Pianificazione della produzione

Indice

La famiglia

Produzione e lotti con costo fisso di lancio

Produzione e manodopera: due formulazioni equivalenti

Veicoli: lotto minimo e premio per la varietà

Obiettivi (1/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- scrivere i bilanci delle scorte e della forza lavoro come vincoli di uguaglianza;
- legare quantità e binarie con un costo fisso e un big-M letto dai dati;

Obiettivi (2/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- modellare un lotto minimo e un premio per la varietà;
- scrivere il duale del rilassamento con variabili libere per i bilanci.

Prerequisiti

- Da questo modulo, Capitolo 6 «Legami fra variabili»: costo fisso, lotto minimo, conteggi interi e conteggio dei tipi
- Da questo modulo, Capitolo 4 «Euristiche costruttive»: l'euristica del minimo costo unitario per il lot sizing
- Dal modulo *Problemi di ottimizzazione combinatoria*, la pagina «Problema del lot sizing non capacitato (ULS)»: il problema di lot sizing a un prodotto

La famiglia

Introduzione: La famiglia

- Tre problemi in cui si decide **quanto** produrre, non soltanto **se** fare qualcosa
- Le variabili di quantità sono continue o intere; sopra di esse si appoggiano delle **binarie** che accendono, limitano o premiano
- Problema 1: il lancio della produzione con il suo **costo fisso**
- Problema 2: l'**organico** con le assunzioni
- Problema 3: il **lotto minimo** per tipo con un premio per la varietà

Il tratto comune: il bilancio

- Una quantità che entra, una che esce e una che resta
- Nei problemi 1 e 2: il **bilancio delle scorte**

$$x_t + s_{t-1} - s_t = d_t$$

- Nel problema 2 c'è in più il **bilancio dell'organico**

$$y_t - y_{t-1} - z_t = 0$$

- Sono vincoli di uguaglianza: i loro duali sono **variabili libere**
- È la prima famiglia del corso in cui questo succede in modo sistematico

I legami fra variabili che si rivedono

- **Costo fisso** (problema 1): $x_t \leq M_t\, y_t$, con M_t letto dai dati (la domanda residua) e non scelto a caso
- **Conteggi interi** (problema 2): l'organico y_t e le assunzioni z_t sono numeri di persone, e le ore disponibili sono $r\, y_t$
- **Lotto minimo** (problema 3): la variabile semi-intera $q_j\, y_j \leq x_j \leq M_j\, y_j$, che vale zero oppure almeno q_j
- **Contare i tipi** e **se e solo se** (problema 3): il premio si incassa solo se i tipi attivi sono almeno due; il verso mancante lo impone l'ottimalità

Lo schema di ogni problema

Per ognuno dei tre problemi vedremo:

- modello e dimostrazione dei legami
- istanza ed euristica costruttiva (bound primale)
- duale del rilassamento LP con una soluzione duale costruita a mano (bound duale)
- soluzione del solver e considerazioni aggiuntive
- una domanda di modellazione e una variante svolta

Tutti i numeri vengono dagli script `fam09_1_lotti.py`, `fam09_2_manodopera.py` e `fam09_3_veicoli.py`

Notazione della famiglia (1/3): periodi e costi

Simbolo	Tipo	Significato
n	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero di periodi, $t \in \{1, 2, \ldots, n\}$
d_t	$\in \mathbb{Q}_{\geq 0}$	domanda del periodo t
p_t	$\in \mathbb{Q}_{> 0}$	costo unitario di produzione
q_t	$\in \mathbb{Q}_{\geq 0}$	costo fisso di lancio
h_t	$\in \mathbb{Q}_{\geq 0}$	costo di magazzino a fine periodo t
$r_0,\ r_n$	$\in \mathbb{Q}_{\geq 0}$	scorta iniziale e finale richiesta
M_t	$\in \mathbb{Q}_{> 0}$	massima produzione utile: $\sum_{\tau \geq t} d_\tau + r_n$

Notazione della famiglia (2/3): manodopera

Simbolo	Tipo	Significato
m_0	$\in \mathbb{Z}_{\geq 0}$	operai in servizio all'inizio
w	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	salario di un operaio per periodo
u	$\in \mathbb{Q}_{\geq 0}$	costo di assunzione di un operaio
r	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	ore lavorate da un operaio in un periodo
g	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	ore di lavoro per una unità di prodotto

Notazione della famiglia (3/3): tipi e risorse

Simbolo	Tipo	Significato
s	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero di tipi di prodotto, indice j
k	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero di risorse, indice i
a_{ij}	$\in \mathbb{Q}_{\geq 0}$	risorsa i per una unità del tipo j
b_i	$\in \mathbb{Q}_{> 0}$	disponibilità della risorsa i
$\bar{p}_j$	$\in \mathbb{Q}_{> 0}$	profitto unitario del tipo j
$\bar{q}_j$	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	lotto minimo del tipo j
$\bar{r}$	$\in \mathbb{Q}_{> 0}$	premio se si producono almeno due tipi

Riepilogo: La famiglia

- Si decide **quanto** produrre: variabili di quantità con binarie che accendono, limitano o premiano
- Il tratto comune è il **bilancio**, scritto con vincoli di uguaglianza e quindi con duali liberi
- Legami: costo fisso, conteggi interi, lotto minimo (variabile semi-intera), conteggio dei tipi
- Per ogni problema: bound primale, bound duale e ottimo del solver

Produzione e lotti con costo fisso di lancio

Introduzione: Lotti con costo fisso di lancio

- Il primo problema: un unico prodotto da pianificare su più periodi
- Ogni volta che si lancia la produzione si paga un **costo fisso**; tenere scorte costa
- Vedremo il legame $x_t \leq M_t\, y_t$ e come scegliere il **big-M dai dati**
- Costruiremo un bound primale con due euristiche e un bound duale a mano

Problema 9.1: lotti con costo fisso (1/2)

- Un'azienda pianifica la produzione di un unico prodotto su $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ periodi
- Per ogni periodo $t \in \{1, 2, \ldots, n\}$:
  - $d_t \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ è la domanda da soddisfare
  - $p_t \in \mathbb{Q}_{> 0}$ il costo di produrre una unità
  - $q_t \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ il costo fisso se in quel periodo la produzione viene lanciata
- Per ogni $t \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, $h_t \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ è il costo di tenere in magazzino una unità dalla fine del periodo t all'inizio del successivo

Problema 9.1: lotti con costo fisso (2/2)

- La scorta iniziale è $r_0 \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$
- Quella richiesta alla fine dell'orizzonte è $r_n \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$
- L'azienda vuole decidere quanto produrre in ogni periodo in modo da soddisfare tutta la domanda al **costo totale minimo**

Il problema a parole

- **Decidiamo** quanto produrre in ogni periodo, e di conseguenza quanto resta in magazzino
- **L'obiettivo**: costo totale (produzione, lanci e magazzino) minimo
- **I vincoli**:
  - la domanda di ogni periodo va soddisfatta esattamente, con quello che si produce e con quello che si è tenuto da parte
  - non si può produrre senza pagare il costo fisso di lancio
- È il problema di **lot sizing** con setup

Dati (input del modello)

Simbolo	Tipo	Significato
n	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero di periodi, $t \in \{1, 2, \ldots, n\}$
d_t	$\in \mathbb{Q}_{\geq 0}$	domanda del periodo t
p_t	$\in \mathbb{Q}_{> 0}$	costo unitario di produzione nel periodo t
q_t	$\in \mathbb{Q}_{\geq 0}$	costo fisso di lancio nel periodo t
h_t	$\in \mathbb{Q}_{\geq 0}$	costo di magazzino a fine periodo t, $t \leq n-1$
$r_0,\ r_n$	$\in \mathbb{Q}_{\geq 0}$	scorta iniziale e finale richiesta

Variabili decisionali

n variabili continue non negative:

$$x_t = \text{unità prodotte nel periodo } t, \qquad \forall t \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

$n - 1$ variabili continue non negative:

$s_t = \text{unità in magazzino a fine periodo } t, \qquad \forall t \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$

n variabili binarie:

$$y_t = \begin{cases} 1 & \text{se nel periodo } t \text{ la produzione viene lanciata} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Modello 9.1

Modello 9.1 — lotti con costo fisso

$$\min \quad \sum_{t=1}^{n} p_t\, x_t + \sum_{t=1}^{n} q_t\, y_t + \sum_{t=1}^{n-1} h_t\, s_t \tag{9.1a}$$

$$\text{soggetto a} \quad x_1 - s_1 = d_1 - r_0, \tag{9.1b}$$

$$x_t + s_{t-1} - s_t = d_t, \qquad \forall t \in \{2, 3, \ldots, n-1\}, \tag{9.1c}$$

$$x_n + s_{n-1} = d_n + r_n, \tag{9.1d}$$

$$-x_t + M_t\, y_t \geq 0, \qquad \forall t \in \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{9.1e}$$

$$x_t \geq 0, \qquad \forall t \in \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{9.1f}$$

$$s_t \geq 0, \qquad \forall t \in \{1, 2, \ldots, n-1\}, \tag{9.1g}$$

$$y_t \in \{0, 1\}, \qquad \forall t \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{9.1h}$$

Descrizione del modello

- La **funzione obiettivo** somma il costo di produzione, quello dei lanci e quello del magazzino
- I vincoli di **bilancio delle scorte** sono uno per periodo (n vincoli di uguaglianza): quello che si aveva più quello che si produce meno quello che si vende è quello che resta
- I vincoli di **lancio** legano quantità e lancio (n vincoli lineari)

Il legame fra le variabili (1/2)

Il vincolo di lancio si legge

$$x_t \leq M_t \, y_t$$

- Se $y_t = 0$ allora $x_t \leq 0$ e, con $x_t \geq 0$, si ottiene $x_t = 0$: **senza lancio non si produce**
- Se $y_t = 1$ il vincolo diventa $x_t \leq M_t$ e non è restrittivo, purché M_t sia scelto abbastanza grande

Il legame fra le variabili (2/2)

- Il verso opposto, *se* $x_t = 0$ *allora* $y_t = 0$, non è imposto da alcun vincolo
- Segue dall'**ottimalità**: se $x_t = 0$ e $y_t = 1$, porre $y_t = 0$ resta ammissibile e fa risparmiare q_t
- Se $q_t > 0$ ogni soluzione ottima ha $y_t = 0$
- Se $q_t = 0$ il risparmio è nullo: si può dire soltanto che *esiste* una soluzione ottima con $y_t = 0$

La tavola di verità del legame $x_t \leq M_t\, y_t$

Il legame va verificato su tutti i valori di y_t, tenendo conto che $x_t \geq 0$:

y_t	vincolo	x_t ammesse	lettura
0	$x_t \leq 0$	solo $x_t = 0$	senza lancio non si produce
1	$x_t \leq M_t$	$0 \leq x_t \leq M_t$	col lancio si produce

Resta scoperta la combinazione $x_t = 0$ con $y_t = 1$: è ammissibile, ma non compare in alcuna soluzione ottima, perché

$y_t = 1$ e $x_t = 0 \implies$ porre $y_t = 0$ resta ammissibile e risparmia $q_t \geq 0$

Il big-M si legge dai dati (1/2)

Osservazione 1: Il big-M si legge dai dati

Un M_t valido deve essere almeno pari alla massima quantità che conviene produrre nel periodo t. In una soluzione ottima non si produce mai più della domanda che resta da coprire, scorta finale inclusa:

$$M_t = \sum_{\tau=t}^{n} d_\tau + r_n$$

Nel primo periodo si può togliere la scorta iniziale, che è un dato: $M_1 = \sum_{\tau=1}^{n} d_\tau + r_n - r_0$.

Il big-M si legge dai dati (2/2)

- Dal secondo periodo in poi la scorta che entra non è nota a priori, e il bound resta $\sum_{\tau \geq t} d_\tau + r_n$
- Sull'istanza $r_0 = 0$, quindi i due valori coincidono
- Ogni valore più grande è ancora valido ma **indebolisce il rilassamento LP**; ogni valore più piccolo può **tagliare soluzioni ottime**
- Sull'istanza $M = (110, 90, 80, 50, 10)$: il big-M dell'ultimo periodo vale 10, non 110

I due bound che costruiremo, primale (euristica) e duale (rilassamento), sono i due lati del sandwich che il solver cerca di chiudere.

Il modello in gurobipy (1/2)

```
m = gp.Model("lotti")
x = m.addVars(n, name="x")
s = m.addVars(n - 1, name="s")
y = m.addVars(n, vtype=GRB.BINARY, name="y")
m.setObjective(
    gp.quicksum(p[t] * x[t] for t in range(n))
    + gp.quicksum(q[t] * y[t] for t in range(n))
    + gp.quicksum(h[t] * s[t]
                  for t in range(n - 1)),
    GRB.MINIMIZE)
```

Il modello in gurobipy (2/2)

```
m.addConstr(x[0] - s[0] == d[0] - r0,
            name="bilancio[0]")
m.addConstrs((x[t] + s[t - 1] - s[t] == d[t]
              for t in range(1, n - 1)),
             name="bilancio")
m.addConstr(x[n - 1] + s[n - 2] == d[n - 1] + rn,
            name=f"bilancio[{n␣-␣1}]")
m.addConstrs((-x[t] + M[t] * y[t] >= 0
              for t in range(n)), name="lancio")
```

L'istanza

$n = 5$ periodi (giorni), $r_0 = r_n = 0$:

	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$
d_t	20	10	30	40	10
p_t	2	3	2	3	2
q_t	50	50	50	50	50
M_t	110	90	80	50	10
h_t	1	1	1	1	—

La domanda totale è 110 unità.

Modello 9.1 sull'istanza

Modello 9.1 sull'istanza

$$\min\ 2x_1+3x_2+2x_3+3x_4+2x_5+s_1+s_2+s_3+s_4\ +50y_1+50y_2+50y_3+50y_4+50y_5$$

$$\begin{aligned}
\text{soggetto a}\quad & x_1 - s_1 = 20\\
& x_2 + s_1 - s_2 = 10\\
& x_3 + s_2 - s_3 = 30\\
& x_4 + s_3 - s_4 = 40\\
& x_5 + s_4 = 10\\
-x_1 & + 110y_1 \geq 0\\
-x_2 & + 90y_2 \geq 0\\
-x_3 & + 80y_3 \geq 0\\
-x_4 & + 50y_4 \geq 0\\
-x_5 & + 10y_5 \geq 0\\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 & \geq 0\\
s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4 & \geq 0\\
y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5 & \in \{0,1\}
\end{aligned}$$

Duale sull'istanza

Duale sull'istanza

$$
\begin{aligned}
& \max 20\mu_1+10\mu_2+30\mu_3+40\mu_4+10\mu_5 \\
\text{soggetto a } & \mu_1 - \pi_1 \le 2 \\
& \mu_2 - \pi_2 \le 3 \\
& \mu_3 - \pi_3 \le 2 \\
& \mu_4 - \pi_4 \le 3 \\
& \mu_5 - \pi_5 \le 2 \\
& 110\pi_1 \le 50 \\
& 90\pi_2 \le 50 \\
& 80\pi_3 \le 50 \\
& 50\pi_4 \le 50 \\
& 10\pi_5 \le 50 \\
-\mu_1 + \mu_2 & \le 1 \\
-\mu_2 + \mu_3 & \le 1 \\
-\mu_3 + \mu_4 & \le 1 \\
-\mu_4 + \mu_5 & \le 1 \\
\mu_1, \ \mu_2, \ \mu_3, \ \mu_4, \ \mu_5 & \gtreqless 0 \\
\pi_1, \ \pi_2, \ \pi_3, \ \pi_4, \ \pi_5 & \ge 0
\end{aligned}
$$

Due cose da notare in questo duale

- I vincoli sulle colonne delle scorte, $-\mu_t + \mu_{t+1} \leq 1$, dicono che il prezzo di una unità non può crescere di più del costo di magazzino da un periodo al successivo
- Il vincolo $10\pi_5 \leq 50$ è molto più lasco degli altri, perché il big-M dell'ultimo periodo vale 10 e non 110
- Un big-M piccolo nel primale lascia più spazio alla variabile duale: è un'altra faccia del fatto che i big-M piccoli danno **rilassamenti più stretti**

Euristiche costruttive: (a) lot-for-lot

Due regole classiche, entrambe ammissibili per costruzione.

(a) Lot-for-lot: si produce ogni giorno esattamente la domanda del giorno

- nessuna scorta, ma un lancio ogni giorno

Il costo è

$$\sum_{t=1}^{5} p_t \, d_t + \sum_{t=1}^{5} q_t = 270 + 250 = 520$$

Euristiche costruttive: (b) least unit cost (1/2)

Si parte dal primo periodo scoperto e si copre con un solo lancio i k periodi che minimizzano il costo medio per unità

$$\frac{q + \sum_{i=1}^{k-1} h \cdot (\text{unità tenute } i \text{ periodi})}{\sum_{i=0}^{k-1} d_{t+i}}$$

poi si ricomincia dal primo periodo ancora scoperto.

- Il costo p non compare: le alternative partono dallo stesso periodo e coprono le stesse domande, quindi pagano lo stesso p
- I costi medi sono costi **incrementali** di lancio più magazzino

Euristiche costruttive: (b) least unit cost (2/2)

È un'euristica costruttiva: si costruisce una sola soluzione, un elemento per volta, senza mai tornare indietro. Tempo $O(n^2)$. Sull'istanza:

- periodo 1: si copre fino al periodo 2, quantità 30, costo medio 2
- periodo 3: si copre fino al periodo 4, quantità 70, costo medio $\approx 1{,}286$
- periodo 5: si copre il solo periodo 5, quantità 10, costo medio 5

Si lancia nei giorni $1, 3, 5$; il costo totale è 420. Tenendo la migliore delle due euristiche:

$$z(MILP) \leq UB = 420$$

Rilassamento LP e duale: le variabili duali

- Una variabile duale **libera** μ_t per ciascun vincolo di bilancio (uguaglianze)
- Una variabile duale **non negativa** π_t per ciascun vincolo di lancio (verso $\geq$)
- Termini noti dei bilanci:

$$b_1 = d_1 - r_0, \qquad b_t = d_t \ (2 \leq t \leq n-1), \qquad b_n = d_n + r_n$$

Duale del rilassamento LP del modello 9.1

Duale del rilassamento LP del modello 9.1

$$\max \quad \sum_{t=1}^{n} b_t \, \mu_t \tag{9.2a}$$

$$\text{soggetto a} \quad \mu_t - \pi_t \leq p_t, \qquad \forall t \in \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{9.2b}$$

$$M_t \, \pi_t \leq q_t, \qquad \forall t \in \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{9.2c}$$

$$-\mu_t + \mu_{t+1} \leq h_t, \quad \forall t \in \{1, 2, \ldots, n-1\}, \tag{9.2d}$$

$$\mu_t \gtreqless 0, \qquad \forall t \in \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{9.2e}$$

$$\pi_t \geq 0, \qquad \forall t \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{9.2f}$$

Descrizione del duale (1/2)

- μ_t è il valore di una unità disponibile nel periodo t; π_t il prezzo di una unità di capacità di lancio
- L'**obiettivo** valuta a quei prezzi la domanda di ciascun periodo
- **Colonne delle** x_t: produrre una unità nel periodo t vale μ_t e consuma capacità di lancio al prezzo π_t; il saldo non può superare il costo unitario p_t

Descrizione del duale (2/2)

- **Colonne delle** y_t: tutta la capacità M_t che un lancio mette a disposizione, valutata a π_t, non può valere più del costo fisso q_t
- **Colonne delle** s_t: portare una unità dal periodo t al $t+1$ fa guadagnare $\mu_{t+1} - \mu_t$, che non può superare h_t
- Le μ_t sono libere perché i bilanci sono uguaglianze; le π_t sono non negative perché i vincoli di lancio hanno verso $\geq$ in un problema di minimo

Una soluzione duale a mano (1/2)

- Poniamo $\bar{\pi}_t = 0$ per ogni t: i vincoli $M_t\,\pi_t \le q_t$ sono soddisfatti perché $q_t \ge 0$, e i lanci diventano gratuiti
- Restano $\mu_t \le p_t$ e $\mu_{t+1} \le \mu_t + h_t$: il valore più grande ammissibile si costruisce in avanti

$$\bar{\mu}_1 = p_1, \qquad \bar{\mu}_t = \min(\bar{\mu}_{t-1} + h_{t-1},\ p_t) \quad \text{per } t \ge 2$$

- $\bar{\mu}_t$ è il costo unitario più basso per avere una unità disponibile nel periodo t: producendola allora, oppure prima e tenendola in magazzino

Una soluzione duale a mano (2/2)

Sull'istanza $h = 1$ è basso e i costi di produzione sono $2, 3, 2, 3, 2$:

$$\bar{\mu} = (2,\ 3,\ 2,\ 3,\ 2)$$

$$LB = \sum_{t=1}^{5} d_t\, \bar{\mu}_t = 2 \cdot 20 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 30 + 3 \cdot 40 + 2 \cdot 10 = 270$$

- È il costo di produzione se i lanci fossero gratuiti: un bound valido, e volutamente ottimista
- Il rilassamento LP paga i lanci in frazione ($\pi_t = q_t / M_t$ è ammissibile) e arriva più in alto:

$$z(LP) = z(LP^+) = \frac{3890}{11} \approx 353{,}64$$

Soluzione ottima

L'ottimo si ottiene risolvendo il modello: i due bound costruiti sono ciò che aiuta il solver ad arrivarci.

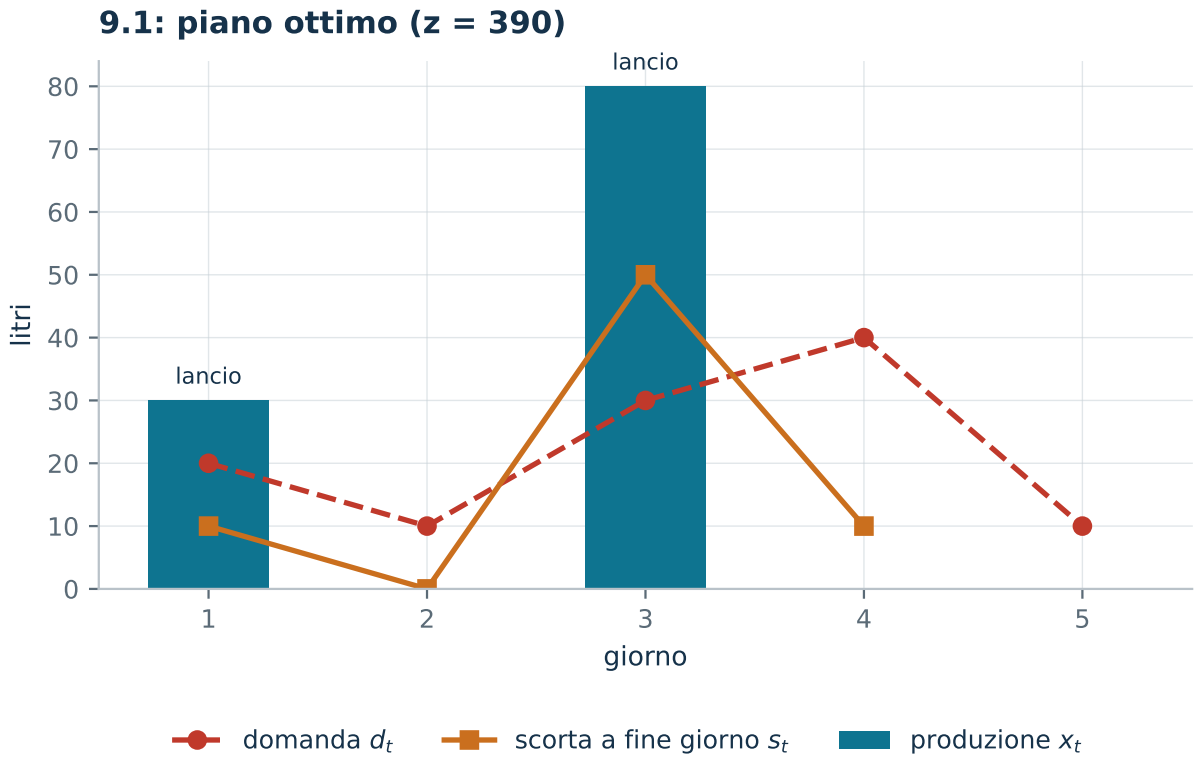
	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$	$t=5$
lancio y_t	1	0	1	0	0
produzione x_t	30	0	80	0	0
scorta s_t	10	0	50	10	—

Il costo è $z(MILP) = 390$, e la catena dei bound è

$$270 = LB \leq z(LP) = \frac{3890}{11} \leq z(MILP) = 390 \leq UB = 420$$

Soluzione ottima: i gap e il piano

- Gap dell'euristica: $(420 - 390)/390 = 7{,}7\%$
- Gap certificato, prima di risolvere il MILP: $(420 - 270)/390 = 38{,}5\%$



I due lanci coprono, il primo, i giorni 1–2 e, il secondo, i giorni 3–5.

Considerazioni aggiuntive (1/2)

- Il modello è un caso particolare del problema risolto in tempo $O(n^2)$ dalla programmazione dinamica di **Wagner–Whitin**
- La least unit cost *non* è quell'algoritmo: è una regola miope che guarda un lancio per volta e in generale non trova l'ottimo (sull'istanza 420 contro 390)
- La disuguaglianza valida $x_t \leq M_t$, ottenuta dal vincolo di lancio con $y_t \leq 1$, non aggiunge nulla: M_t è già la massima produzione utile. Infatti $z(LP) = z(LP^+)$

Considerazioni aggiuntive (2/2)

- Una formulazione alternativa, molto più stretta, usa le variabili

$$x_{t\tau} = \text{unità prodotte in } t \text{ e vendute in } \tau$$

(formulazione **facility location** del lot sizing)

- Il suo rilassamento LP è intero, ma ha $O(n^2)$ variabili
- È il tipico scambio fra **dimensione del modello** e **qualità del rilassamento**

Domanda di modellazione: lotto minimo

Se in un giorno si produce, si devono produrre almeno 25 unità (sotto quella soglia l'attrezzaggio non è giustificato).

Come cambia il modello? Qual è il nuovo ottimo?

Il confronto finale

I tre numeri che ogni problema del corso produce:

	valore	che cos'è
UB	420	soluzione euristica
LB	270	bound certificato
$z(MILP)$	390	ottimo del MILP

- Gap dell'euristica: $\dfrac{|UB - z(MILP)|}{|z(MILP)|} = 7.7\%$
- Gap certificato, noto *prima* di risolvere il MILP (non può avere $z(MILP)$ al denominatore): $UB - LB = 150$, cioè $\dfrac{UB - LB}{|UB|} = 35.7\%$

Variante svolta: capacità giornaliera (1/3)

L'impianto non può produrre più di 35 unità al giorno. Si aggiungono gli n vincoli lineari

$$x_t \leq 35, \qquad \forall t \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

- In alternativa si sostituisce il big-M con $M'_t = \min(M_t, 35)$: il vincolo diventa sia il legame di attivazione sia il vincolo di capacità, come nella localizzazione capacitata
- Il piano ottimo con due soli lanci non è più ammissibile ($80 > 35$): l'ottimo sale a 470

Variante svolta: capacità giornaliera (2/3)

- Il tetto $x_t \leq 35$ aggiunge al duale una famiglia $\nu_t \geq 0$ con termine noto -35: entra nell'obiettivo con segno negativo e allenta la colonna di x_t
- Alzare ν_t di una unità alza il tetto su μ_t e incassa d_t, ma costa 35: conviene solo dove la domanda supera la capacità
- Sull'istanza nemmeno il giorno più carico lo giustifica: il certificato resta $LB = 270$
- Cambia l'euristica: il quarto giorno il lot-for-lot sforerebbe, e le 5 unità in eccesso si anticipano al terzo

Variante svolta: capacità giornaliera (3/3)

	valore	che cos'è
UB	520	soluzione euristica
LB	270	certificato duale costruito a mano
$z(LP)$	$\frac{305365}{792}$	rilassamento senza i bound
$z(LP^+)$	$\frac{305365}{792}$	rilassamento con i bound
$z(MILP)$	470	ottimo del MILP

Riepilogo: Lotti con costo fisso

- Bilancio delle scorte (uguaglianze) e legame $x_t \leq M_t\, y_t$; il verso mancante lo impone l'ottimalità
- Il big-M si legge dai dati: $M_t = \sum_{\tau \geq t} d_\tau + r_n$
- Bound: $LB = 270$ (lanci gratuiti), $z(LP) \approx 353{,}64$, $z(MILP) = 390$, $UB = 420$ (least unit cost)
- La formulazione facility location ha rilassamento intero ma $O(n^2)$ variabili

Produzione e manodopera: due formulazioni equivalenti

Introduzione: Produzione e manodopera

- Il secondo problema aggiunge alla produzione la decisione sull'**organico**
- Le variabili di personale sono **conteggi interi**: numeri di persone
- Vedremo due formulazioni, con le assunzioni e con l'organico, e dimostreremo che descrivono lo stesso insieme di piani
- È il primo caso del corso di due modelli apparentemente diversi ma equivalenti

Problema 9.2: produzione e manodopera (1/2)

- Un calzaturificio pianifica la produzione su $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ mesi
- Per ogni mese t: $d_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ è la domanda in paia e $p_t \in \mathbb{Q}_{>0}$ il costo delle materie prime per un paio
- Per ogni mese $t \leq n-1$: $h_t \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ è il costo di tenere un paio in magazzino a fine mese
- All'inizio l'azienda ha $m_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ operai; ogni operaio lavora r ore al mese e costa w euro al mese; un paio richiede g ore di lavoro

Problema 9.2: produzione e manodopera (2/2)

- All'inizio di ogni mese si possono assumere operai, al costo di $u \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ euro ciascuno
- Non si licenzia nessuno
- L'azienda vuole decidere quanto produrre e quanti operai avere in ogni mese, al **costo totale minimo**

Il problema a parole

- **Decidiamo** quanto produrre, quanto tenere in magazzino e quanti operai assumere
- **L'obiettivo**: costo totale (materie prime, magazzino, salari e assunzioni) minimo
- **I vincoli**:
  - la domanda va soddisfatta esattamente
  - la produzione di un mese non può richiedere più ore di quelle che gli operai in servizio riescono a fare

Dati (input del modello)

Simbolo	Tipo	Significato
n	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero di mesi, $t \in \{1, 2, \ldots, n\}$
d_t	$\in \mathbb{Z}_{\geq 0}$	domanda (paia) del mese t
p_t	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	costo delle materie prime per un paio
h_t	$\in \mathbb{Q}_{\geq 0}$	costo di magazzino a fine mese t
m_0	$\in \mathbb{Z}_{\geq 0}$	operai in servizio all'inizio
w	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	salario mensile di un operaio
u	$\in \mathbb{Q}_{\geq 0}$	costo di assunzione di un operaio
r	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	ore lavorate da un operaio in un mese
g	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	ore di lavoro per un paio

Formulazione A: le assunzioni

Le variabili di personale, intere e non negative, sono

$$z_t = \text{operai assunti all'inizio del mese } t, \qquad \forall t \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

- Un operaio assunto al mese t resta in servizio fino alla fine: costa u una volta più w per ciascuno dei $n - t + 1$ mesi restanti
- Il salario degli m_0 operai iniziali, $m_0\, w\, n$, è un **termine costante**: lo si lascia fuori dal modello e lo si somma al valore finale

Formulazione B: l'organico

Le variabili di personale, intere e non negative, sono

$$y_t = \text{operai in servizio nel mese } t, \qquad \forall t \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

- $y_t \geq y_{t-1}$ perché non si licenzia
- Il costo è $w\, y_t$ ogni mese, più u per ogni assunzione, cioè $u\,(y_n - m_0)$ in totale
- Le assunzioni sono gli incrementi dell'organico: la somma telescopica lascia solo gli estremi

Modello 9.2A

Modello 9.2A — con le assunzioni

$$\min \quad \sum_{t=1}^{n} p_t\, x_t + \sum_{t=1}^{n-1} h_t\, s_t + \sum_{t=1}^{n} \big(u + w\,(n-t+1)\big) z_t \tag{9.3a}$$

$$\text{soggetto a} \quad x_1 - s_1 = d_1, \tag{9.3b}$$

$$x_t + s_{t-1} - s_t = d_t, \qquad \forall t \in \{2, 3, \ldots, n-1\}, \tag{9.3c}$$

$$x_n + s_{n-1} = d_n, \tag{9.3d}$$

$$-g\, x_t + r \sum_{j=1}^{t} z_j \geq -r\, m_0, \qquad \forall t \in \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{9.3e}$$

$$x_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \qquad \forall t \in \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{9.3f}$$

$$s_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \qquad \forall t \in \{1, 2, \ldots, n-1\}, \tag{9.3g}$$

$$z_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \qquad \forall t \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{9.3h}$$

Modello 9.2B

Modello 9.2B — con l'organico

$$\min \quad \sum_{t=1}^{n} p_t\, x_t + \sum_{t=1}^{n-1} h_t\, s_t + \sum_{t=1}^{n} w\, y_t + u\,(y_n - m_0) \tag{9.4a}$$

$$\text{soggetto a} \quad x_1 - s_1 = d_1, \tag{9.4b}$$

$$x_t + s_{t-1} - s_t = d_t, \qquad \forall t \in \{2, 3, \ldots, n-1\}, \tag{9.4c}$$

$$x_n + s_{n-1} = d_n, \tag{9.4d}$$

$$-g\, x_t + r\, y_t \geq 0, \qquad \forall t \in \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{9.4e}$$

$$y_1 \geq m_0, \tag{9.4f}$$

$$-y_{t-1} + y_t \geq 0, \qquad \forall t \in \{2, 3, \ldots, n\}, \tag{9.4g}$$

$$x_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \qquad \forall t \in \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{9.4h}$$

$$s_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \qquad \forall t \in \{1, 2, \ldots, n-1\}, \tag{9.4i}$$

$$y_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \qquad \forall t \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{9.4j}$$

Descrizione delle due formulazioni

- Condividono i vincoli di **bilancio delle scorte**: uno per mese, quanto si produce più quanto si ha in magazzino copre esattamente la domanda
- I vincoli sulle **ore disponibili**, uno per mese: la produzione non può richiedere più ore di quante ne facciano gli operai in servizio
- Nella B ci sono in più $y_1 \geq m_0$, che parte dagli operai iniziali, e i vincoli di **monotonia**, che vietano i licenziamenti
- Nella A quegli stessi fatti sono nascosti nel dominio delle z_t, non negative

Le due formulazioni descrivono lo stesso problema (1/2)

La corrispondenza è

$$y_t = m_0 + \sum_{j=1}^{t} z_j, \qquad \text{cioè} \qquad z_t = y_t - y_{t-1} \quad (\text{con } y_0 = m_0)$$

Ammissibilità:

- il vincolo sulle ore della A diventa esattamente quello della B
- $z_t \geq 0$ diventa $y_t \geq y_{t-1}$ (monotonia) e $y_1 \geq m_0$
- i bilanci non contengono variabili di personale e restano identici

La corrispondenza è una **biiezione** fra i piani ammissibili dei due modelli.

Le due formulazioni descrivono lo stesso problema (2/2)

Costo: il costo del personale in B è

$$\sum_{t=1}^{n} w\, y_t + u\,(y_n - m_0) = \sum_{t=1}^{n} w\left(m_0 + \sum_{j \le t} z_j\right) + u \sum_{t=1}^{n} z_t$$

Il primo termine vale $m_0\, w\, n + w \sum_t (n - t + 1)\, z_t$, perché z_j compare in tutti i mesi da j in poi. Sommando il secondo:

$$m_0\, w\, n + \sum_{t=1}^{n} \big(u + w\,(n - t + 1)\big) z_t$$

Le due funzioni obiettivo differiscono per la sola costante $m_0\, w\, n$: stessi ottimi.

Perché tenerle entrambe

- La A ha meno vincoli (niente monotonia) ma coefficienti di costo che dipendono dal periodo
- La B ha coefficienti uniformi e si estende meglio se si aggiungono i licenziamenti: basta $\ell_t \geq 0$ e il bilancio $y_t = y_{t-1} + z_t - \ell_t$
- Sull'istanza anche i **rilassamenti** coincidono: $z(LP) = 15\,960$ per entrambe
- Due formulazioni equivalenti sull'intero non lo sono sempre sul rilassamento: la verifica va fatta, non data per scontata

Il modello in gurobipy (1/2)

```
m = gp.Model("manodopera_B")
x = m.addVars(n, vtype=GRB.INTEGER, name="x")
s = m.addVars(n - 1, vtype=GRB.INTEGER, name="s")
y = m.addVars(n, vtype=GRB.INTEGER, name="y")
m.setObjective(
    gp.quicksum(p[t] * x[t] for t in range(n))
    + gp.quicksum(h[t] * s[t]
                  for t in range(n - 1))
    + gp.quicksum(w * y[t] for t in range(n))
    + u * (y[n - 1] - m0), GRB.MINIMIZE)
```

Il modello in gurobipy (2/2)

```
m.addConstr(x[0] - s[0] == d[0],
            name="bilancio[0]")
m.addConstrs((x[t] + s[t - 1] - s[t] == d[t]
              for t in range(1, n - 1)),
             name="bilancio")
m.addConstr(x[n - 1] + s[n - 2] == d[n - 1],
            name=f"bilancio[{n␣-␣1}]")
m.addConstrs((-g * x[t] + r * y[t] >= 0
              for t in range(n)), name="ore")
m.addConstr(y[0] >= m0, name="organico_iniziale")
m.addConstrs((-y[t - 1] + y[t] >= 0
              for t in range(1, n)),
             name="mai_licenziamenti")
```

L'istanza

$n = 3$ mesi, $m_0 = 2$ operai, $w = 1500$, $u = 100$, $r = 160$ ore, $g = 4$ ore per paio, $h_t = 3$:

	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
d_t	60	100	140
p_t	15	15	15

Con due operai la capacità iniziale è $2 \cdot 160/4 = 80$ paia al mese: basta per il primo mese, non per gli altri due.

Modello 9.2B sull'istanza

Modello 9.2B sull'istanza

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrr}
\min & 15x_1 & +15x_2 & +15x_3 & +3s_1 & +3s_2 & +1500y_1 & +1500y_2 & +1600y_3 & & \\
\text{soggetto a} & x_1 & & & -s_1 & & & & & = & 60 \\
& & x_2 & & +s_1 & -s_2 & & & & = & 100 \\
& & & x_3 & & +s_2 & & & & = & 140 \\
& -4x_1 & & & & & +160y_1 & & & \geq & 0 \\
& & -4x_2 & & & & & +160y_2 & & \geq & 0 \\
& & & -4x_3 & & & & & +160y_3 & \geq & 0 \\
& & & & & & y_1 & & & \geq & 2 \\
& & & & & & -y_1 & +y_2 & & \geq & 0 \\
& & & & & & & -y_2 & +y_3 & \geq & 0 \\
& x_1, & x_2, & x_3 & & & & & & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} \\
& & & & s_1, & s_2 & & & & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} \\
& & & & & & y_1, & y_2, & y_3 & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0}
\end{array}
$$

Duale della formulazione 9.2A sull'istanza

Duale della formulazione 9.2A sull'istanza

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrr}
 & \max & 60\mu_1 & +100\mu_2 & +140\mu_3 & -320\nu_1 & -320\nu_2 & -320\nu_3 & & \\
\text{soggetto a} & & \mu_1 & & & -4\nu_1 & & & \leq & 15 \\
 & & & \mu_2 & & & -4\nu_2 & & \leq & 15 \\
 & & & & \mu_3 & & & -4\nu_3 & \leq & 15 \\
 & & -\mu_1 & +\mu_2 & & & & & \leq & 3 \\
 & & & -\mu_2 & +\mu_3 & & & & \leq & 3 \\
 & & & & & 160\nu_1 & +160\nu_2 & +160\nu_3 & \leq & 4600 \\
 & & & & & & 160\nu_2 & +160\nu_3 & \leq & 3100 \\
 & & & & & & & 160\nu_3 & \leq & 1600 \\
 & & \mu_1, & & \mu_2, & & \mu_3 & & \gtreqless & 0 \\
 & & & & & \nu_1, & & \nu_2, \quad \nu_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Euristica costruttiva: il bound primale

Produzione **just in time**: ogni mese si produce esattamente la domanda e si assume il numero minimo di operai che serve.

Sull'istanza:

- mese 1: $\lceil 4 \cdot 60/160 \rceil = 2$ operai, nessuna assunzione
- mese 2: $\lceil 4 \cdot 100/160 \rceil = 3$, una assunzione
- mese 3: $\lceil 4 \cdot 140/160 \rceil = 4$, un'altra assunzione

Il costo, incluso il termine costante $m_0\, w\, n = 9000$, è

$$z(MILP) \leq UB = 18\,200$$

Duale del rilassamento LP del modello 9.2A

Una variabile libera μ_t per bilancio, una non negativa ν_t per vincolo di ore:

Duale del rilassamento LP del modello 9.2A

$$\max \quad \sum_{t=1}^{n} d_t\,\mu_t - r\,m_0 \sum_{t=1}^{n} \nu_t \tag{9.5a}$$

$$\text{soggetto a} \quad \mu_t - g\,\nu_t \le p_t, \qquad \forall t \in \{1,2,\ldots,n\}, \tag{9.5b}$$

$$-\mu_t + \mu_{t+1} \le h_t, \qquad \forall t \in \{1,2,\ldots,n-1\}, \tag{9.5c}$$

$$r \sum_{t=j}^{n} \nu_t \le u + w\,(n-j+1), \qquad \forall j \in \{1,2,\ldots,n\}, \tag{9.5d}$$

$$\mu_t \gtreqless 0, \qquad \forall t \in \{1,2,\ldots,n\}, \tag{9.5e}$$

$$\nu_t \ge 0, \qquad \forall t \in \{1,2,\ldots,n\}. \tag{9.5f}$$

Descrizione del duale (1/2)

- μ_t è il valore di un paio disponibile nel mese t; ν_t il prezzo di un'ora di lavoro nel mese t
- L'**obiettivo** valuta la domanda a quei prezzi e sottrae $r\, m_0 \sum_t \nu_t$: le ore che gli m_0 operai iniziali offrono gratuitamente
- **Colonne delle** x_t: produrre un paio vale μ_t e consuma g ore al prezzo ν_t; il saldo non può superare p_t

Descrizione del duale (2/2)

- **Colonne delle** s_t: tenere un paio in magazzino fa guadagnare $\mu_{t+1} - \mu_t$, che non può superare h_t
- **Colonne delle** z_j: un operaio assunto all'inizio del mese j mette a disposizione r ore in ciascuno dei mesi da j in poi
- Il loro valore complessivo non può superare quanto quell'assunzione costa, cioè $u + w\,(n - j + 1)$

Una soluzione duale a mano

- Poniamo $\bar{\nu}_t = 0$: le ore non si valutano, i vincoli delle z_j sono soddisfatti; restano $\mu_t \leq p_t$ e $\mu_{t+1} \leq \mu_t + h_t$
- Come nel problema 9.1: $\bar{\mu}_1 = p_1$, $\bar{\mu}_t = \min(\bar{\mu}_{t-1} + h_{t-1},\ p_t)$

Sull'istanza $\bar{\mu} = (15, 15, 15)$ e

$$\sum_{t=1}^{n} d_t\, \bar{\mu}_t = 15 \cdot 300 = 4500, \qquad LB = 4500 + 9000 = 13\,500$$

- Materie prime più salario degli operai già in servizio: la manodopera aggiuntiva è regalata
- Il rilassamento LP la paga in frazione di persona: $z(LP) = z(LP^+) = 15\,960$

Soluzione ottima

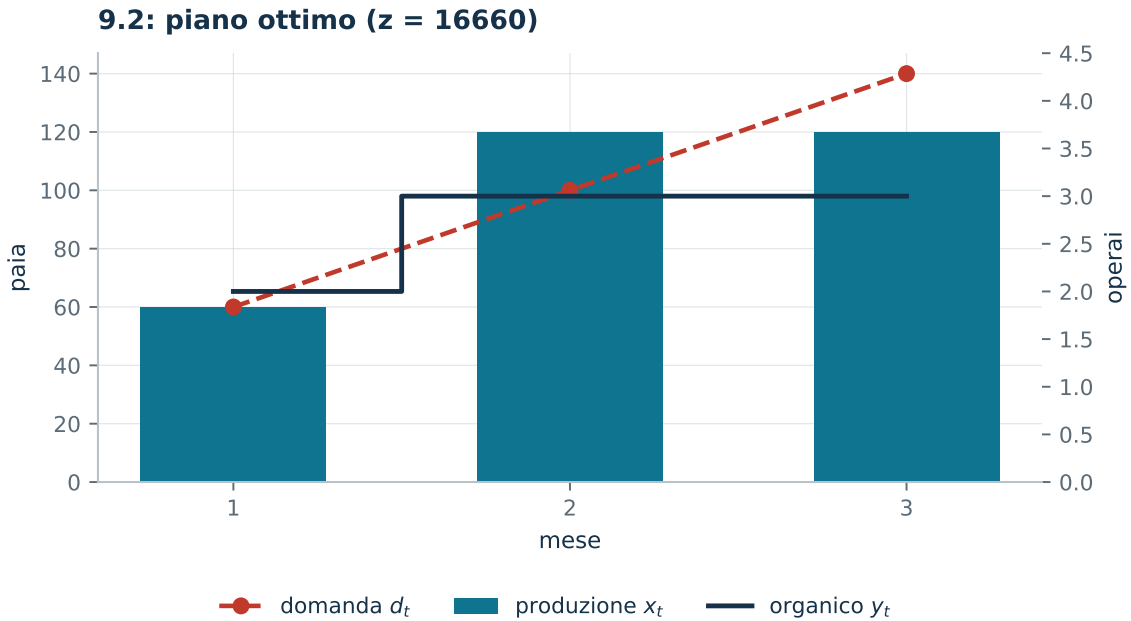
	$t=1$	$t=2$	$t=3$
produzione x_t	60	120	120
organico y_t	2	3	3
assunzioni z_t	0	1	0
scorta s_t	0	20	—

Il costo è $z(MILP) = 16\,660$, con la catena

$$13\,500 = LB \leq z(LP) = 15\,960 \leq z(MILP) = 16\,660 \leq UB = 18\,200$$

Il gap dell'euristica è 9,2%.

Soluzione ottima: il piano



- Si assume *un* operaio invece di due e si anticipano venti paia dal terzo mese al secondo
- 3 euro di magazzino per venti paia costano 60 euro, contro i 1600 di un'assunzione al terzo mese

Considerazioni aggiuntive (1/2)

- La **monotonia** lega i mesi dal lato dell'organico: se si potesse licenziare a costo zero, ogni mese sceglierebbe da solo il più piccolo organico che basta, e quella famiglia sparirebbe
- Il problema non si spezzerebbe però in n problemi indipendenti: restano le scorte s_t a legare un mese al successivo
- Il termine costante $m_0\, w\, n$ va ricordato in ogni confronto: dimenticarlo fa apparire la A molto più economica della B

Considerazioni aggiuntive (2/2)

- x_t e s_t sono intere perché le paia non si spezzano; qui si potrebbero lasciare continue senza cambiare l'ottimo
- *Non* perché la matrice sia totalmente unimodulare: non lo è ($z(LP) = 15\,960$ contro $16\,660$)
- La ragione è più locale: fissato y intero, quello che resta in (x, s) è un problema di bilancio con matrice d'intervallo, totalmente unimodulare, e termini noti interi (d_t e $r\,y_t/g = 40\,y_t$)
- È un argomento sul sottoproblema, non sul modello intero

Domanda di modellazione: straordinari

Ogni operaio può fare fino a 40 ore di straordinario al mese, pagate 25 euro l'ora.

Come cambia il modello? Conviene usarli?

Il confronto finale

	valore	che cos'è
UB	18200	soluzione euristica
LB	13500	bound certificato
$z(MILP)$	16660	ottimo del MILP

- Gap dell'euristica: $\dfrac{|UB - z(MILP)|}{|z(MILP)|} = 9.2\%$
- Gap certificato, noto *prima* di risolvere il MILP:
  $UB - LB = 4700$, cioè $\dfrac{UB - LB}{|UB|} = 25.8\%$

Variante svolta: assunzioni molto costose (1/2)

Il costo di assunzione sale da 100 a 3000 euro (selezione e formazione).

- Cambia solo il dato u: il nuovo ottimo è 19 560, cioè 2900 euro in più
- Il piano non cambia: un'assunzione serve comunque, senza il problema è inammissibile ($4 \cdot 120/160 = 3$ operai)
- La differenza è esattamente $3000 - 100 = 2900$: il costo aggiuntivo di un'assunzione inevitabile
- È un esempio di analisi di sensitività fatta risolvendo di nuovo il modello

Variante svolta: assunzioni molto costose (2/2)

- Modello, duale e ricetta restano quelli del problema base; il certificato non si accorge del cambiamento: il costo di assunzione non compare in μ_t, e il bound resta 13500
- Caso limite: un bound duale corretto può essere insensibile al dato che muove il problema; qui è l'euristica a seguirlo

	valore	che cos'è
UB	24000	soluzione euristica
LB	13500	certificato duale costruito a mano
$z(LP) = z(LP^+)$	17490	rilassamento senza / con i bound
$z(MILP)$	19560	ottimo del MILP

Riepilogo: Produzione e manodopera

- Due formulazioni equivalenti: con le assunzioni z_t (A) e con l'organico y_t (B), legate da $z_t = y_t - y_{t-1}$
- Gli obiettivi differiscono per la costante $m_0\, w\, n$: va ricordata nei confronti
- Sull'istanza coincidono anche i rilassamenti, ma la verifica va fatta
- Bound: $LB = 13\,500$, $z(LP) = 15\,960$, $z(MILP) = 16\,660$, $UB = 18\,200$

Veicoli: lotto minimo e premio per la varietà

Introduzione: Veicoli

- Il terzo problema è di **massimo**: profitto con risorse limitate
- Ogni tipo si produce in quantità zero oppure almeno pari a un **lotto minimo**: è la variabile **semi-intera**
- Un **premio** si incassa se si producono almeno due tipi: impareremo a contare i tipi attivi con una binaria e un vincolo
- Vedremo che qui il rilassamento con i bound batte il duale costruito a mano

Problema 9.3: veicoli con lotto minimo e premio (1/2)

- Un'azienda produce $s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tipi di veicolo usando $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ risorse
- $a_{ij} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ è la quantità di risorsa i necessaria per una unità del tipo j, e $b_i \in \mathbb{Q}_{>0}$ la disponibilità della risorsa i
- Per ogni tipo j: $\bar{p}_j \in \mathbb{Q}_{>0}$ è il profitto di una unità e $\bar{q}_j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ la quantità minima da produrre se si decide di produrre quel tipo

Problema 9.3: veicoli con lotto minimo e premio (2/2)

- Se la produzione comprende almeno due tipi diversi, l'azienda incassa un premio $\bar{r} \in \mathbb{Q}_{>0}$ (un contributo per la diversificazione)
- L'azienda vuole **massimizzare il profitto totale**

Il problema a parole

- **Decidiamo** quante unità produrre di ciascun tipo
- **L'obiettivo**: profitto massimo, premio compreso
- **I vincoli**: le risorse non si superano; di un tipo si producono zero unità oppure almeno $\bar{q}_j$

Dati (input del modello)

Simbolo	Tipo	Significato
s	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero di tipi, $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$
k	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero di risorse, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$
a_{ij}	$\in \mathbb{Q}_{\geq 0}$	risorsa i per una unità del tipo j
b_i	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	disponibilità della risorsa i
$\bar{p}_j$	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	profitto unitario del tipo j
$\bar{q}_j$	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	lotto minimo del tipo j
$\bar{r}$	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	premio per la varietà
M_j	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	massimo producibile del solo tipo j

dove $M_j = \min\{\lfloor b_i / a_{ij} \rfloor : a_{ij} > 0\}$.

Variabili decisionali

s variabili intere non negative, s binarie e una binaria:

$$x_j = \text{unità prodotte del tipo } j, \qquad \forall j \in \{1, 2, \ldots, s\}$$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se il tipo } j \text{ viene prodotto} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad z = \begin{cases} 1 & \text{se si incassa il premio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Modello 9.3

Modello 9.3 — veicoli con lotto minimo e premio

$$\max \quad \sum_{j=1}^{s} \bar{p}_j x_j + \bar{r} z \tag{9.6a}$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{j=1}^{s} a_{ij} x_j \leq b_i, \qquad \forall i \in \{1, 2, \ldots, k\}, \tag{9.6b}$$

$$x_j - \bar{q}_j y_j \geq 0, \qquad \forall j \in \{1, 2, \ldots, s\}, \tag{9.6c}$$

$$x_j - M_j y_j \leq 0, \qquad \forall j \in \{1, 2, \ldots, s\}, \tag{9.6d}$$

$$-\sum_{j=1}^{s} y_j + 2z \leq 0, \tag{9.6e}$$

$$x_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \qquad \forall j \in \{1, 2, \ldots, s\}, \tag{9.6f}$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \qquad \forall j \in \{1, 2, \ldots, s\}, \tag{9.6g}$$

$$z \in \{0, 1\}. \tag{9.6h}$$

Descrizione del modello

- L'**obiettivo** somma i profitti dei veicoli prodotti e il premio per la varietà
- I vincoli sulle **risorse**, uno per risorsa, sono le disponibilità
- I vincoli di **lotto minimo** e di **attivazione**, uno per tipo ciascuno, rendono x_j semi-intera: o zero, o almeno $\bar{q}_j$ e al più M_j
- Il vincolo del **premio**, uno solo, dice che il premio si incassa solo se i tipi attivi sono almeno due

Il legame fra le variabili: la semi-interezza

I vincoli di lotto minimo e di attivazione insieme dicono

$$\bar{q}_j \, y_j \;\leq\; x_j \;\leq\; M_j \, y_j$$

- Se $y_j = 0$ entrambi danno $x_j = 0$
- Se $y_j = 1$ si ottiene $\bar{q}_j \leq x_j \leq M_j$
- x_j vale zero oppure sta fra il lotto minimo e il massimo: è una variabile **semi-intera**

Nessuno dei due vincoli da solo basta: senza l'attivazione un tipo potrebbe essere prodotto con $y_j = 0$; senza il lotto minimo il lotto minimo sarebbe vuoto.

Il premio si incassa solo con almeno due tipi

Il vincolo del premio si legge $2z \leq \sum_{j=1}^{s} y_j$.

- Se $z = 1$ allora $\sum_j y_j \geq 2$: almeno due tipi sono attivati e, per la semi-interezza, effettivamente prodotti (in quantità $\geq \bar{q}_j > 0$)
- Il verso opposto non è imposto dal vincolo ma segue dall'**ottimalità**: se $\sum_j y_j \geq 2$ e $z = 0$, porre $z = 1$ resta ammissibile e aumenta l'obiettivo di $\bar{r} > 0$
- In ogni soluzione ottima z è un indicatore fedele
- Con $\bar{r} = 0$ questo argomento cade, e z smette di essere fedele

Il modello in gurobipy (1/2)

```
mm = gp.Model("veicoli")
x = mm.addVars(n, vtype=GRB.INTEGER, name="x")
y = mm.addVars(n, vtype=GRB.BINARY, name="y")
z = mm.addVar(vtype=GRB.BINARY, name="z")
mm.setObjective(
    gp.quicksum(p[j] * x[j] for j in range(n))
    + r * z, GRB.MAXIMIZE)
```

Il modello in gurobipy (2/2)

```
mm.addConstrs(
    (gp.quicksum(a[i][j] * x[j] for j in range(n))
     <= b[i] for i in range(m)), name="risorsa")
mm.addConstrs((x[j] - q[j] * y[j] >= 0
               for j in range(n)), name="lotto_minimo")
mm.addConstrs((x[j] - M[j] * y[j] <= 0
               for j in range(n)), name="attiva")
mm.addConstr(
    -gp.quicksum(y[j] for j in range(n)) + 2 * z <= 0,
    name="premio")
```

L'istanza

$s = 3$ tipi, $k = 2$ risorse (acciaio in tonnellate e ore di manodopera), $\bar{q}_j = 10$ per ogni tipo, $\bar{r} = 500$:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	b_i
a_{1j} (acciaio)	2	3	5	100
a_{2j} (ore)	30	25	40	1200
$\bar{p}_j$	200	250	300	
M_j	40	33	20	

I big-M sono calcolati dai dati:
$M_1 = \min(\lfloor 100/2 \rfloor, \lfloor 1200/30 \rfloor) = 40$, e analogamente $M_2 = 33$, $M_3 = 20$.

Il modello per l'istanza

Il modello dell'istanza

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrl}
\max & 200x_1 & +250x_2 & +300x_3 & & & & & +500z & \\
\text{soggetto a} & 2x_1 & +3x_2 & +5x_3 & & & & & & \leq 100 \\
& 30x_1 & +25x_2 & +40x_3 & & & & & & \leq 1200 \\
& x_1 & & & -10y_1 & & & & & \geq 0 \\
& & x_2 & & & -10y_2 & & & & \geq 0 \\
& & & x_3 & & & -10y_3 & & & \geq 0 \\
& x_1 & & & -40y_1 & & & & & \leq 0 \\
& & x_2 & & & -33y_2 & & & & \leq 0 \\
& & & x_3 & & & -20y_3 & & & \leq 0 \\
& & & & -y_1 & -y_2 & -y_3 & & +2z & \leq 0 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3 & & & & \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\
& & & & y_1, & & y_2, & & y_3 & \in \{0,1\} \\
& & & & & & & & z & \in \{0,1\}
\end{array}
$$

Euristica costruttiva: il bound primale

Il problema è di massimo: l'euristica dà il bound **primale**, che sta sotto l'ottimo.

- Si ordinano i tipi per profitto rapportato al consumo della risorsa più stretta
- Si attivano i due migliori al lotto minimo (così il premio è garantito)
- Si riempie con il più redditizio fra quelli attivati

Sull'istanza si attivano i tipi 2 e 1, poi si riempie: produzione $(11, 26, 0)$, l'acciaio si esaurisce e restano 220 ore. Profitto 8700 più il premio di 500:

$$z(MILP) \geq LB = 9200$$

Rilassamento LP e duale: le variabili duali

Il primale è di massimo con vincoli $\leq$ e $\geq$; seguendo la tabella di conversione associamo

- $\pi_i \geq 0$ ai vincoli sulle risorse
- $\lambda_j \leq 0$ ai vincoli di lotto minimo
- $\beta_j \geq 0$ ai vincoli di attivazione
- $\gamma \geq 0$ al vincolo del premio

Scrivendo $\lambda_j = -\ell_j$ con $\ell_j \geq 0$ si ottiene il duale.

Duale del rilassamento LP del modello 9.3

Duale del rilassamento LP del modello 9.3

$$\min \quad \sum_{i=1}^{k} b_i \, \pi_i \tag{9.7a}$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{i=1}^{k} a_{ij} \, \pi_i - \ell_j + \beta_j \geq \bar{p}_j, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, s\}, \tag{9.7b}$$

$$\bar{q}_j \, \ell_j - M_j \, \beta_j - \gamma \geq 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, s\}, \tag{9.7c}$$

$$2 \, \gamma \geq \bar{r}, \tag{9.7d}$$

$$\pi_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, k\}, \tag{9.7e}$$

$$\ell_j \geq 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, s\}, \tag{9.7f}$$

$$\beta_j \geq 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, s\}, \tag{9.7g}$$

$$\gamma \geq 0. \tag{9.7h}$$

Duale per l'istanza

Il modello dell'istanza

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrl}
 & \min 100\pi_1 & +1200\pi_2 & & & & & & & & \\
\text{soggetto a} & 2\pi_1 & +30\pi_2 & +\alpha_1 & & & +\beta_1 & & & & \geq 200 \\
 & 3\pi_1 & +25\pi_2 & & +\alpha_2 & & & +\beta_2 & & & \geq 250 \\
 & 5\pi_1 & +40\pi_2 & & & +\alpha_3 & & & +\beta_3 & & \geq 300 \\
 & & & -10\alpha_1 & & & -40\beta_1 & & & -\gamma & \geq 0 \\
 & & & & -10\alpha_2 & & & -33\beta_2 & & -\gamma & \geq 0 \\
 & & & & & -10\alpha_3 & & & -20\beta_3 & -\gamma & \geq 0 \\
 & & & & & & & & & 2\gamma & \geq 500 \\
 & \pi_1, & & \pi_2 & & & & & & & \geq 0 \\
 & & & \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 & & & & & \leq 0 \\
 & & & & & & \beta_1, & \beta_2, & \beta_3 & & \geq 0 \\
 & & & & & & & & & \gamma & \geq 0
\end{array}
$$

Descrizione del duale (1/2)

- π_i è il prezzo di una unità della risorsa i; ℓ_j e β_j i prezzi dei due vincoli di semi-interezza del tipo j; γ quello del premio
- L'**obiettivo** valuta a quei prezzi tutte le risorse disponibili
- **Colonne delle** x_j: le risorse consumate da una unità del tipo j, valutate a π_i e corrette dai due vincoli di semi-interezza, devono coprire il profitto $\bar{p}_j$

Descrizione del duale (2/2)

- **Colonne delle** y_j: accendere il tipo j obbliga a produrne almeno $\bar{q}_j$ e ne concede al più M_j; il saldo dei due prezzi deve coprire il premio γ
- **Colonna di** z: il premio $\bar{r}$ si incassa solo con due tipi attivi, e infatti va coperto da 2γ

Una soluzione duale a mano (1/2)

Si procede in tre passi.

1. Il vincolo $2\gamma \geq \bar{r}$ obbliga $\gamma \geq \bar{r}/2$: si prende il minimo, $\bar{\gamma} = \bar{r}/2 = 250$
2. Si pone $\bar{\beta}_j = 0$ e si ricava dal vincolo delle y_j il più piccolo ℓ_j ammissibile:

$$\bar{\ell}_j = \frac{\bar{\gamma}}{\bar{q}_j} = \frac{250}{10} = 25 \qquad \text{per ogni } j$$

Ogni tipo attivato «porta con sé» la sua quota di premio

Una soluzione duale a mano (2/2)

3. Resta $\sum_i a_{ij}\,\pi_i \geq \bar{p}_j + \bar{\ell}_j$. Si valuta *una sola* risorsa, al prezzo che copre tutti i tipi, e si tiene quella col bound più piccolo:

$$\bar{\pi}_i = \max_j \frac{\bar{p}_j + \bar{\ell}_j}{a_{ij}}, \qquad \text{bound} = b_i\,\bar{\pi}_i$$

Sull'istanza:

$$\bar{\pi}_1 = \max\left(\tfrac{225}{2}, \tfrac{275}{3}, \tfrac{325}{5}\right) = \tfrac{225}{2}, \quad b_1\,\bar{\pi}_1 = 11\,250$$

$$\bar{\pi}_2 = \max\left(\tfrac{225}{30}, \tfrac{275}{25}, \tfrac{325}{40}\right) = 11, \quad b_2\,\bar{\pi}_2 = 13\,200$$

Il bound migliore è quello dell'acciaio: $z(MILP) \leq UB = 11\,250$.

Soluzione ottima

- La produzione ottima è $(26, 16, 0)$: si attivano i tipi 1 e 2 e si incassa il premio
- Si consumano tutte le 100 tonnellate di acciaio e 1180 ore su 1200

$$z(MILP) = 200 \cdot 26 + 250 \cdot 16 + 500 = 9700$$

La catena dei bound è

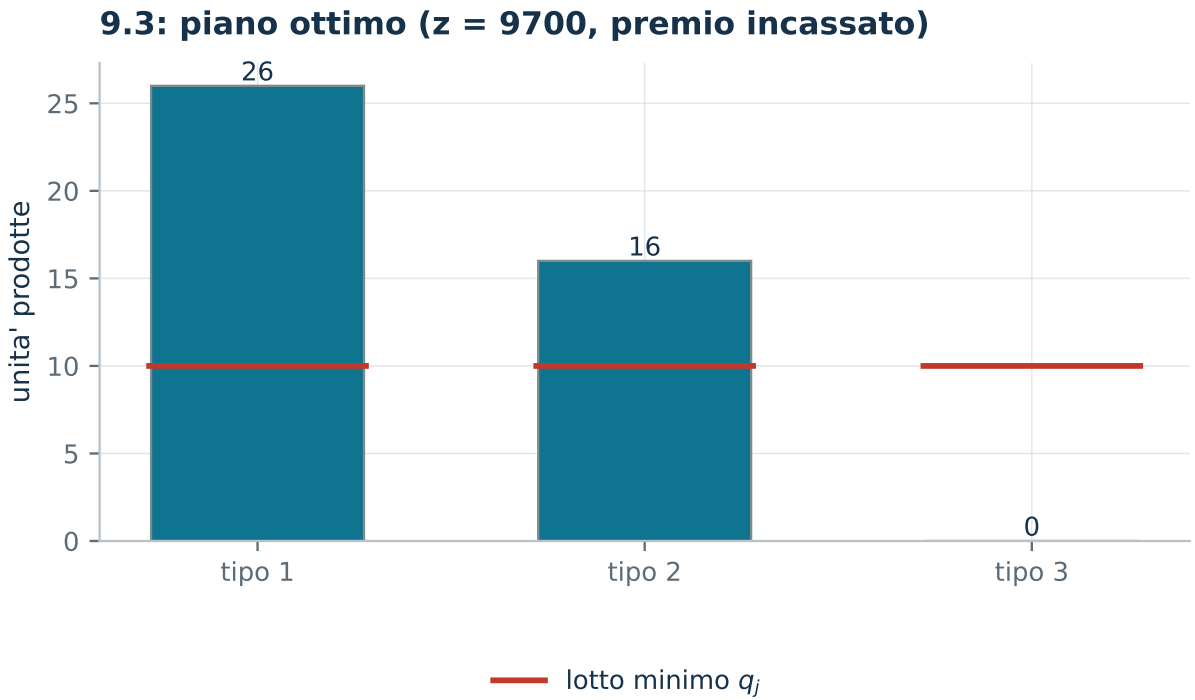
$$\begin{aligned} 9200 = LB \ \leq \ z(MILP) = 9700 \ &\leq \ z(LP^+) = 9750 \\ &\leq \ z(LP) = \tfrac{20625}{2} \ \leq \ UB = 11\,250 \end{aligned}$$

Il gap dell'euristica è 5,2%.

Qui il rafforzato batte il duale a mano

- È l'unico problema del capitolo in cui $z(LP^+) = 9750$ è **migliore** del bound duale costruito a mano (11 250), e di pochissimo peggiore dell'ottimo (9700)
- Il rilassamento senza i bound lascia y_j e z crescere sopra 1, e con esse il premio: $z(LP) = 20625/2 \approx 10\,312$
- Aggiungere $y_j \leq 1$ e $z \leq 1$ toglie proprio quella libertà
- Quando il modello contiene indicatori premiati, il rafforzato non è un dettaglio

Soluzione ottima: il piano



Unità prodotte per tipo, con il lotto minimo $\bar{q}_j$ segnato in rosso. Il tipo 3 resta a zero.

Considerazioni aggiuntive

- Il big-M M_j è il massimo producibile del *solo* tipo j, non del piano complessivo: già molto più stretto di una costante arbitraria ($M_3 = 20$: l'acciaio da solo permetterebbe 20 unità, le ore 30)
- Se $\bar{q}_j > M_j$, il tipo j è impossibile da produrre e si elimina con un controllo sui dati: un pre-processing da fare sempre
- Il premio è modellato con *una* binaria e *un* vincolo; con soglia «almeno f tipi» basta sostituire 2 con f; con premi a scaglioni serve una variabile per scaglione e una catena di vincoli

Domanda di modellazione: premio nullo

Il contributo per la diversificazione viene abolito, cioè $\bar{r} = 0$.

Che cosa succede alla variabile z?

Il confronto finale

	valore	che cos'è
LB	9200	soluzione euristica
UB	11250	bound certificato
$z(MILP)$	9700	ottimo del MILP

- Gap dell'euristica: $\frac{|LB - z(MILP)|}{|z(MILP)|} = 5.2\%$
- Gap certificato, noto *prima* di risolvere il MILP:
  $UB - LB = 2050$, cioè $\frac{UB - LB}{|LB|} = 22.3\%$

Variante svolta: premio più esigente (1/2)

Il premio si incassa solo se si producono almeno **tre** tipi diversi.
Basta cambiare un coefficiente:

$$-\sum_{j=1}^{s} y_j + 3\,z \leq 0$$

- Il nuovo ottimo è 9200, cioè 500 in meno: attivare anche il terzo tipo costerebbe più del premio, e all'ottimo $z = 0$
- Il valore coincide, per caso, con quello della soluzione euristica del problema di partenza

Variante svolta: premio più esigente (2/2)

- Nel duale cambia solo la colonna di z: $\gamma = \bar{r}/3 = 500/3$, e il bound scende da 11250 a 32500/3
- Tre tipi invece di due spalmano il premio su più attivazioni: ogni tipo ne porta una quota minore
- L'euristica non riesce ad accendere un terzo tipo: resta a 8700

	valore	che cos'è
UB	$\frac{32500}{3}$	certificato duale costruito a mano
LB	8700	soluzione euristica
$z(LP)$ / $z(LP^+)$	$\frac{29875}{3}$ / $\frac{28750}{3}$	rilassamento senza / con i bound
$z(MILP)$	9200	ottimo del MILP

Riepilogo: Veicoli

- Variabile **semi-intera**: $\bar{q}_j\, y_j \leq x_j \leq M_j\, y_j$, con M_j calcolato dai dati
- Contare i tipi: $2z \leq \sum_j y_j$; il verso mancante lo impone l'ottimalità perché $\bar{r} > 0$
- Il problema è di massimo: l'euristica dà $LB = 9200$, il duale a mano $UB = 11\,250$
- Il rilassamento rafforzato ($z(LP^+) = 9750$) batte il duale a mano: con indicatori premiati i bound $y_j \leq 1$, $z \leq 1$ contano

Riepilogo finale (1/2)

Modellare la produzione:

- variabili di quantità con binarie che accendono (costo fisso), limitano (lotto minimo) o premiano (varietà)
- il bilancio delle scorte e dell'organico si scrive con uguaglianze, i cui duali sono liberi

Big-M:

- si legge dai dati (domanda residua, massimo producibile): valori più grandi indeboliscono il rilassamento

Riepilogo finale (2/2)

Formulazioni:

- due modelli diversi possono descrivere gli stessi piani (assunzioni contro organico); l'equivalenza sul rilassamento va verificata

Bound:

- euristiche costruttive per il bound primale, soluzioni duali a mano per quello duale
- un bound duale può essere insensibile al dato che muove il problema
- con indicatori premiati il rilassamento rafforzato può battere il duale a mano