Localizzazione e copertura

Indice

La famiglia

Localizzazione capacitata

p-mediana: al più k sedi

Copertura del segnale con interferenza

Localizzazione di hub con costo massimo

Obiettivi (1/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- modellare l'apertura di una struttura e le variabili che ne dipendono;
- scegliere fra attivazione aggregata e disaggregata e motivare la scelta;

Obiettivi (2/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- aggiungere un budget sul numero di sedi aperte;
- costruire a mano il bound primale e il bound duale di un problema di localizzazione.

Prerequisiti

- Da questo modulo, Capitolo 6 «Legami fra variabili»: attivazione aggregata e disaggregata, variabile di massimo, *se e solo se*
- Da questo modulo, Capitolo 7 «Assegnamento e scheduling»: i problemi 7.4 e 7.5, di cui qui si riusano i legami

La famiglia

Introduzione: La famiglia

- Quattro problemi in cui si decide **dove** aprire una struttura: una sede, un hub
- La decisione di apertura vincola le variabili che ne dipendono:
  - dove spedire la merce (problema 1)
  - quali clienti servire (problema 2)
  - quali clienti coprire (problema 3)
  - a quale hub connettere ciascun terminale (problema 4)
- Cambia la natura del **legame** fra la variabile di apertura e le variabili che ne dipendono, e il modo in cui il budget sulle aperture entra nel modello

I legami fra variabili (1/2)

- **Attivazione aggregata** (problema 1): un'unica famiglia di vincoli fa da legame e da vincolo di capacità insieme,

$$\sum_c y_{lc} \leq u_l x_l$$

- **Attivazione disaggregata** (problema 2): $x_l \geq y_{lc}$ per ogni sede e cliente, dedotta dalla CNF di un'implicazione booleana come nel problema 7.5, qui con un budget k sul numero di sedi anziché sul tempo

I legami fra variabili (2/2)

- **Se e solo se** (problema 3): un verso imposto da due famiglie di vincoli (soglia di segnale e interferenza), l'altro che segue dall'obiettivo
- **Attivazione aggregata e variabile di massimo** (problema 4): la stessa attivazione del problema 1 insieme al legame di massimo

$$z_j \geq c_{ij} x_{ij}$$

già visto nel problema 7.4

Lo schema di ogni problema

Per ognuno dei quattro problemi:

- modello e dimostrazione dei legami
- istanza
- euristica costruttiva: un bound dal lato delle soluzioni ammissibili
- duale del rilassamento LP con una soluzione duale costruita a mano: un bound dall'altro lato
- soluzione del solver
- considerazioni aggiuntive e domande di modellazione

Notazione della famiglia (1/2)

Simbolo	Tipo	Significato
m	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero di sedi/hub candidati, $l \in \{1, 2, \ldots, m\}$
n	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero di clienti/terminali, $c \in \{1, 2, \ldots, n\}$
t_{lc}	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	costo di trasporto/connessione dalla sede/hub l al cliente/terminale c
i_l, f_l	$\in \mathbb{Q}_{\geq 0}$	costo di apertura/attivazione della sede/hub l
u_l	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	capacità della sede l

Notazione della famiglia (2/2)

Simbolo	Tipo	Significato
d_c	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	domanda del cliente c
k	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero massimo di sedi aperte / capacità di ciascun hub
s_{lc}	$\in \mathbb{Q}_{\geq 0}$	intensità del segnale dalla sede l al cliente c
p_c	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	profitto se il cliente c è coperto
$t,\ b$	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	soglia di segnale e limite di interferenza

Riepilogo: La famiglia

- In tutti i problemi una variabile di **apertura** vincola altre variabili
- Il legame può essere **aggregato** (un vincolo per sede) o **disaggregato** (un vincolo per coppia sede–cliente)
- Alcuni versi dei legami sono imposti dai vincoli, altri seguono dall'**ottimalità**
- Per ogni problema costruiamo due bound: uno **primale** (euristica) e uno **duale** (rilassamento LP)

Localizzazione capacitata

Introduzione: Localizzazione capacitata

- Il primo problema della famiglia: dove installare le strutture e come servire i clienti
- Vedremo un legame di **attivazione aggregata**: una sola famiglia di vincoli fa sia da legame sia da vincolo di capacità
- Costruiremo un bound primale con un'euristica e un bound duale con una soluzione duale a mano, e li confronteremo con l'ottimo del solver

Problema 8.1: localizzazione capacitata (1/2)

- Un'azienda deve servire $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ clienti con il proprio prodotto e ha individuato $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ sedi candidate dove installare una struttura
- Per ogni cliente c, il valore $d_c \in \mathbb{Q}_{>0}$ è la domanda, in litri di prodotto, di quel cliente
- Per ogni sede l e ogni cliente c, il valore $t_{lc} \in \mathbb{Q}_{>0}$ è il costo, in euro, di trasportare un litro di prodotto dalla sede l al cliente c

Problema 8.1: localizzazione capacitata (2/2)

- Per ogni sede l, il valore $u_l \in \mathbb{Q}_{>0}$ è la capacità, in litri, della struttura installata in quella sede, e $i_l \in \mathbb{Q}_{>0}$ è il costo di installazione
- L'azienda vuole decidere dove installare le strutture e come servire i clienti, a **costo totale minimo**

Il problema a parole

- **Decidiamo** dove installare le strutture e quanto prodotto trasportare da ciascuna sede a ciascun cliente
- **L'obiettivo**: costo totale (installazione più trasporto) minimo
- **I vincoli**: da una sede non installata non parte nulla, e una sede installata non supera la propria capacità; la domanda di ogni cliente va soddisfatta esattamente
- È il problema di **localizzazione capacitata** (capacitated facility location)

Dati (input del modello)

Simbolo	Tipo	Significato
m	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero di sedi candidate, $l \in \{1, 2, \ldots, m\}$
n	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero di clienti, $c \in \{1, 2, \ldots, n\}$
t_{lc}	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	costo di trasporto (per litro) dalla sede l al cliente c
u_l	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	capacità (litri) della sede l
i_l	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	costo di installazione della sede l
d_c	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	domanda (litri) del cliente c

Variabili decisionali

Introduciamo le seguenti m variabili binarie:

$$x_l = \begin{cases} 1 & \text{se si installa una struttura nella sede } l, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad \forall l \in \{1, 2, \ldots, m\},$$

e le seguenti $m\,n$ variabili continue non negative:

$$y_{lc} = \text{litri trasportati dalla sede } l \text{ al cliente } c$$

$$\forall l \in \{1, 2, \ldots, m\},\ \forall c \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Il modello

Modello 8.1 — localizzazione capacitata

$$\min \quad \sum_{l=1}^{m} i_l\, x_l + \sum_{l=1}^{m}\sum_{c=1}^{n} t_{lc}\, y_{lc} \tag{8.1a}$$

$$\text{soggetto a} \quad u_l\, x_l - \sum_{c=1}^{n} y_{lc} \geq 0, \qquad \forall l \in \{1,2,\ldots,m\}, \tag{8.1b}$$

$$\sum_{l=1}^{m} y_{lc} = d_c, \qquad \forall c \in \{1,2,\ldots,n\}, \tag{8.1c}$$

$$x_l \in \{0,1\}, \qquad \forall l \in \{1,2,\ldots,m\}, \tag{8.1d}$$

$$y_{lc} \geq 0, \qquad \forall l \in \{1,2,\ldots,m\},\ \forall c \in \{1,2,\ldots,n\}. \tag{8.1e}$$

Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli

- La funzione obiettivo minimizza il costo totale: costi di installazione delle sedi aperte più costi di trasporto
- I vincoli (8.1b) legano le variabili di trasporto a quelle di installazione e impongono la capacità: da una sede non installata non parte nulla, e una sede installata non spedisce più di u_l (m vincoli)
- I vincoli (8.1c) assicurano che la domanda di ogni cliente sia soddisfatta esattamente (n vincoli)
- Gli ultimi vincoli definiscono le variabili del modello

Il legame fra le variabili (1/2)

- Se una quantità positiva parte dalla sede I, la sede deve essere installata:
$$\sum_{c=1}^{n} y_{Ic} > 0 \quad \Longrightarrow \quad x_I = 1$$
- Contronominale: $x_I = 0 \Longrightarrow \sum_{c=1}^{n} y_{Ic} = 0$
- Imposto dai vincoli (8.1b): se $\sum_c y_{Ic} > 0$ allora $u_I x_I > 0$, quindi $x_I = 1$; se $x_I = 0$ allora $\sum_c y_{Ic} \leq 0$ e $y_{Ic} = 0$ per ogni c
- Con $x_I = 1$ il vincolo diventa $\sum_c y_{Ic} \leq u_I$: la capacità

Il legame fra le variabili (2/2)

- Il verso opposto

$$x_l = 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{c=1}^{n} y_{lc} > 0$$

  non è imposto dai vincoli, ma segue dall'obiettivo in ogni soluzione ottima

- Poiché $i_l > 0$, se $\sum_c y_{lc} = 0$ e $x_l = 1$, porre $x_l = 0$ resta ammissibile e riduce il costo di i_l
- In ogni soluzione ottima nessuna sede installata resta inutilizzata
- Una sola famiglia di vincoli fa sia da **legame di attivazione** sia da **vincolo di capacità**

Il modello in gurobipy

```
mod = gp.Model("localizzazione_capacitata")
x = mod.addVars(m, vtype=GRB.BINARY, name="x")
y = mod.addVars(m, n, name="y")
mod.setObjective(gp.quicksum(i[l] * x[l] for l in
    range(m))
    + gp.quicksum(t[l][c] * y[l, c] for l in range(m)
                  for c in range(n)), GRB.MINIMIZE)
mod.addConstrs((u[l] * x[l] - gp.quicksum(y[l, c]
    for c in range(n)) >= 0 for l in range(m)), name="
        capacita")
mod.addConstrs((gp.quicksum(y[l, c] for l in range(m))
    == d[c] for c in range(n)), name="domanda")
```

L'istanza

$m = 2$ sedi, $n = 3$ clienti:

t_{lc}	$c = 1$	$c = 2$	$c = 3$
$l = 1$	4	5	6
$l = 2$	6	4	3

	$l = 1$	$l = 2$
u_l	50	50
i_l	60	90

	$c = 1$	$c = 2$	$c = 3$
d_c	8	25	27

Il modello dell'istanza

Il modello dell'istanza

$$
\begin{aligned}
\min\ & 60x_1 + 90x_2 + 4y_{11} + 5y_{12} + 6y_{13} + 6y_{21} + 4y_{22} + 3y_{23} & \\
\text{soggetto a}\ & 50x_1 - y_{11} - y_{12} - y_{13} & \geq 0 \\
& 50x_2 - y_{21} - y_{22} - y_{23} & \geq 0 \\
& y_{11} + y_{21} & = 8 \\
& y_{12} + y_{22} & = 25 \\
& y_{13} + y_{23} & = 27 \\
& x_1, \quad x_2 & \in \{0,1\} \\
& y_{11}, \quad y_{12}, \quad y_{13}, \quad y_{21}, \quad y_{22}, \quad y_{23} & \geq 0
\end{aligned}
$$

Euristica costruttiva: il bound primale

- Si scandiscono le sedi in ordine naturale; per ciascuna si scandiscono i clienti
- A ogni cliente si spedisce il minimo fra la capacità residua della sede e la domanda residua del cliente
- Una sede che ha spedito qualcosa si apre
- È un'euristica costruttiva: si costruisce una sola soluzione, un elemento per volta, senza mai tornare indietro

Esecuzione sull'istanza (1/2)

- La sede 1 spedisce 8 al cliente 1 (domanda esaurita, capacità residua 42)
- poi 25 al cliente 2 (domanda esaurita, capacità residua 17)
- poi 17 al cliente 3 (capacità della sede 1 esaurita, ne restano 10)
- La sede 2 spedisce i restanti 10 al cliente 3

La soluzione ammissibile trovata è

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 1, \quad \bar{y}_{11} = 8,\ \bar{y}_{12} = 25,\ \bar{y}_{13} = 17,\ \bar{y}_{23} = 10,$$

tutte le altre $\bar{y}_{lc} = 0$.

Esecuzione sull'istanza (2/2)

Il valore della soluzione è

$$\underbrace{60 + 90}_{\text{installazione}} + \underbrace{4 \cdot 8 + 5 \cdot 25 + 6 \cdot 17 + 3 \cdot 10}_{\text{trasporto} = 289} = 150 + 289 = 439$$

Quindi

$$z(MILP) \leq UB = 439.$$

Rilassamento LP e duale

- Associamo una variabile duale non negativa μ_l a ciascun vincolo (1) (verso $\geq$)
- e una variabile duale libera π_c a ciascun vincolo (2) (uguaglianza)

Duale del rilassamento LP del modello 8.1

$$\max \quad \sum_{c=1}^{n} d_c \, \pi_c \tag{8.2a}$$

$$\text{soggetto a} \quad u_l \, \mu_l \leq i_l, \qquad \forall l \in \{1, 2, \ldots, m\}, \tag{8.2b}$$

$$-\mu_l + \pi_c \leq t_{lc}, \quad \forall l \in \{1, 2, \ldots, m\}, \ \forall c \in \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{8.2c}$$

$$\mu_l \geq 0, \qquad \forall l \in \{1, 2, \ldots, m\}, \tag{8.2d}$$

$$\pi_c \gtreqless 0, \qquad \forall c \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{8.2e}$$

Il duale dell'istanza

Il modello dell'istanza

$$
\begin{array}{lrrrrrl}
\max & & 8\pi_1 & +25\pi_2 & +27\pi_3 & & \\
\text{soggetto a} & 50\mu_1 & & & & \leq & 60 \\
& & 50\mu_2 & & & \leq & 90 \\
& -\mu_1 & & +\pi_1 & & \leq & 4 \\
& -\mu_1 & & & +\pi_2 & \leq & 5 \\
& -\mu_1 & & & & +\pi_3 \leq & 6 \\
& & -\mu_2 & +\pi_1 & & \leq & 6 \\
& & -\mu_2 & & +\pi_2 & \leq & 4 \\
& & -\mu_2 & & & +\pi_3 \leq & 3 \\
& \mu_1, & \mu_2 & & & \geq & 0 \\
& & & \pi_1, & \pi_2, & \gtrless & \pi_3 \geq 0
\end{array}
$$

Descrizione del duale

- μ_l è il prezzo di una unità di capacità della sede l, π_c il valore di una unità di domanda del cliente c
- L'obiettivo valuta a quei prezzi tutta la domanda da soddisfare
- I vincoli (8.2b) sono le colonne delle x_l: la capacità u_l messa a disposizione, valutata a μ_l, non può valere più del costo di installazione i_l
- I vincoli (8.2c) sono le colonne delle y_{lc}: portare una unità da l a c vale π_c e consuma capacità al prezzo μ_l; il saldo non supera t_{lc}

Una soluzione duale a mano (1/2)

- Poniamo $\bar{\mu}_l = i_l/u_l$: il vincolo (8.2b) vale con uguaglianza, il costo di installazione «spalmato» sulla capacità

$$\bar{\mu}_1 = 60/50 = 6/5, \qquad \bar{\mu}_2 = 90/50 = 9/5$$

- Il vincolo (8.2c) diventa $\pi_c \leq t_{lc} + \bar{\mu}_l$ per ogni l: il valore più grande è $\bar{\pi}_c = \min_l(t_{lc} + \bar{\mu}_l)$

$$\begin{aligned}
\bar{\pi}_1 &= \min(4 + 6/5,\ 6 + 9/5) = 26/5 \\
\bar{\pi}_2 &= \min(5 + 6/5,\ 4 + 9/5) = 29/5 \\
\bar{\pi}_3 &= \min(6 + 6/5,\ 3 + 9/5) = 24/5
\end{aligned}$$

Una soluzione duale a mano (2/2)

- Il valore di questa soluzione duale ammissibile è

$$8 \cdot \frac{26}{5} + 25 \cdot \frac{29}{5} + 27 \cdot \frac{24}{5} = \frac{208+725+648}{5} = \frac{1581}{5}$$

- Per la dualità debole

$$LB = 1581/5 \leq z(LP) \leq z(MILP) \leq UB = 439$$

- Significato gestionale: «spalmare» il costo fisso di ciascuna sede sulla sua capacità e poi servire ogni cliente al costo marginale minimo è un lower bound che chiunque scriverebbe; il duale lo formalizza

Quello che dice il solver (1/2)

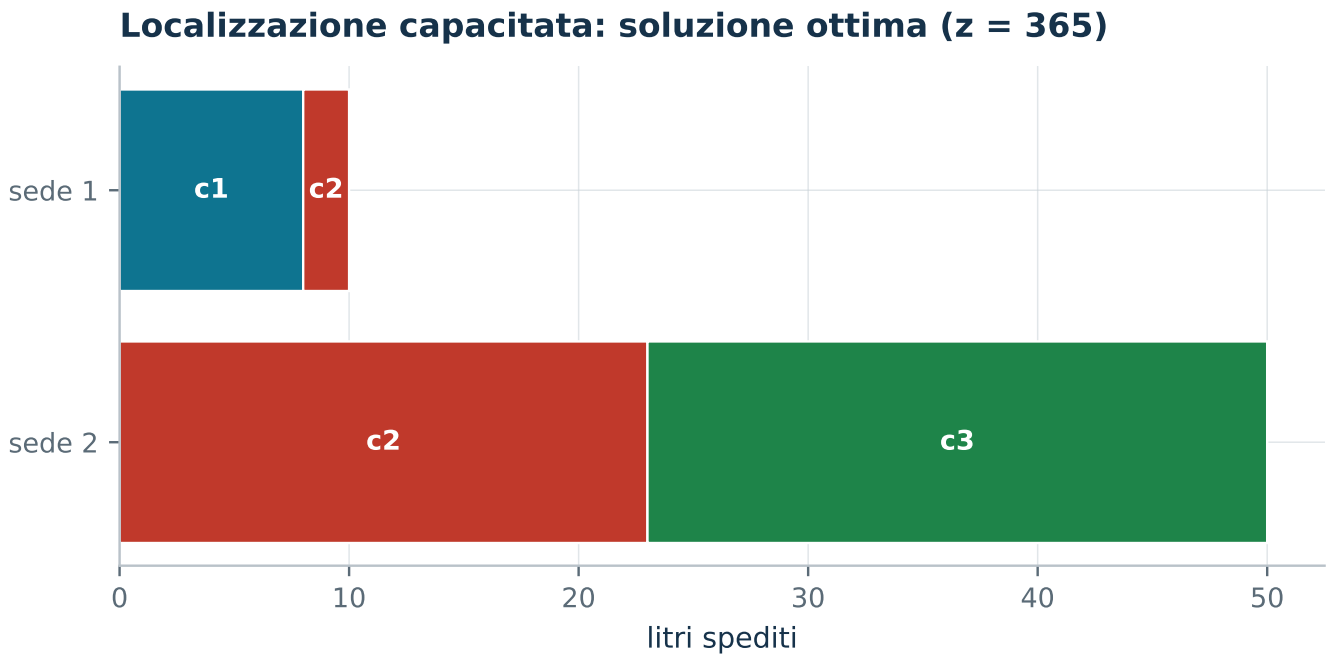
- L'ottimo del rilassamento LP è esattamente $z(LP) = 1581/5$: la soluzione duale a mano è già ottima (dualità forte)
- Rafforzando il rilassamento con $x_l \leq 1$ si ottiene $z(LP^+) = 317$: un salto notevole, il vincolo $x_l \leq 1$ è qui rilevante
- Il MILP ha ottimo $z(MILP) = 365$, con $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = 1$, $\tilde{y}_{11} = 8$, $\tilde{y}_{12} = 2$, $\tilde{y}_{22} = 23$, $\tilde{y}_{23} = 27$
- Entrambe le sedi aperte, ma la sede 1 serve solo parte del cliente 2 (il resto arriva dalla sede 2, più conveniente per quel cliente)

Quello che dice il solver (2/2)

UB (euristica)	LB (duale a mano)	$z(LP)$	$z(LP^+)$	$z(MILP)$	gap euristica
439	1581/5	1581/5	317	365	20,3%

- Il gap dell'euristica rispetto all'ottimo è del 20,3%

Soluzione ottima



Per ciascuna sede aperta, i litri spediti a ciascun cliente.

Considerazioni aggiuntive

- Se $u_l < d_c$, nessuna sede da sola può soddisfare l'intera domanda del cliente c: non è un caso di questa istanza, ma va verificato prima di assumere che una sola sede basti
- I vincoli $y_{lc} \leq d_c\, x_l$ sono disuguaglianze valide implicate dai vincoli (1) e (2) insieme:
  - se $x_l = 0$ forzano $y_{lc} = 0$
  - se $x_l = 1$ non sono mai più stretti di $y_{lc} \leq d_c$

Esercizio: lotto minimo per ogni sede aperta

- Ogni sede aperta deve spedire almeno 5 litri complessivi (non ha senso sostenere il costo di installazione per una quantità trascurabile)
- Come cambia il modello?
- Qual è il nuovo ottimo per l'istanza?

Il confronto finale (1/2)

I tre numeri che ogni problema del corso produce:

	valore	che cos'è
UB	439	soluzione euristica
LB	$\frac{1581}{5}$	bound certificato
$z(MILP)$	365	ottimo del MILP

Il confronto finale (2/2)

- Gap dell'euristica rispetto all'ottimo:

$$\frac{|UB - z(MILP)|}{|z(MILP)|} = 20.3\%$$

- Gap certificato: quello che si conosce *prima* di risolvere il MILP, che perciò non può averlo al denominatore
- In assoluto $UB - LB = \frac{614}{5}$; in percentuale, rispetto alla soluzione euristica,

$$\frac{UB - LB}{|UB|} = 28.0\%$$

Una variante svolta: apertura condizionata (1/2)

- La sede 2 può essere installata solo se lo è anche la sede 1 (ad esempio, un vincolo logistico di supervisione)
- È un legame fra due variabili della stessa famiglia, imposto dal singolo vincolo lineare

$$x_2 \leq x_1$$

  se $x_2 = 1$ allora necessariamente $x_1 = 1$
- Sull'istanza l'ottimo apre già entrambe le sedi: il vincolo non è vincolante e l'ottimo resta 365

Una variante svolta: apertura condizionata (2/2)

- Il vincolo aggiunge al duale $\rho \leq 0$, che sposta costo fisso fra le due sedi:

$$\mu_1 = (i_1 + \rho)/u_1, \qquad \mu_2 = (i_2 - \rho)/u_2$$

- Si prova ρ fra i valori che fanno cambiare il minimo che definisce π_c; il migliore è $\rho = 0$, perché la sede 1 ha già il costo per litro più basso

	valore	che cos'è
UB	439	soluzione euristica
LB	$\frac{1581}{5}$	certificato duale a mano
$z(LP)$	325	rilassamento senza i bound
$z(LP^+)$	325	rilassamento con i bound
$z(MILP)$	365	ottimo del MILP

Riepilogo: Localizzazione capacitata

- Variabili binarie di installazione x_l e continue di trasporto y_{lc}
- $u_l x_l \geq \sum_c y_{lc}$: un solo vincolo fa da **attivazione aggregata** e da **capacità**
- Il verso «sede aperta $\Rightarrow$ usata» segue dall'ottimalità, perché $i_l > 0$
- Bound: $LB = 1581/5$ (duale a mano, già ottimo per l'LP), $UB = 439$ (euristica), $z(MILP) = 365$

p-mediana: al più k sedi

Introduzione: p-mediana

- Si scelgono al più k sedi e si assegna ogni cliente a una sede aperta
- Vedremo un legame di **attivazione disaggregata**: un vincolo $x_l \geq y_{lc}$ per ogni coppia sede–cliente, dedotto dalla CNF di un'implicazione
- Qui non c'è un costo di apertura, ma un **budget** sul numero di sedi

Problema 8.2: p-mediana

- Un'azienda deve scegliere al più $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ sedi, fra $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ candidate, dove aprire un punto di servizio, e assegnare ciascuno degli $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ clienti alla sede aperta più conveniente
- Per ogni sede l e cliente c, $d_{lc} \in \mathbb{Q}_{>0}$ è la distanza (o il costo di servizio) fra l e c
- Ogni cliente va assegnato a esattamente una sede aperta
- Obiettivo: minimizzare la somma delle distanze fra ciascun cliente e la sede a cui è assegnato

Il problema a parole

- **Decidiamo** quali sedi aprire (al più k) e a quale sede aperta assegnare ciascun cliente
- **L'obiettivo**: somma delle distanze cliente–sede minima
- **I vincoli**: ogni cliente assegnato a esattamente una sede; un cliente può essere assegnato solo a una sede aperta; al più k sedi aperte
- È il classico problema della **p-mediana**

Dati (input del modello)

Simbolo	Tipo	Significato
m	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero di sedi candidate, $l \in \{1, 2, \ldots, m\}$
n	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero di clienti, $c \in \{1, 2, \ldots, n\}$
d_{lc}	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	distanza fra la sede l e il cliente c
k	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero massimo di sedi aperte

Variabili decisionali

Introduciamo le seguenti m variabili binarie:

$$x_l = \begin{cases} 1 & \text{se la sede } l \text{ è aperta,} \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad \forall l \in \{1, 2, \ldots, m\},$$

e le seguenti $m\,n$ variabili binarie:

$$y_{lc} = \begin{cases} 1 & \text{se il cliente } c \text{ è servito dalla sede } l, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$\forall l \in \{1, 2, \ldots, m\},\ \forall c \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Il modello

Modello 8.2 — p-mediana

$$\min \quad \sum_{l=1}^{m} \sum_{c=1}^{n} d_{lc}\, y_{lc} \tag{8.3a}$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{l=1}^{m} y_{lc} = 1, \qquad \forall c \in \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{8.3b}$$

$$\sum_{l=1}^{m} x_l \leq k, \tag{8.3c}$$

$$x_l - y_{lc} \geq 0, \qquad \forall l \in \{1, 2, \ldots, m\},\ \forall c \in \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{8.3d}$$

$$x_l \in \{0, 1\}, \qquad \forall l \in \{1, 2, \ldots, m\}, \tag{8.3e}$$

$$y_{lc} \in \{0, 1\}, \quad \forall l \in \{1, 2, \ldots, m\},\ \forall c \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{8.3f}$$

Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli

- La funzione obiettivo minimizza la somma delle distanze fra ciascun cliente e la sede a cui è assegnato
- I vincoli (8.3b) assicurano che ogni cliente sia assegnato a esattamente una sede (n vincoli)
- Il vincolo (8.3c) limita a k il numero di sedi aperte (un vincolo)
- I vincoli (8.3d) legano le variabili di assegnamento a quelle di apertura, in forma disaggregata ($m\,n$ vincoli)
- Gli ultimi vincoli definiscono le variabili del modello

Il legame fra le variabili (1/2)

- Se il cliente c è servito dalla sede l, la sede l deve essere aperta:

$$y_{lc} = 1 \quad \Longrightarrow \quad x_l = 1$$

- In forma booleana, per la CNF,

$$y_{lc} \Longrightarrow x_l \qquad \equiv \qquad \texttt{NOT}\ y_{lc} \quad \texttt{OR} \quad x_l$$

  cioè $x_l \geq y_{lc}$: esattamente il vincolo (8.3d), imposto direttamente (non serve l'obiettivo)
- Contronominale: $x_l = 0 \Longrightarrow y_{lc} = 0$, imposta dallo stesso vincolo

Il legame fra le variabili (2/2)

- A differenza del problema 8.1, qui non c'è un costo di apertura che scoraggi sedi aperte ma inutilizzate
- Il vincolo (8.3c) impone solo un tetto: il verso «$x_l = 1 \Rightarrow$ almeno un cliente servito da l» non è né imposto né garantito dall'ottimalità
- Il legame è **disaggregato**, una riga per ogni coppia (l, c) come nel problema 7.5, perché è binario contro binario per ciascuna coppia, non un totale contro un'attivazione

Il modello in gurobipy

```
mod = gp.Model("p_mediana")
x = mod.addVars(m, vtype=GRB.BINARY, name="x")
y = mod.addVars(m, n, vtype=GRB.BINARY, name="y")
mod.setObjective(gp.quicksum(dist[l][c] * y[l, c]
    for l in range(m) for c in range(n)), GRB.MINIMIZE
        )
mod.addConstrs((y.sum("*", c) == 1 for c in range(n)),
    name="assegna")
mod.addConstr(x.sum() <= k, name="numero_sedi")
mod.addConstrs((x[l] - y[l, c] >= 0 for l in range(m)
    for c in range(n)), name="link")
```

L'istanza

$m = 3$ sedi, $n = 3$ clienti, $k = 2$:

d_{lc}	$c = 1$	$c = 2$	$c = 3$
$l = 1$	5	6	10
$l = 2$	3	12	9
$l = 3$	10	9	4

Il modello dell'istanza

Il modello dell'istanza

$$
\begin{array}{lrrr

Euristica costruttiva: il bound primale

- Si aprono le prime k sedi nell'ordine naturale; poi ogni cliente va servito dalla sede aperta più vicina
- Sull'istanza si aprono le sedi 1 e 2 ($x_1 = x_2 = 1$)
- Cliente 1: sede aperta più vicina la 2 (distanza 3)
- Cliente 2: sede aperta più vicina la 1 (distanza 6)
- Cliente 3: sede aperta più vicina la 2 (distanza 9)

$$\bar{y}_{21} = \bar{y}_{12} = \bar{y}_{23} = 1, \quad \text{tutte le altre } \bar{y}_{lc} = 0$$

di valore $3 + 6 + 9 = 18$. Quindi $z(MILP) \leq UB = 18$.

Rilassamento LP e duale

Variabile duale libera μ_c per i vincoli (1), non positiva ϱ per il vincolo (2), non negativa π_{lc} per i vincoli (3):

Duale del rilassamento LP del modello 8.2

$$\max \quad \sum_{c=1}^{n} \mu_c + k\,\varrho \qquad (8.4a)$$

$$\text{soggetto a} \quad \varrho + \sum_{c=1}^{n} \pi_{lc} \leq 0, \qquad \forall l \in \{1,2,\ldots,m\}, \qquad (8.4b)$$

$$\mu_c - \pi_{lc} \leq d_{lc}, \quad \forall l \in \{1,2,\ldots,m\}, \ \forall c \in \{1,2,\ldots,n\}, \qquad (8.4c)$$

$$\mu_c \gtreqless 0, \qquad \forall c \in \{1,2,\ldots,n\}, \qquad (8.4d)$$

$$\varrho \leq 0, \qquad (8.4e)$$

$$\pi_{lc} \geq 0, \quad \forall l \in \{1,2,\ldots,m\}, \ \forall c \in \{1,2,\ldots,n\}. \qquad (8.4f)$$

Il duale dell'istanza

Il modello dell'istanza

$$
\begin{array}{lrrr

Descrizione del duale

- μ_c è il valore dell'assegnamento del cliente c, ϱ il prezzo (non positivo) del budget di k sedi, π_{lc} il prezzo del legame «per servire c da l bisogna aprire l»
- I vincoli (8.4b) sono le colonne delle x_l: aprire l consuma budget e scioglie i legami; il saldo non può essere positivo, perché aprire una sede non costa nulla nell'obiettivo
- I vincoli (8.4c) sono le colonne delle y_{lc}: servire c da l vale μ_c e consuma il legame π_{lc}; il saldo non supera la distanza d_{lc}

Una soluzione duale a mano

- Con $\bar{\varrho} = 0$ e $\bar{\pi}_{lc} = 0$, il vincolo (8.4b) è soddisfatto e il vincolo (8.4c) diventa $\mu_c \leq d_{lc}$ per ogni l
- Il valore più grande è $\bar{\mu}_c = \min_l d_{lc}$, la distanza dalla sede più vicina in assoluto (aperta o no):

$$\bar{\mu}_1 = 3, \qquad \bar{\mu}_2 = 6, \qquad \bar{\mu}_3 = 4$$

- Valore $3 + 6 + 4 + 2 \cdot 0 = 13$; per la dualità debole

$$LB = 13 \leq z(LP) \leq z(MILP) \leq UB = 18$$

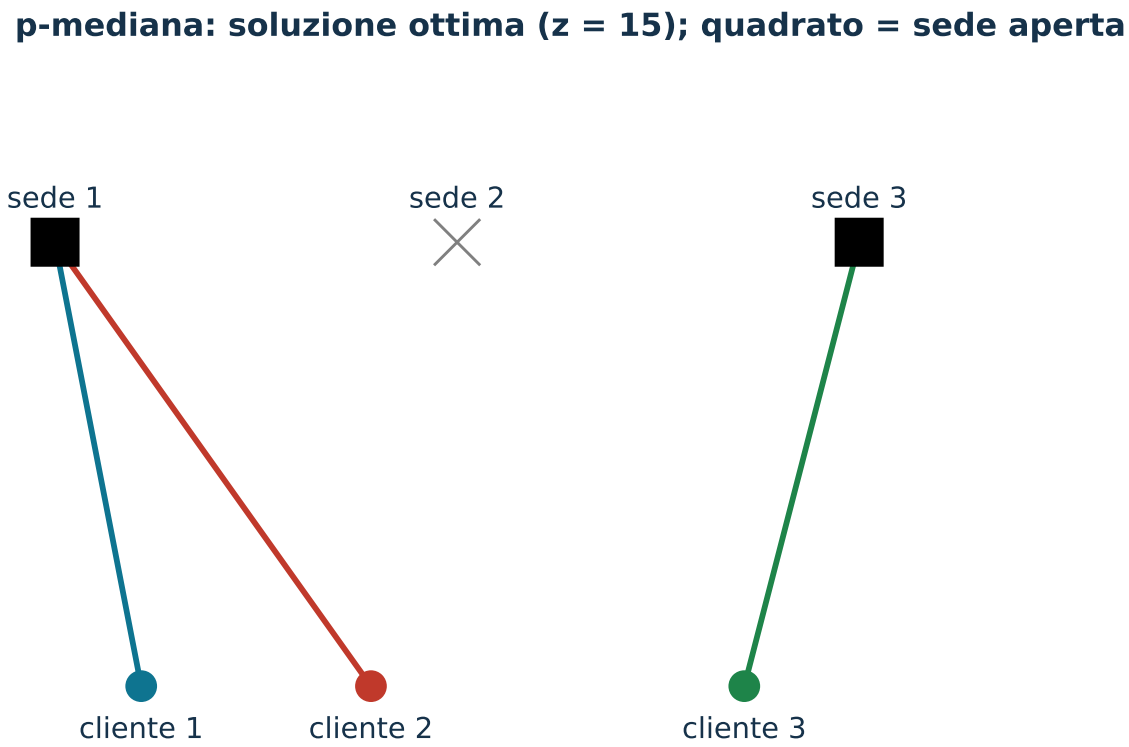
- «Nessun cliente può costare meno della sua sede più vicina» è un bound banale che ignora il budget k

Quello che dice il solver

- $z(LP) = 15 = z(LP^+)$: il vincolo $y_{Ic} \leq 1$ non è mai rilevante qui
- Il MILP ha ottimo $z(MILP) = 15$, con $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_3 = 1$ (sedi 1 e 3, non 1 e 2) e $\tilde{y}_{11} = \tilde{y}_{12} = \tilde{y}_{33} = 1$
- Il rilassamento LP è già intero su questa istanza; l'euristica, che apre le prime k sedi senza guardare i costi, perde il 20,0%

UB (euristica)	LB (duale a mano)	$z(LP)$	$z(LP^+)$	$z(MILP)$	gap euristica
18	13	15	15	15	20,0%

Soluzione ottima



Quadrato = sede aperta, croce = sede chiusa, linee = assegnamento cliente–sede.

Considerazioni aggiuntive

- Il vincolo (2) è «al più k», non «esattamente k»: aprire meno di k sedi non è mai vantaggioso, perché una sede in più non può peggiorare l'assegnamento (nessun cliente è obbligato a servirsene)
- Il modello però non impone l'uguaglianza; la variante svolta più avanti verifica che sull'istanza l'ottimo non cambia
- I vincoli (3), sommati su c per l fissato, danno

$$n\, x_l \geq \sum_{c=1}^{n} y_{lc}$$

una disuguaglianza valida aggregata, più debole di quella disaggregata

Esercizio: copertura di prossimità per un cliente

- Il cliente 1 deve essere servito entro distanza 4 (un vincolo di livello di servizio)
- Come si modella?
- Qual è il nuovo ottimo?

Il confronto finale (1/2)

I tre numeri che ogni problema del corso produce:

	valore	che cos'è
UB	18	soluzione euristica
LB	13	bound certificato
$z(MILP)$	15	ottimo del MILP

Il confronto finale (2/2)

- Gap dell'euristica rispetto all'ottimo:

$$\frac{|UB - z(MILP)|}{|z(MILP)|} = 20.0\%$$

- Gap certificato, noto *prima* di risolvere il MILP: in assoluto $UB - LB = 5$; in percentuale, rispetto alla soluzione euristica,

$$\frac{UB - LB}{|UB|} = 27.8\%$$

Una variante svolta: esattamente k sedi aperte (1/2)

- Per motivi organizzativi si devono aprire esattamente k sedi
- Basta aggiungere il vincolo lineare

$$\sum_{l=1}^{m} x_l \geq k$$

  che insieme al vincolo (2) impone l'uguaglianza
- Sull'istanza l'ottimo apre già esattamente $2 = k$ sedi: il vincolo non è vincolante e l'ottimo resta 15

Una variante svolta: esattamente k sedi aperte (2/2)

- Al duale si aggiunge $\sigma \geq 0$ con termine noto k; la colonna delle x_l impone $\varrho + \sigma \leq 0$, e l'obiettivo contiene $k(\varrho + \sigma) \leq 0$
- Il massimo si ha con $\varrho + \sigma = 0$: il rilassamento non si muove, e nemmeno l'ottimo intero
- Senza costo di apertura il vincolo di uguaglianza è ridondante; diventa vincolante solo se aprire costa

	valore	che cos'è
UB	18	soluzione euristica
LB	13	certificato duale a mano
$z(LP)$, $z(LP^+)$	15	rilassamenti senza/con i bound
$z(MILP)$	15	ottimo del MILP

Riepilogo: p-mediana

- Variabili binarie di apertura x_l e di assegnamento y_{lc}, budget $\sum_l x_l \leq k$
- Legame **disaggregato** $x_l \geq y_{lc}$, dalla CNF di $y_{lc} \Rightarrow x_l$
- Senza costo di apertura, «al più k» ed «esattamente k» danno lo stesso ottimo
- Bound: $LB = 13$, $UB = 18$, $z(MILP) = z(LP) = 15$ (rilassamento già intero)

Copertura del segnale con interferenza

Introduzione: Copertura del segnale con interferenza

- Si installano antenne per coprire clienti: un cliente è coperto se riceve abbastanza segnale e non troppa interferenza
- Vedremo un legame **se e solo se**: un verso imposto da due famiglie di vincoli, l'altro che segue dall'obiettivo
- È un problema di **massimo**: l'euristica dà il lower bound, il duale l'upper bound

Problema 8.3: copertura con interferenza (1/2)

- Un operatore deve scegliere al più $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ sedi, fra $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ candidate, dove installare un'antenna, per servire $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ clienti
- $s_{lc} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ è l'intensità del segnale ricevuto dal cliente c se la sede l è installata
- Per ogni cliente c, $p_c \in \mathbb{Q}_{>0}$ è il profitto se il cliente è coperto
- L'operatore vuole decidere quali sedi installare per massimizzare il profitto totale

Problema 8.3: copertura con interferenza (2/2)

Un cliente c è **coperto** se e solo se:

- l'intensità totale di segnale ricevuta da tutte le sedi installate è almeno pari alla soglia $t \in \mathbb{Q}_{>0}$

e

- al più una sede installata genera per quel cliente un segnale maggiore o uguale al limite di interferenza $b \in \mathbb{Q}_{>0}$

Il problema a parole

- **Decidiamo** quali sedi installare (al più k)
- **L'obiettivo**: profitto totale massimo, somma dei profitti dei clienti coperti
- **I vincoli**: un cliente è coperto se e solo se riceve segnale sufficiente e non troppa interferenza; il numero di sedi installate non supera k

Dati (input del modello)

Simbolo	Tipo	Significato
m	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero di sedi candidate, $l \in \{1, 2, \ldots, m\}$
n	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero di clienti, $c \in \{1, 2, \ldots, n\}$
s_{lc}	$\in \mathbb{Q}_{\geq 0}$	segnale ricevuto da c se l è installata
p_c	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	profitto se il cliente c è coperto
t	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	soglia di segnale totale
b	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	limite di interferenza
k	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero massimo di sedi installate

Per ogni cliente c: $\mathcal{L}_c = \{l : s_{lc} \geq b\}$, le sedi «forti».

Variabili decisionali

Introduciamo le seguenti m variabili binarie:

$$x_l = \begin{cases} 1 & \text{se si installa la sede } l, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad \forall l \in \{1, 2, \ldots, m\},$$

e le seguenti n variabili binarie:

$$y_c = \begin{cases} 1 & \text{se il cliente } c \text{ è coperto,} \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad \forall c \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Il modello

Modello 8.3 — copertura con interferenza

$$\max \quad \sum_{c=1}^{n} p_c \, y_c \tag{8.5a}$$

$$\text{soggetto a} \quad -\sum_{l=1}^{m} s_{lc} \, x_l + t \, y_c \leq 0, \qquad \forall c \in \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{8.5b}$$

$$\sum_{l \in \mathcal{L}_c} x_l + (m-1) \, y_c \leq m, \qquad \forall c \in \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{8.5c}$$

$$\sum_{l=1}^{m} x_l \leq k, \tag{8.5d}$$

$$x_l \in \{0, 1\}, \quad \forall l \in \{1, 2, \ldots, m\}, \tag{8.5e}$$

$$y_c \in \{0, 1\}, \quad \forall c \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{8.5f}$$

Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli

- La funzione obiettivo massimizza il profitto totale dei clienti coperti
- I vincoli (1) legano la copertura al segnale: se un cliente è coperto, il segnale totale ricevuto è almeno t (n vincoli)
- I vincoli (2) legano la copertura all'interferenza: se un cliente è coperto, al più una sede in $\mathcal{L}_c$ è installata (n vincoli)
- Il vincolo (3) limita a k il numero di sedi installate
- Gli ultimi vincoli definiscono le variabili del modello

Il legame fra le variabili: un «se e solo se» (1/2)

Il cliente è coperto se e solo se valgono soglia e interferenza:

$$y_c = 1 \iff \left(\sum_{l=1}^{m} s_{lc}\, x_l \geq t \right) \quad \texttt{AND} \quad \left(\sum_{l \in \mathcal{L}_c} x_l \leq 1 \right)$$

Un verso, imposto dai vincoli. Se $y_c = 1$:

- il vincolo (1) forza $\sum_l s_{lc} x_l \geq t$: la soglia è rispettata
- il vincolo (2) forza $\sum_{l \in \mathcal{L}_c} x_l \leq m - (m-1) = 1$: al più una sede forte

Il legame fra le variabili: un «se e solo se» (2/2)

L'altro verso, dall'ottimalità.

- Se le due condizioni sono soddisfatte, i vincoli (1) e (2) permettono sia $y_c = 0$ sia $y_c = 1$: nulla forza $y_c = 1$
- Ma $p_c > 0$ e y_c compare solo in questi due vincoli: portare y_c da 0 a 1 resta ammissibile e aumenta l'obiettivo di p_c
- In ogni soluzione ottima $y_c = 1$ ogni volta che le due condizioni sono soddisfatte
- Stesso schema del problema 7.6: un verso dai vincoli, l'altro dall'ottimalità in un problema di massimo

Il modello in gurobipy

```
mod = gp.Model("copertura_interferenza")
x = mod.addVars(m, vtype=GRB.BINARY, name="x")
y = mod.addVars(n, vtype=GRB.BINARY, name="y")
mod.setObjective(gp.quicksum(p[c] * y[c]
    for c in range(n)), GRB.MAXIMIZE)
mod.addConstrs((-gp.quicksum(s[l][c] * x[l] for l in
    range(m))
    + t * y[c] <= 0 for c in range(n)), name="soglia")
mod.addConstrs((gp.quicksum(x[l] for l in L[c])
    + (m - 1) * y[c] <= m for c in range(n)), name="
        interferenza")
mod.addConstr(x.sum() <= k, name="budget")
```

L'istanza

$m = 3$ sedi, $n = 5$ clienti, $t = 5$, $b = 4$, $k = 2$:

s_{lc}	$c = 1$	$c = 2$	$c = 3$	$c = 4$	$c = 5$
$l = 1$	6	0	5	3	1
$l = 2$	4	5	2	0	0
$l = 3$	0	7	5	4	2
p_c	10	20	5	15	25

Con $b = 4$: $\mathcal{L}_1 = \{1, 2\}$, $\mathcal{L}_2 = \{2, 3\}$, $\mathcal{L}_3 = \{1, 3\}$, $\mathcal{L}_4 = \{3\}$, $\mathcal{L}_5 = \emptyset$.

Il modello dell'istanza

Il modello dell'istanza

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrl}
\max & & & & 10y_1 & +20y_2 & +5y_3 & +15y_4 & +25y_5 & & \\
\text{soggetto a} & -6x_1 & -4x_2 & & +5y_1 & & & & & \leq & 0 \\
& & -5x_2 & -7x_3 & & +5y_2 & & & & \leq & 0 \\
& -5x_1 & -2x_2 & -5x_3 & & & +5y_3 & & & \leq & 0 \\
& -3x_1 & & -4x_3 & & & & +5y_4 & & \leq & 0 \\
& -x_1 & & -2x_3 & & & & & +5y_5 & \leq & 0 \\
& x_1 & +x_2 & & +2y_1 & & & & & \leq & 3 \\
& & x_2 & +x_3 & & +2y_2 & & & & \leq & 3 \\
& x_1 & & +x_3 & & & +2y_3 & & & \leq & 3 \\
& & & x_3 & & & & +2y_4 & & \leq & 3 \\
& & & & & & & & 2y_5 & \leq & 3 \\
& x_1 & +x_2 & +x_3 & & & & & & \leq & 2 \\
& x_1, & x_2, & x_3 & & & & & & \in & \{0,1\} \\
& & & & y_1, & y_2, & y_3, & y_4, & y_5 & \in & \{0,1\}
\end{array}
$$

Euristica costruttiva: il bound primale (1/2)

- Si aprono le prime k sedi nell'ordine naturale
- Un cliente è coperto se il segnale totale delle sedi aperte raggiunge la soglia t e al più una sede di $\mathcal{L}_c$ è aperta
- Sull'istanza si aprono le sedi 1 e 2
- Cliente 1: segnale $6 + 4 = 10 \geq 5$, ma entrambe le sedi forti di $\mathcal{L}_1 = \{1, 2\}$ sono aperte: **non coperto**
- Cliente 2: segnale $0 + 5 = 5 \geq 5$, aperta solo la sede forte 2: **coperto**

Euristica costruttiva: il bound primale (2/2)

- Cliente 3: segnale $5 + 2 = 7 \geq 5$, aperta solo la sede forte 1: **coperto**
- Cliente 4: segnale $3 + 0 = 3 < 5$: **non coperto**
- Cliente 5: segnale $1 + 0 = 1 < 5$: **non coperto**

- La soluzione trovata copre i clienti 2 e 3, di valore $20 + 5 = 25$

Quindi

$$z(MILP) \geq LB = 25.$$

Rilassamento LP e duale

Variabili duali non negative: π_c per i vincoli (1), λ_c per i vincoli (2), μ per il vincolo (3):

Duale del rilassamento LP del modello 8.3

$$\min \quad m \sum_{c=1}^{n} \lambda_c + k\,\mu \tag{8.6a}$$

$$\text{soggetto a} \quad -\sum_{c=1}^{n} s_{lc}\,\pi_c + \sum_{c\,:\,l \in \mathcal{L}_c} \lambda_c + \mu \geq 0, \quad \forall l \in \{1, 2, \ldots, m\}, \tag{8.6b}$$

$$t\,\pi_c + (m-1)\,\lambda_c \geq p_c, \quad \forall c \in \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{8.6c}$$

$$\pi_c \geq 0, \quad \forall c \in \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{8.6d}$$

$$\lambda_c \geq 0, \quad \forall c \in \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{8.6e}$$

$$\mu \geq 0. \tag{8.6f}$$

Il duale dell'istanza

Il modello dell'istanza

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrrrrrrrr}
\min & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & 3\lambda_1 & +3\lambda_2 & +3\lambda_3 & +3\lambda_4 & +3\lambda_5 & +2\mu & & \\
\text{soggetto a} & -6\pi_1 & & -5\pi_3 & -3\pi_4 & -\pi_5 & +\lambda_1 & & +\lambda_3 & & & & +\mu & \geq & 0 \\
 & -4\pi_1 & -5\pi_2 & -2\pi_3 & & & +\lambda_1 & +\lambda_2 & & & & & +\mu & \geq & 0 \\
 & & -7\pi_2 & -5\pi_3 & -4\pi_4 & -2\pi_5 & & +\lambda_2 & +\lambda_3 & +\lambda_4 & & & +\mu & \geq & 0 \\
 & 5\pi_1 & & & & & +2\lambda_1 & & & & & & & \geq & 10 \\
 & & 5\pi_2 & & & & & +2\lambda_2 & & & & & & \geq & 20 \\
 & & & 5\pi_3 & & & & & +2\lambda_3 & & & & & \geq & 5 \\
 & & & & 5\pi_4 & & & & & +2\lambda_4 & & & & \geq & 15 \\
 & & & & & 5\pi_5 & & & & & +2\lambda_5 & & & \geq & 25 \\
 & \pi_1, & \pi_2, & \pi_3, & \pi_4, & \pi_5 & & & & & & & & \geq & 0 \\
 & & & & & & \lambda_1, & \lambda_2, & \lambda_3, & \lambda_4, & \lambda_5 & & & \geq & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & \mu & \geq & 0
\end{array}
$$

Descrizione del duale

- π_c è il prezzo del vincolo di soglia del cliente c, λ_c quello del suo vincolo di interferenza, μ il prezzo di una unità di budget
- I vincoli (8.6b) sono le colonne delle x_l: l'antenna l porta segnale, entra nei vincoli di interferenza e consuma budget; il saldo resta non negativo, perché le x_l non compaiono nell'obiettivo
- I vincoli (8.6c) sono le colonne delle y_c: servire c richiede t unità di segnale al prezzo π_c e $m-1$ unità di interferenza al prezzo λ_c, che insieme devono coprire il premio p_c

Una soluzione duale a mano

- Con $\bar{\pi}_c = 0$ e $\bar{\mu} = 0$, il vincolo (8.6b) è soddisfatto e il vincolo (8.6c) diventa $(m-1)\bar{\lambda}_c \geq p_c$, cioè $\bar{\lambda}_c = p_c/2$:

$$\bar{\lambda}_1 = 5, \quad \bar{\lambda}_2 = 10, \quad \bar{\lambda}_3 = 5/2, \quad \bar{\lambda}_4 = 15/2, \quad \bar{\lambda}_5 = 25/2$$

- Valore: $3 \cdot (5 + 10 + 5/2 + 15/2 + 25/2) = 3 \cdot 75/2 = 225/2$
- Per la dualità debole

$$LB = 25 \leq z(MILP) \leq z(LP) \leq UB = 225/2$$

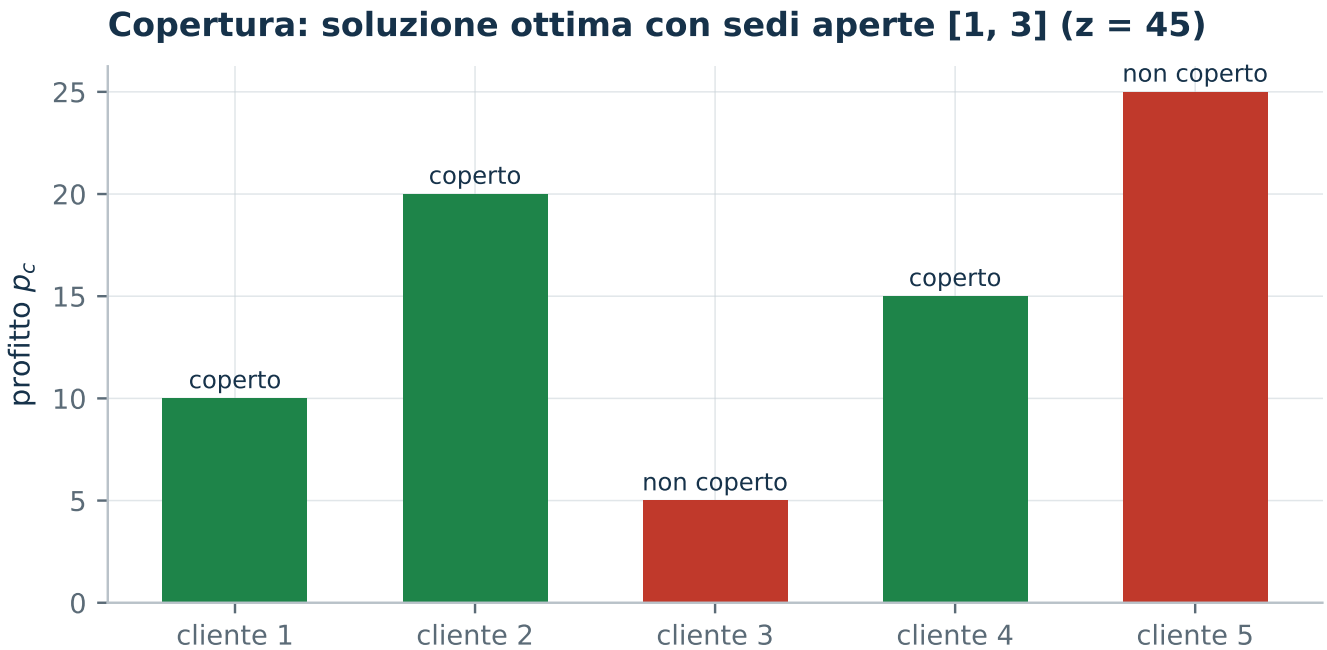
- Problema di massimo: l'euristica dà il lower bound, il duale l'upper bound

Quello che dice il solver

- $z(LP) = 41925/646 \approx 64{,}9$; con $x_l \leq 1$ si ottiene $z(LP^+) = 125/2 = 62{,}5$
- Il MILP ha ottimo $z(MILP) = 45$, con $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_3 = 1$ e $\tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = \tilde{y}_4 = 1$ (clienti 1, 2, 4 coperti)
- Il gap dell'euristica è del 44,4%: aprire le prime k sedi è molto meno efficace che nei problemi di minimo costo

LB (euristica)	UB (duale a mano)	$z(LP)$	$z(LP^+)$	$z(MILP)$	gap euristica
25	225/2	41925/646	125/2	45	44,4%

Soluzione ottima



Profitto di ciascun cliente, verde se coperto, rosso se non coperto.

Considerazioni aggiuntive

- Il cliente 5 non può mai essere coperto: $\mathcal{L}_5 = \emptyset$, ma il segnale massimo è $1 + 0 + 2 = 3 < t = 5$ anche aprendo tutte le sedi; y_5 si può fissare a 0 a priori
- I vincoli (2), per un cliente con $|\mathcal{L}_c| \leq 1$, sono ridondanti (mai stretti): è il caso dei clienti 4 e 5
- Il cliente 2 non è fra questi: $\mathcal{L}_2 = \{2, 3\}$ ha due elementi

Esercizio: installazione condizionata

- Per motivi di manutenzione, la sede 1 può essere installata solo se lo è anche la sede 3
- Come si modella?
- Qual è il nuovo ottimo?

Il confronto finale (1/2)

I tre numeri che ogni problema del corso produce:

	valore	che cos'è
LB	25	soluzione euristica
UB	$\frac{225}{2}$	bound certificato
$z(MILP)$	45	ottimo del MILP

Il confronto finale (2/2)

- Gap dell'euristica rispetto all'ottimo:

$$\frac{|LB - z(MILP)|}{|z(MILP)|} = 44.4\%$$

- Gap certificato, noto *prima* di risolvere il MILP: in assoluto $UB - LB = \frac{175}{2}$; in percentuale, rispetto alla soluzione euristica,

$$\frac{UB - LB}{|LB|} = 350.0\%$$

Una variante svolta: copertura minima garantita (1/2)

- Per contratto, almeno 3 clienti devono essere coperti
- Si aggiunge il vincolo lineare

$$\sum_{c=1}^{n} y_c \geq 3$$

- Sull'istanza l'ottimo copre già 3 clienti: il vincolo non è vincolante e l'ottimo resta 45

Una variante svolta: copertura minima garantita (2/2)

- Il vincolo aggiunge al duale $\omega \leq 0$; conviene lasciarlo a zero: abbassarlo costringe ogni λ_c a salire di $-\omega/(m-1)$, e quelle λ pesano più di quanto il termine noto faccia risparmiare
- L'euristica, con poche sedi, prova ogni scelta di k sedi e tiene la migliore ammissibile

	valore	che cos'è
UB	$\frac{225}{2}$	certificato duale a mano
LB	45	soluzione euristica
$z(LP)$	$\frac{41925}{646}$	rilassamento senza i bound
$z(LP^+)$	$\frac{125}{2}$	rilassamento con i bound
$z(MILP)$	45	ottimo del MILP

Riepilogo: Copertura con interferenza

- Variabili binarie di installazione x_l e di copertura y_c
- Legame **se e solo se**: soglia (1) e interferenza (2) impongono $y_c = 1 \Rightarrow$ condizioni; il verso opposto segue dall'ottimalità ($p_c > 0$)
- Il vincolo di interferenza usa il coefficiente $m - 1$ per disattivarsi quando $y_c = 0$
- Bound (massimo): $LB = 25$, $UB = 225/2$, $z(MILP) = 45$

Localizzazione di hub con costo massimo

Introduzione: Localizzazione di hub con costo massimo

- Si connettono terminali a hub con capacità; si paga l'attivazione degli hub e, per ogni hub, il costo di connessione **massimo**
- Ritroviamo l'**attivazione aggregata** del problema 8.1 insieme alla **variabile di massimo** del problema 7.4
- Vedremo anche un tranello frequente nella costruzione di una soluzione duale

Problema 8.4: hub con costo di connessione massimo (1/2)

- In una rete ci sono $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ terminali, ciascuno da connettere a esattamente un hub
- Sono disponibili $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ hub, e ogni hub può servire al più $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ terminali
- Un hub va attivato prima di poter servire terminali: $f_j \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ è il costo di attivazione dell'hub j
- $c_{ij} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ è il costo di connettere il terminale i all'hub j

Problema 8.4: hub con costo di connessione massimo (2/2)

- Obiettivo: decidere come assegnare i terminali agli hub per minimizzare la somma
  - dei costi di attivazione degli hub usati
  - del costo di connessione massimo di ciascun hub
- nel rispetto dei vincoli descritti

Il problema a parole

- **Decidiamo** quali hub attivare e a quale hub connettere ciascun terminale
- **L'obiettivo**: costi di attivazione più, per ciascun hub, il costo di connessione più alto fra i terminali assegnati (non la somma: il collo di bottiglia)
- **I vincoli**: ogni terminale connesso a esattamente un hub; un hub non attivato non serve nessuno, uno attivato serve al più k terminali

Dati (input del modello)

Simbolo	Tipo	Significato
n	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero di terminali, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$
m	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero di hub, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$
k	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	capacità (terminali) di ciascun hub
c_{ij}	$\in \mathbb{Q}_{\geq 0}$	costo di connettere il terminale i all'hub j
f_j	$\in \mathbb{Q}_{\geq 0}$	costo di attivazione dell'hub j

Variabili decisionali

- $n\,m$ variabili binarie: $x_{ij} = 1$ se il terminale i è connesso all'hub j, 0 altrimenti
- m variabili binarie: $y_j = 1$ se l'hub j è attivato, 0 altrimenti
- m variabili continue non negative:

$z_j =$ costo di connessione massimo fra i terminali assegnati all'hub j

con $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Il modello

Modello 8.4 — hub con costo massimo

$$\min \quad \sum_{j=1}^{m} f_j\, y_j + \sum_{j=1}^{m} z_j \tag{8.7a}$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1, \qquad \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}, \tag{8.7b}$$

$$-\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + k\, y_j \geq 0, \qquad \forall j \in \{1,2,\ldots,m\}, \tag{8.7c}$$

$$-c_{ij}\, x_{ij} + z_j \geq 0, \qquad \forall i \in \{1,2,\ldots,n\},\ \forall j \in \{1,2,\ldots,m\}, \tag{8.7d}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,n\},\ \forall j \in \{1,2,\ldots,m\}, \tag{8.7e}$$

$$y_j \in \{0,1\}, \qquad \forall j \in \{1,2,\ldots,m\}, \tag{8.7f}$$

$$z_j \geq 0, \qquad \forall j \in \{1,2,\ldots,m\}. \tag{8.7g}$$

Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli

- La funzione obiettivo minimizza i costi di attivazione degli hub usati più il costo di connessione massimo di ciascun hub
- I vincoli (1): ogni terminale connesso a esattamente un hub (n vincoli)
- I vincoli (2) legano assegnamento e attivazione e impongono la capacità: un hub non attivato non serve nessuno, uno attivato serve al più k terminali (m vincoli)
- I vincoli (3) legano assegnamento e variabile di massimo: se i è connesso a j, $z_j \geq c_{ij}$ ($n\,m$ vincoli)
- Gli ultimi vincoli definiscono le variabili del modello

Primo legame: attivazione aggregata (1/2)

- Se almeno un terminale è connesso a j, allora j deve essere attivato:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq 1 \implies y_j = 1,$$

$$\text{contronominale:} \quad y_j = 0 \implies \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 0$$

- Imposto direttamente, in forma aggregata, dal vincolo (2): se $y_j = 0$ diventa $\sum_i x_{ij} \leq 0$; se $y_j = 1$ diventa $\sum_i x_{ij} \leq k$, la capacità
- Il verso opposto, $y_j = 1 \Rightarrow \sum_i x_{ij} \geq 1$, non è imposto: $y_j = 1$ con tutte le $x_{ij} = 0$ soddisfa (2)

Primo legame: attivazione aggregata (2/2)

Il verso opposto segue dall'ottimalità, con una forza che dipende dal segno di f_j:

- se $f_j > 0$: porre $y_j = 0$ su un hub vuoto resta ammissibile e riduce il costo; quindi **in ogni ottimo** nessun hub attivato resta vuoto
- se $f_j = 0$ (ammesso, $f_j \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$): lo scambio non peggiora né migliora, e vale solo che **esiste un ottimo** con gli hub vuoti spenti

Sull'istanza $f = (5, 6, 7) > 0$ e vale la versione forte; ma la dimostrazione va scritta con l'ipotesi che usa, non con quella che fa comodo.

Secondo legame: variabile di massimo

- Se il terminale i è connesso all'hub j, allora $z_j \geq c_{ij}$:

$$x_{ij} = 1 \quad \Longrightarrow \quad z_j \geq c_{ij}$$

  imposto dal vincolo (3), equivalente a $z_j \geq c_{ij} x_{ij}$
- Su tutti i terminali connessi a j: $z_j \geq \max_{i\,:\,x_{ij}=1} c_{ij}$ (massimo sul vuoto $= 0$, da $z_j \geq 0$)
- L'obiettivo minimizza $\sum_j z_j$ e z_j non compare altrove: in ogni ottimo

$$z_j = \max_{i\,:\,x_{ij}=1} c_{ij}$$

  lo stesso schema del problema 7.4

Il modello in gurobipy

```
mod = gp.Model("hub_max")
x = mod.addVars(n, m, vtype=GRB.BINARY, name="x")
y = mod.addVars(m, vtype=GRB.BINARY, name="y")
z = mod.addVars(m, name="z")
mod.setObjective(gp.quicksum(f[j] * y[j] for j in
    range(m))
    + z.sum(), GRB.MINIMIZE)
mod.addConstrs((gp.quicksum(x[i, j] for j in range(m))
     == 1
    for i in range(n)), name="assegnamento")
mod.addConstrs((-gp.quicksum(x[i, j] for i in range(n)
    )
    + k * y[j] >= 0 for j in range(m)), name="
        attivazione")
mod.addConstrs((-c[i][j] * x[i, j] + z[j] >= 0
    for i in range(n) for j in range(m)), name="
        massimo")
```

L'istanza

$n = 3$ terminali, $m = 3$ hub, $k = 2$:

c_{ij}	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
$i = 1$	5	10	2
$i = 2$	5	4	6
$i = 3$	5	4	6
f_j	5	6	7

Il modello dell'istanza

Il modello dell'istanza

$$
\begin{array}{lrrr

Euristica costruttiva: il bound primale (1/2)

- Un'euristica **next-fit**, ispirata al bin packing: si riempie un hub alla volta fino a k terminali, poi si passa al successivo
- Se tutti gli hub sono stati usati prima di aver assegnato tutti i terminali, l'algoritmo fallisce
- È la stessa euristica generica dei problemi di scheduling della famiglia precedente: gli hub sono le «macchine» con capacità k, i terminali i «lavori» con tempo unitario

Euristica costruttiva: il bound primale (2/2)

- Il terminale 1 va sull'hub 1 (disponibilità $2 \to 1$), il terminale 2 sull'hub 1 ($1 \to 0$)
- Il terminale 3 non ci sta più sull'hub 1, passa sull'hub 2
- Si attivano gli hub 1 e 2: $\max(c_{11}, c_{21}) = 5$ e $c_{32} = 4$

$$\bar{x}_{11} = \bar{x}_{21} = \bar{x}_{32} = 1, \quad \bar{y}_1 = \bar{y}_2 = 1, \quad \bar{z}_1 = 5, \ \bar{z}_2 = 4$$

di valore $5 + 6 + 5 + 4 = 20$. Quindi

$$z(MILP) \leq UB = 20.$$

Rilassamento LP e duale

Variabile duale libera α_i per (1), non negative β_j per (2) e γ_{ij} per (3):

Duale del rilassamento LP del modello 8.4

$$\max \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tag{8.8a}$$

$$\text{soggetto a} \quad \alpha_i - \beta_j - c_{ij}\,\gamma_{ij} \leq 0, \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,n\},\ \forall j \in \{1,2,\ldots,m\}, \tag{8.8b}$$

$$k\,\beta_j \leq f_j, \qquad \forall j \in \{1,2,\ldots,m\}, \tag{8.8c}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} \leq 1, \qquad \forall j \in \{1,2,\ldots,m\}, \tag{8.8d}$$

$$\alpha_i \gtreqless 0, \qquad \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}, \tag{8.8e}$$

$$\beta_j \geq 0, \qquad \forall j \in \{1,2,\ldots,m\}, \tag{8.8f}$$

$$\gamma_{ij} \geq 0, \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,n\},\ \forall j \in \{1,2,\ldots,m\}. \tag{8.8g}$$

Il duale dell'istanza

Il modello dell'istanza

$$
\begin{array}{rrrr

Descrizione del duale

- α_i è il valore del terminale i, β_j il prezzo di uno dei k posti dell'hub j, γ_{ij} il prezzo del legame che spinge il massimo dell'hub j sopra c_{ij}
- I vincoli (8.8b) sono le colonne delle x_{ij}: assegnare i a j soddisfa l'assegnamento, occupa un posto e alza il massimo fino a c_{ij}; il saldo non può essere positivo
- I vincoli (8.8c) sono le colonne delle y_j: i k posti non valgono più del costo fisso f_j
- I vincoli (8.8d) sono le colonne delle z_j: z_j pesa 1 nell'obiettivo primale, quindi i prezzi dei legami sommano al più a uno

Una soluzione duale a mano

- Poniamo $\bar{\gamma}_{ij} = 0$ (il vincolo (8.8d) è soddisfatto) e $\bar{\beta}_j = f_j/k$, il valore più grande ammesso da (8.8c):

$$\bar{\beta} = (5/2,\ 3,\ 7/2)$$

- Il vincolo (8.8b) diventa $\alpha_i \leq \bar{\beta}_j$ per *ogni* hub j: il valore più grande è $\bar{\alpha}_i = \min_j \bar{\beta}_j = 5/2$
- Valore $3 \cdot 5/2 = 15/2$; per la dualità debole

$$LB = 15/2 \leq z(LP) \leq z(MILP) \leq UB = 20$$

Un tranello frequente

Osservazione 1: Un tranello frequente

Fissare $\bar{\gamma}_{ij} = 0$ solo per gli hub «non convenienti» e sperare che il vincolo (8.8b) imponga α_i soltanto rispetto all'hub più economico è un errore: il vincolo vale per ogni j, quindi α_i è limitato dal minimo su tutti gli hub.

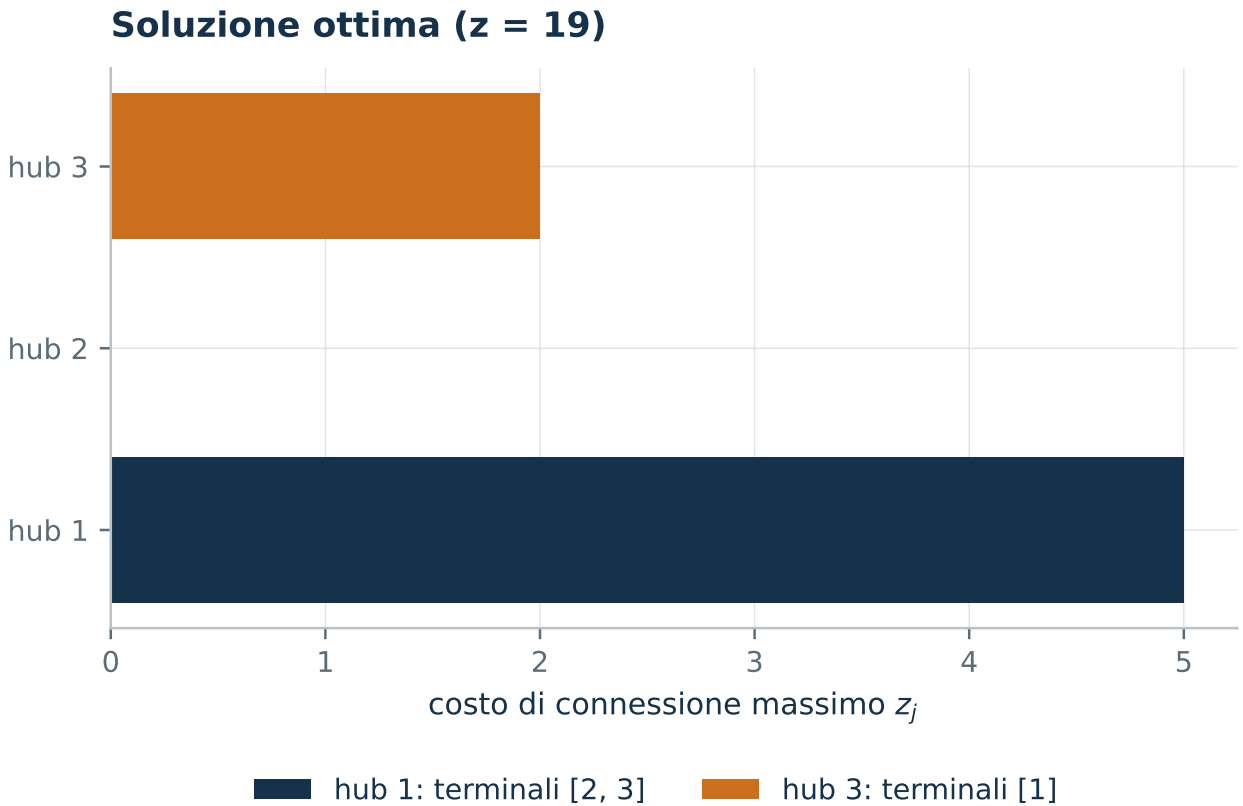
Ad esempio, porre $\bar{\gamma}_{i1} = 1/n$ solo per l'hub più economico e lasciare $\bar{\beta}_j = 0$ altrove non è ammissibile: viola il vincolo (8.8b) per gli altri hub.

Quello che dice il solver

- $z(LP) = 25/2$; con $x_{ij} \leq 1$ si ottiene $z(LP^+) = 1015/78 \approx 13{,}0$
- Il MILP ha ottimo $z(MILP) = 19$: $\tilde{x}_{13} = \tilde{x}_{21} = \tilde{x}_{31} = 1$, $\tilde{y}_1 = \tilde{y}_3 = 1$, $\tilde{z}_1 = 5$, $\tilde{z}_3 = 2$
- Il terminale 1 da solo sull'hub 3 ($c_{13} = 2$), i terminali 2 e 3 sull'hub 1; il next-fit è comunque vicino (5,3%)

UB (euristica)	LB (duale a mano)	$z(LP)$	$z(LP^+)$	$z(MILP)$	gap euristica
20	15/2	25/2	1015/78	19	5,3%

Soluzione ottima



Costo di connessione massimo di ciascun hub attivato, con i terminali assegnati.

Considerazioni aggiuntive

- I vincoli disaggregati $x_{ij} \leq y_j$ sono disuguaglianze valide implicate dal vincolo aggregato (2): stessa logica di attivazione in forma diversa
- Con $M_j = \max_i c_{ij}$, i vincoli $z_j \leq M_j\, y_j$ non sono disuguaglianze valide (il modello ammette $z_j > 0$ con $y_j = 0$), ma sono **vincoli che preservano l'ottimalità**: in ogni ottimo $z_j = 0$ quando $y_j = 0$

Esercizio: link di attivazione disaggregato

- Si *aggiungano* al modello 8.4 i link disaggregati $x_{ij} \leq y_j$
- Cambia l'ottimo per l'istanza? Cambia il rilassamento?
- Che cosa succede se, invece di aggiungerli, si *sostituisce* con essi il vincolo aggregato (2)?

Il confronto finale (1/2)

I tre numeri che ogni problema del corso produce:

	valore	che cos'è
UB	20	soluzione euristica
LB	$\frac{15}{2}$	bound certificato
$z(MILP)$	19	ottimo del MILP

Il confronto finale (2/2)

- Gap dell'euristica rispetto all'ottimo:

$$\frac{|UB - z(MILP)|}{|z(MILP)|} = 5.3\%$$

- Gap certificato, noto *prima* di risolvere il MILP: in assoluto $UB - LB = \frac{25}{2}$; in percentuale, rispetto alla soluzione euristica,

$$\frac{UB - LB}{|UB|} = 62.5\%$$

Una variante svolta: connessione vietata (1/2)

- Il terminale 1 non può essere connesso all'hub 2 (un vincolo di sicurezza)
- Si fissa la variabile a zero con il vincolo lineare

$$x_{12} = 0$$

- Sull'istanza l'ottimo non usa già x_{12} (il terminale 1 è sull'hub 3): il vincolo non è vincolante e l'ottimo resta 19

Una variante svolta: connessione vietata (2/2)

- Vietare una connessione toglie una colonna dal primale, quindi *toglie* un vincolo dal duale: α_1 può salire
- Gli si dà un γ su ciascuno degli hub che gli restano e il bound cresce: un vincolo in più nel primale *migliora* il certificato

	valore	che cos'è
UB	20	soluzione euristica
LB	$\frac{21}{2}$	certificato duale a mano
$z(LP)$	$\frac{25}{2}$	rilassamento senza i bound
$z(LP^+)$	$\frac{79}{6}$	rilassamento con i bound
$z(MILP)$	19	ottimo del MILP

Riepilogo: Hub con costo massimo

- Variabili binarie di assegnamento x_{ij} e di attivazione y_j, continue di massimo z_j
- **Attivazione aggregata** $\sum_i x_{ij} \leq k\, y_j$, come nel problema 8.1
- **Variabile di massimo** $z_j \geq c_{ij} x_{ij}$: in ogni ottimo z_j è esattamente il massimo
- Nel duale, il vincolo vale per *ogni* hub: α_i è limitato dal minimo
- Bound: $LB = 15/2$, $UB = 20$, $z(MILP) = 19$

Riepilogo (1/2)

I quattro legami:

- attivazione aggregata: $\sum_c y_{lc} \leq u_l x_l$ (localizzazione capacitata)
- attivazione disaggregata: $x_l \geq y_{lc}$ (p-mediana)
- se e solo se: un verso dai vincoli, l'altro dall'obiettivo (copertura)
- attivazione aggregata e variabile di massimo $z_j \geq c_{ij} x_{ij}$ (hub)

Versi dei legami:

- quello che i vincoli non impongono va dimostrato dall'ottimalità, con le ipotesi giuste (ad esempio $i_l > 0$, $f_j > 0$, $p_c > 0$)

Riepilogo (2/2)

I due bound:

- l'euristica costruttiva dà un bound primale, una soluzione duale a mano un bound duale
- insieme formano il «sandwich» che il solver cerca di chiudere

Problema	euristica	duale a mano	$z(MILP)$
8.1 capacitata	439	1581/5	365
8.2 p-mediana	18	13	15
8.3 copertura (max)	25	225/2	45
8.4 hub	20	15/2	19