j$$

e si tiene il nutriente che dà il bound più alto.

Una soluzione duale a mano (2/2)

Sull'istanza:

$$\text{ferro: } \bar{\alpha}_1 = \min\left(\tfrac{2}{10}, \tfrac{3}{20}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{4}{25}\right) = \tfrac{3}{20}, \qquad 60 \cdot \tfrac{3}{20} = 9$$

$$\text{calcio: } \bar{\alpha}_2 = \min\left(\tfrac{2}{5}, \tfrac{3}{10}, \tfrac{1}{15}, \tfrac{4}{5}\right) = \tfrac{1}{15}, \qquad 40 \cdot \tfrac{1}{15} = \tfrac{8}{3}$$

Il migliore è il ferro:

$$z(MILP) \geq LB = 9$$

Soluzione ottima

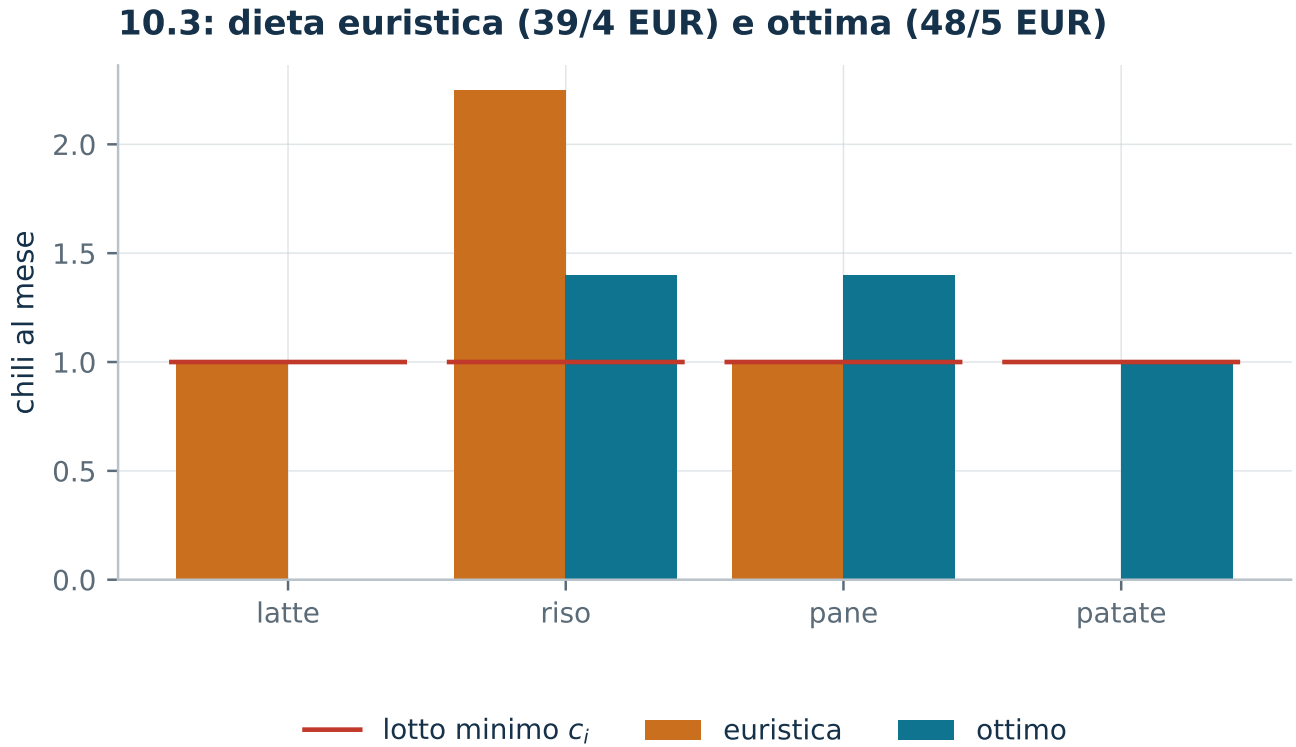
L'ottimo si ottiene risolvendo il modello: i due bound costruiti sono ciò che aiuta il solver ad arrivarci.

	latte	riso	pane	patate
x_i (kg)	0	1,4	1,4	1
y_i	0	1	1	1

Tre cibi diversi, 60 grammi di ferro e 40 di calcio: entrambi i minimi esatti.

$$z(MILP) = \frac{48}{5} = 9{,}6, \qquad 9 = LB \leq z(LP) = \frac{46}{5} \leq z(LP^+) = \frac{48}{5} = z(MILP) \leq UB = \frac{39}{4}$$

La soluzione ottima in figura



Quantità per cibo nella dieta euristica e in quella ottima; la barra rossa segna il lotto minimo c_i. Il gap dell'euristica è appena l'1,6%: è il sandwich più stretto del capitolo.

Considerazioni aggiuntive

- I vincoli di massimo non sono attivi all'ottimo ($60 \leq 200$ e $40 \leq 150$): su questa istanza si potrebbero togliere, ma su altre morderebbero
- La forma classica del problema della dieta (Stigler, 1945) non ha né lotti minimi né conteggi: è un LP puro. Sono le due aggiunte intere a renderlo un MILP
- Il vincolo di varietà si può scrivere anche come *copertura*: $\sum_{i \in G_k} y_i \geq 1$ per ogni gruppo alimentare k. Più informativo dal punto di vista nutrizionale, e non più difficile
- Qui $z(LP^+) = z(MILP)$ mentre $z(LP)$ sta sotto: aggiungere $y_i \leq 1$ serve, perché i tetti $d_i = 8$ sono molto più larghi delle quantità in gioco

Domanda di modellazione: lotto minimo più alto

Il lotto minimo sale da 1 a 2 chili per ogni cibo scelto.

Come cambia il modello? Qual è il nuovo ottimo?

Il confronto finale

I tre numeri che ogni problema del corso produce:

	valore	che cos'è
UB	$\frac{39}{4}$	soluzione euristica
LB	9	bound certificato
$z(MILP)$	$\frac{48}{5}$	ottimo del MILP

- Gap dell'euristica: $\dfrac{|UB - z(MILP)|}{|z(MILP)|} = 1.6\%$
- Gap certificato, noto *prima* di risolvere il MILP (non può avere $z(MILP)$ al denominatore): $UB - LB = \frac{3}{4}$, cioè $\dfrac{UB - LB}{|UB|} = 7.7\%$

Variante svolta: più varietà (1/2)

Si vogliono almeno quattro cibi diversi invece di tre: cambia solo il dato t, da 3 a 4.

- L'ottimo sale a $31/3 \approx 10{,}33$: si è costretti a comprare almeno un chilo anche del cibo più caro (le patate), oppure a ricomporre le quantità
- Il costo della varietà è $31/3 - 48/5 = 11/15 \approx 0{,}73$ euro al mese
- Con $t = s$ il vincolo diventa «tutti i cibi» e il modello si irrigidisce fino a coincidere con il caso in cui tutti gli indicatori valgono uno

Variante svolta: più varietà (2/2)

Il conteggio dei cibi non si valuta: con la ricetta del problema base ($\lambda = \mu = 0$ e un solo α positivo, sul ferro) resta $\tau = 0$. Il bound duale non si muove, l'ottimo sì.

	valore	che cos'è
UB	$\frac{31}{3}$	soluzione euristica
LB	9	certificato duale costruito a mano
$z(LP)$	$\frac{28}{3}$	rilassamento senza i bound
$z(LP^+)$	$\frac{31}{3}$	rilassamento con i bound
$z(MILP)$	$\frac{31}{3}$	ottimo del MILP

L'euristica accende il quarto cibo al suo lotto minimo, completa con il pane e raggiunge 31/3, che è l'ottimo.

Riepilogo: Dieta con varietà

- La variabile semicontinua nasce da due vincoli, lotto minimo e attivazione: senza il primo il conteggio dei cibi è vuoto
- Bound primale dall'euristica costruttiva: $UB = \frac{39}{4} = 9{,}75$
- Bound duale a mano valutando il solo ferro: $LB = 9$
- Ottimo $z(MILP) = \frac{48}{5} = 9{,}6$, con $z(LP) = \frac{46}{5}$ e $z(LP^+) = \frac{48}{5}$: gap dell'euristica 1,6%, gap certificato 7,7%