Assegnamento e scheduling (1/2)

7.1–7.4

Indice

La famiglia

Assegnamento a costo minimo

Macchine con costo fisso

Selezione di lavori

Lavori in parallelo

Obiettivi (1/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- scrivere dal suo enunciato il modello simbolico di un problema di assegnamento o di scheduling;
- dimostrare i legami fra variabili di macchina, di classe e di assegnamento;

Obiettivi (2/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- modellare il sequenziamento su una macchina con precedenze binarie e un big-M calcolato dai dati;
- chiudere il sandwich dei bound con un'euristica costruttiva e una soluzione duale costruita a mano.

Prerequisiti

- Da questo modulo, Capitolo 6 «Legami fra variabili»: attivazione, variabile di massimo, *se e solo se*, big-M e precedenze
- Da questo modulo, Capitolo 2 «Rilassamenti, dualità e bound»: il protocollo dei bound e il duale del rilassamento LP
- Dal modulo *Problemi di ottimizzazione combinatoria*, la pagina «Scheduling su macchine parallele identiche ($P\|C_{\max}$)»: il problema di scheduling $P\|C_{\max}$ e la regola LPT

La famiglia

Introduzione: La famiglia

- Sette problemi con lo stesso scheletro: dei **lavori** vanno assegnati a delle **macchine** con disponibilità limitata
- Cambia, di problema in problema, che cosa si paga e che cosa si decide
- Impareremo a riconoscere, in situazioni diverse, gli stessi **legami fra variabili**: attivazione, variabile di massimo, «se e solo se», big-M

Che cosa cambia da un problema all'altro (1/2)

- Il costo dell'assegnamento (problema 1)
- Il costo fisso di ogni macchina accesa (problema 2)
- Il ricavo dei lavori che si scelgono di eseguire (problema 3)
- Il tempo di lavorazione quando i lavori sulla stessa macchina vanno in parallelo (problema 4)

Che cosa cambia da un problema all'altro (2/2)

- Il setup di una classe di lavori (problema 5)
- Un premio che si incassa *se e solo se* una classe è completa (problema 6)
- Il ritardo rispetto alle scadenze quando i lavori si susseguono su una sola macchina (problema 7)

I legami fra variabili (1/2)

- **Attivazione** (problemi 2, 3, 5): la variabile binaria «macchina usata» o «classe attivata» che comanda le assegnazioni, nella forma aggregata

$$\sum_j t_{jm} x_{jm} \leq a_m y_m$$

  o nella forma disaggregata $x_j \leq y_c$

- **Variabile di massimo** (problema 4): il tempo di lavorazione $y_m \geq t_{jm} x_{jm}$ per ogni lavoro, che all'ottimo vale esattamente il massimo

I legami fra variabili (2/2)

- **Se e solo se** (problema 6): un verso lo impone il vincolo, l'altro l'obiettivo
- **Big-M e disgiunzioni** (problema 7): «o j prima di i o i prima di j», con M pari alla somma dei tempi

Lo schema di ogni problema

Per ognuno dei sette problemi:

- modello e dimostrazione dei legami
- istanza
- euristica costruttiva: un bound dal lato delle soluzioni ammissibili
- duale del rilassamento LP con una soluzione duale costruita a mano: un bound dall'altro lato
- soluzione del solver
- considerazioni aggiuntive e domande di modellazione

Notazione della famiglia (1/2)

Simbolo	Tipo	Significato
n	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero di lavori, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$
k	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero di macchine, $m \in \{1, 2, \ldots, k\}$
t_{jm}	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	tempo di lavorazione del lavoro j sulla macchina m; t_j se non dipende dalla macchina
c_{jm}	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	costo di eseguire il lavoro j sulla macchina m
c_m	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	costo fisso se la macchina m viene usata
a_m	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	disponibilità della macchina m; a se la macchina è una sola

Notazione della famiglia (2/2)

Simbolo	Tipo	Significato
p_m	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero massimo di lavori sulla macchina m
r_j	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	ricavo se il lavoro j viene eseguito
d_j	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	scadenza del lavoro j
q	$\in \mathbb{Z}_{\geq 2}$	numero di classi di lavori, $c \in \{1, 2, \ldots, q\}$
$\mathcal{J}_c$	$\subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$	lavori della classe c (partizione)
$f_c,\ s_c$	$\in \mathbb{Q}_{\geq 0}$	costo e tempo di setup della classe c
v_c	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	premio se la classe c è completa
u	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	riduzione della disponibilità se si mescolano classi

Riepilogo: La famiglia

- Lo scheletro è sempre lo stesso: **lavori** da assegnare a **macchine** con disponibilità limitata
- Quello che cambia è il **costo** (o il ricavo) e il **legame** fra le famiglie di variabili
- Alcuni versi dei legami sono imposti dai vincoli, altri seguono dall'**ottimalità**
- Per ogni problema costruiamo due bound: uno **primale** (euristica) e uno **duale** (rilassamento LP)

Assegnamento a costo minimo

Introduzione: Assegnamento a costo minimo

- Il primo problema della famiglia: ogni lavoro va eseguito da una macchina, e ogni macchina ha un tempo disponibile limitato
- È il problema di **assegnamento generalizzato**: un assegnamento con un vincolo di zaino per macchina
- Non ci sono legami da dimostrare: c'è una sola famiglia di variabili. Serve a fissare lo schema dei due bound che useremo in tutti i problemi

Problema 7.1: assegnamento a costo minimo (1/2)

- Un'azienda deve eseguire $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ lavori su $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ macchine
- Per ogni lavoro j e ogni macchina m, il valore $t_{jm} \in \mathbb{Q}_{>0}$ è il tempo di lavorazione in minuti e il valore $c_{jm} \in \mathbb{Q}_{>0}$ è il costo in euro di eseguire il lavoro j sulla macchina m

Problema 7.1: assegnamento a costo minimo (2/2)

- Per ogni macchina m, il valore $a_m \in \mathbb{Q}_{>0}$ è il tempo di lavorazione disponibile in minuti
- Ogni macchina esegue un lavoro alla volta (niente lavorazioni in parallelo)
- L'azienda vuole assegnare tutti i lavori alle macchine a **costo minimo**

Il problema a parole

- **Decidiamo** su quale macchina eseguire ciascun lavoro
- **L'obiettivo**: costo totale minimo
- **I vincoli**: ogni lavoro va eseguito da esattamente una macchina; il tempo complessivo dei lavori assegnati a una macchina non supera la sua disponibilità
- È il problema di **assegnamento generalizzato**: un assegnamento con un vincolo di zaino per macchina

Dati (input del modello)

Simbolo	Tipo	Significato
n	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero di lavori, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$
k	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero di macchine, $m \in \{1, 2, \ldots, k\}$
t_{jm}	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	tempo di lavorazione del lavoro j sulla macchina m
c_{jm}	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	costo di eseguire il lavoro j sulla macchina m
a_m	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	disponibilità della macchina m

Variabili decisionali

Introduciamo le seguenti $n\,k$ variabili binarie:

$$x_{jm} = \begin{cases} 1 & \text{se il lavoro } j \text{ è eseguito dalla macchina } m, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \forall m \in \{1, 2, \ldots, k\}.$$

Il modello

Modello 7.1 — assegnamento a costo minimo

$$\min \quad \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=1}^{k} c_{jm}\, x_{jm} \tag{7.1a}$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{m=1}^{k} x_{jm} = 1, \qquad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{7.1b}$$

$$\sum_{j=1}^{n} t_{jm}\, x_{jm} \leq a_m, \qquad \forall m \in \{1, 2, \ldots, k\}, \tag{7.1c}$$

$$x_{jm} \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \ \forall m \in \{1, 2, \ldots, k\}. \tag{7.1d}$$

Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli

- La funzione obiettivo minimizza il costo totale di lavorazione, somma dei costi degli assegnamenti scelti
- I vincoli (7.1b) assicurano che ogni lavoro sia assegnato a esattamente una macchina, così che tutti i lavori vengano eseguiti (n vincoli)
- I vincoli (7.1c) garantiscono che il tempo di lavorazione complessivo dei lavori assegnati a ciascuna macchina non superi la sua disponibilità (k vincoli)
- Gli ultimi vincoli definiscono le variabili del modello

Nessun legame da dimostrare

- Il modello ha una sola famiglia di variabili: non ci sono legami da dimostrare
- I vincoli (7.1c) sono del tipo «capacità/risorsa»: due quantità della stessa natura (minuti richiesti e minuti disponibili) messe a confronto, nessuna implicazione logica da scrivere
- I due bound che costruiamo — quello **primale**, dall'euristica, e quello **duale**, dal rilassamento — sono i due lati del sandwich che il solver cerca di chiudere

Il modello in gurobipy

```
m = gp.Model("assegnamento")
x = m.addVars(n, k, vtype=GRB.BINARY, name="x")
m.setObjective(gp.quicksum(c[j][mm] * x[j, mm]
    for j in range(n) for mm in range(k)), GRB.
        MINIMIZE)
m.addConstrs((x.sum(j, "*") == 1 for j in range(n)),
             name="assegna")
m.addConstrs((gp.quicksum(t[j][mm] * x[j, mm]
    for j in range(n)) <= a[mm] for mm in range(k)),
    name="disponibilita")
m.optimize()
```

L'istanza

$n = 3$ lavori, $k = 3$ macchine:

t_{jm}	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
$j = 1$	2	1	3
$j = 2$	3	4	2
$j = 3$	4	5	3

c_{jm}	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
$j = 1$	5	10	2
$j = 2$	5	4	6
$j = 3$	5	4	6

	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
a_m	5	6	7

Il modello dell'istanza

Il modello dell'istanza

$$
\begin{aligned}
\min\ & 5x_{11} + 10x_{12} + 2x_{13} + 5x_{21} + 4x_{22} + 6x_{23} + 5x_{31} + 4x_{32} + 6x_{33} \\
\text{soggetto a}\ & x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1 \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1 \\
& 2x_{11} + 3x_{21} + 4x_{31} \leq 5 \\
& x_{12} + 4x_{22} + 5x_{32} \leq 6 \\
& 3x_{13} + 2x_{23} + 3x_{33} \leq 7 \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33} \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

Euristica costruttiva: il bound primale

- Tre euristiche ispirate al bin packing, tutte in tempo lineare nel numero di coppie lavoro–macchina
- **Next-fit**: si carica una macchina alla volta e si passa alla successiva quando un lavoro non ci sta più
- **First-fit**: ogni lavoro va sulla prima macchina con disponibilità residua sufficiente
- **Best-fit**: fra le macchine con disponibilità sufficiente si sceglie quella di costo minimo — la più naturale qui, perché l'obiettivo è un costo

Esecuzione sull'istanza (1/2)

- **Passo 1.** Lavoro 1: disponibilità residue $ra = (5, 6, 7)$; tutte le macchine bastano; costi $5, 10, 2$: il minimo è la macchina 3, quindi $x[1][3] = 1$ e $ra[3] = 7 - 3 = 4$
- **Passo 2.** Lavoro 2: $ra = (5, 6, 4)$; tutte bastano; costi $5, 4, 6$: il minimo è la macchina 2, quindi $x[2][2] = 1$ e $ra[2] = 6 - 4 = 2$
- **Passo 3.** Lavoro 3: $ra = (5, 2, 4)$; la macchina 2 non basta $(5 > 2)$; fra le altre, costi 5 e 6: il minimo è la macchina 1, quindi $x[3][1] = 1$

Esecuzione sull'istanza (2/2)

La soluzione ammissibile trovata è

$$\bar{x}_{13} = 1, \quad \bar{x}_{22} = 1, \quad \bar{x}_{31} = 1,$$

tutte le altre $\bar{x}_{jm} = 0$, di valore $2 + 4 + 5 = 11$. Quindi

$$z(MILP) \leq UB = 11.$$

- Next-fit e first-fit trovano entrambe $x_{11} = x_{21} = x_{32} = 1$, di valore 14: un bound peggiore

Rilassamento LP e duale

- Il rilassamento LP sostituisce $x_{jm} \in \{0,1\}$ con $x_{jm} \geq 0$ (il vincolo $x_{jm} \leq 1$ è implicato dai vincoli (1))
- Variabile duale libera μ_j per ogni vincolo (1), non positiva π_m per ogni vincolo (2)

Duale del rilassamento LP del modello 7.1

$$\max \quad \sum_{j=1}^{n} \mu_j + \sum_{m=1}^{k} a_m \pi_m \tag{7.3a}$$

$$\text{soggetto a} \quad \mu_j + t_{jm} \pi_m \leq c_{jm}, \quad \forall j \in \{1,2,\ldots,n\}, \ \forall m \in \{1,2,\ldots,k\}, \tag{7.3b}$$

$$\mu_j \gtreqless 0, \qquad \forall j \in \{1,2,\ldots,n\}, \tag{7.3c}$$

$$\pi_m \leq 0, \qquad \forall m \in \{1,2,\ldots,k\}. \tag{7.3d}$$

Descrizione del duale

- μ_j è il valore che si attribuisce al lavoro j, che va assegnato comunque; π_m il prezzo (non positivo) di una unità di capacità della macchina m
- L'obiettivo valuta i lavori e la capacità disponibile
- I vincoli (7.3b) sono le colonne delle x_{jm}: mettere il lavoro j sulla macchina m vale μ_j e consuma t_{jm} di capacità al prezzo π_m; il saldo non può superare il costo c_{jm}
- Le μ_j sono libere (vincoli di uguaglianza), le π_m non positive (vincoli $\leq$ in un minimo)

Il duale dell'istanza

Il modello dell'istanza

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrr}
\max & \mu_1 & +\mu_2 & +\mu_3 & +5\pi_1 & +6\pi_2 & +7\pi_3 & & & & \\
\text{soggetto a} & \mu_1 & & & +2\pi_1 & & & \leq & 5 \\
& \mu_1 & & & & +\pi_2 & & \leq & 10 \\
& \mu_1 & & & & & +3\pi_3 & \leq & 2 \\
& & \mu_2 & & +3\pi_1 & & & \leq & 5 \\
& & \mu_2 & & & +4\pi_2 & & \leq & 4 \\
& & \mu_2 & & & & +2\pi_3 & \leq & 6 \\
& & & \mu_3 & +4\pi_1 & & & \leq & 5 \\
& & & \mu_3 & & +5\pi_2 & & \leq & 4 \\
& & & \mu_3 & & & +3\pi_3 & \leq & 6 \\
& \mu_1, & \mu_2, & \mu_3 & & & & \gtreqless & 0 \\
& & & & \pi_1, & \pi_2, & \pi_3 & \leq & 0
\end{array}
$$

Una soluzione duale a mano

- Con $\bar{\pi}_m = 0$ per ogni macchina, i vincoli (7.3b) diventano $\mu_j \leq c_{jm}$ per ogni m: il valore più grande ammissibile è

$$\bar{\mu}_1 = \min\{5, 10, 2\} = 2, \quad \bar{\mu}_2 = \min\{5, 4, 6\} = 4, \quad \bar{\mu}_3 = 4,$$

  con valore $2 + 4 + 4 + 0 = 10$
- Per la dualità debole

$$LB = 10 \;\leq\; z(LP) \;\leq\; z(MILP) \;\leq\; UB = 11$$

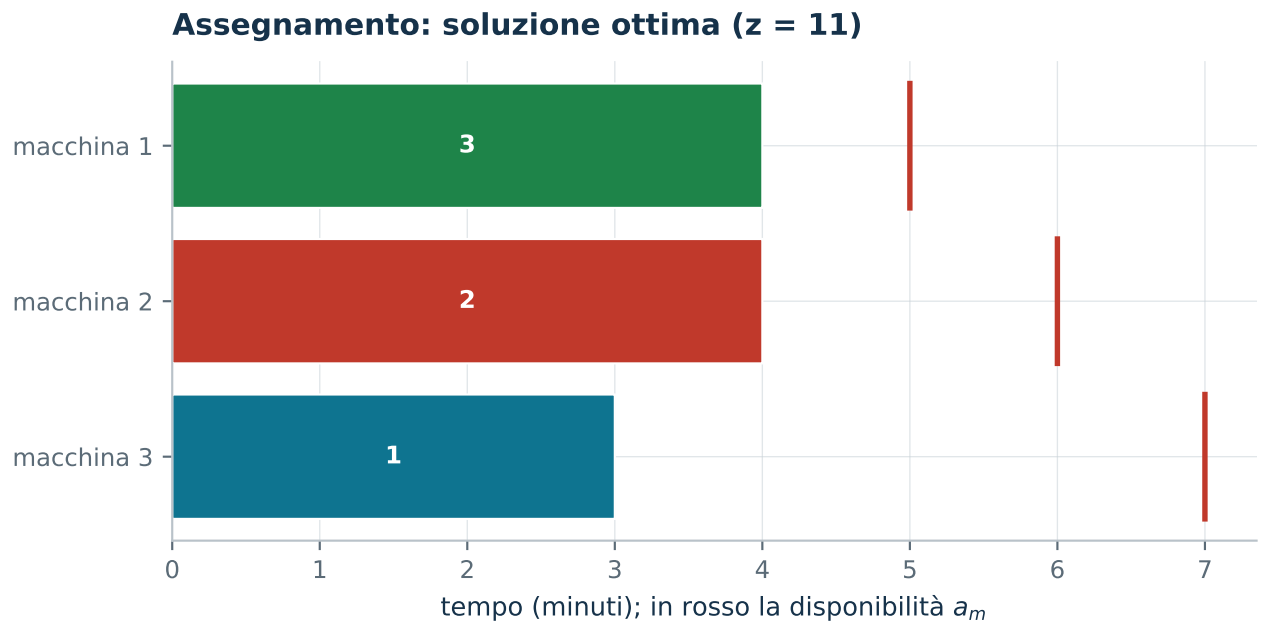
- La ricetta ha un significato: «ogni lavoro costa almeno il suo costo minimo» è un lower bound che chiunque scriverebbe; il duale lo formalizza

Quello che dice il solver (1/2)

- L'ottimo del rilassamento LP è $z(LP) = 53/5 = 10{,}6$, uguale all'ottimo del duale (dualità forte), con $\tilde{\mu} = (2,\ 4{,}8,\ 5)$ e $\tilde{\pi} = (0,\ -0{,}2,\ 0)$: la macchina 2 è la risorsa stretta
- Il MILP ha ottimo $z(MILP) = 11$ con $\tilde{x}_{13} = \tilde{x}_{22} = \tilde{x}_{31} = 1$
- L'euristica best-fit aveva trovato la soluzione ottima, ma solo il solver lo certifica, perché il bound duale a mano si fermava a 10
- Nessun intero fra 10,6 e 11: $\lceil 53/5 \rceil = 11$ chiude il gap — un argomento che vale perché i costi sono interi

Quello che dice il solver (2/2)

UB (best-fit)	LB (duale a mano)	$z(LP)$	$z(MILP)$	gap euristica
11	10	53/5	11	0,0%



Considerazioni aggiuntive

- Le $n\,k$ disuguaglianze $x_{jm} \leq 1$ sono valide per il modello, ma sono implicate dai vincoli (1) e non rafforzano il rilassamento (infatti $z(LP) = z(LP^+)$)
- Se un lavoro j non sta su una macchina m ($t_{jm} > a_m$), la variabile x_{jm} può essere fissata a zero prima di risolvere: il vincolo (2) la forzerebbe comunque, ma il modello è più piccolo e il rilassamento non peggiora

Esercizio: costo fisso per macchina usata

- Ogni macchina che esegue almeno un lavoro costa in più $g_m = 3$ euro di accensione
- Modellare il costo fisso e trovare il nuovo ottimo
- Quale legame del capitolo «Legami fra variabili» entra in gioco?

Il confronto finale (1/2)

I tre numeri che ogni problema del corso produce:

	valore	che cos'è
UB	11	soluzione euristica
LB	10	bound certificato
$z(MILP)$	11	ottimo del MILP

Il confronto finale (2/2)

- Gap dell'euristica rispetto all'ottimo:

$$\frac{|UB - z(MILP)|}{|z(MILP)|} = 0.0\%$$

- Gap certificato: quello che si conosce *prima* di risolvere il MILP, che perciò non può averlo al denominatore
- In assoluto $UB - LB = 1$; in percentuale, rispetto alla soluzione euristica,

$$\frac{UB - LB}{|UB|} = 9.1\%$$

Una variante svolta: i lavori 1 e 3 sulla stessa macchina (1/2)

- I lavori 1 e 3 usano lo stesso utensile e devono essere eseguiti dalla stessa macchina
- È un legame fra due variabili della stessa famiglia: per ogni macchina m, $x_{1m} = 1$ se e solo se $x_{3m} = 1$, cioè

$$x_{1m} = x_{3m}, \qquad \forall m \in \{1, 2, \ldots, k\}$$

(k vincoli lineari)

- Entrambi i versi sono imposti dal vincolo; i vincoli di assegnamento garantiscono poi che la macchina comune sia una sola

Una variante svolta: i lavori 1 e 3 sulla stessa macchina (2/2)

- La coppia deve stare dove $t_{1m} + t_{3m} \leq a_m$: sulla macchina 1 no ($2+4>5$), sulla 2 sì (costo $10+4$), sulla 3 sì (costo $2+6$)
- Con il lavoro 2 sulla macchina 2 (costo 4), il nuovo ottimo è $2+6+4=12$

	valore	che cos'è
UB	12	soluzione euristica
LB	12	certificato duale a mano
$z(MILP)$	12	ottimo del MILP

I due bound si toccano: il problema si chiude senza il solver.

Riepilogo: Assegnamento a costo minimo

- Una sola famiglia di variabili binarie x_{jm}: nessun legame da dimostrare
- Vincoli di assegnamento $(= 1)$ e vincoli di capacità $(\leq a_m)$, uno zaino per macchina
- Euristica best-fit a costo minimo: $UB = 11$; duale a mano con $\pi = 0$: $LB = 10$
- $z(LP) = 53/5$, $z(MILP) = 11$: l'euristica era già ottima, ma solo il solver lo certifica

Macchine con costo fisso

Introduzione: Macchine con costo fisso

- Rispetto al problema 7.1 il costo non sta più sugli assegnamenti, ma sulle **macchine accese**
- Servono variabili di **attivazione**: una binaria per macchina, che dice se la macchina viene usata
- Vedremo il legame di attivazione nella sua forma **aggregata**, e la differenza fra un verso imposto dai vincoli e un verso imposto dall'ottimalità

Problema 7.2: macchine con costo fisso (1/2)

- Un'azienda deve eseguire $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ lavori e dispone di $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ macchine
- Per ogni lavoro j e ogni macchina m, il valore $t_{jm} \in \mathbb{Q}_{>0}$ è il tempo di lavorazione in minuti del lavoro j sulla macchina m
- Per ogni macchina m, il valore $a_m \in \mathbb{Q}_{>0}$ è la disponibilità in minuti e il valore $c_m \in \mathbb{Q}_{>0}$ è il costo in euro se la macchina viene usata

Problema 7.2: macchine con costo fisso (2/2)

- Ogni macchina esegue un lavoro alla volta
- L'azienda vuole assegnare tutti i lavori alle macchine **minimizzando il costo delle macchine usate**

Il problema a parole

- **Decidiamo** quali macchine accendere e su quale macchina eseguire ciascun lavoro
- **L'obiettivo**: costo totale delle macchine accese
- **I vincoli**: ogni lavoro su esattamente una macchina; una macchina spenta non esegue lavori; una macchina accesa non supera la sua disponibilità
- Rispetto al problema 7.1 il costo si sposta dagli assegnamenti alle macchine: servono variabili di **attivazione**

Dati (input del modello)

Simbolo	Tipo	Significato
n	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero di lavori, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$
k	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero di macchine, $m \in \{1, 2, \ldots, k\}$
t_{jm}	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	tempo di lavorazione del lavoro j sulla macchina m
a_m	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	disponibilità della macchina m
c_m	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	costo fisso se la macchina m è usata

Variabili decisionali

Introduciamo le seguenti $n\,k + k$ variabili binarie:

$$\begin{cases} x_{jm} = 1 \text{ se il lavoro } j \text{ è eseguito dalla macchina } m,\ 0 \text{ altrimenti,} \\ y_m = 1 \text{ se la macchina } m \text{ è usata},\ 0 \text{ altrimenti,} \end{cases}$$

$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \forall m \in \{1, 2, \ldots, k\}.$$

Il modello

Modello 7.2 — macchine con costo fisso

$$\min \quad \sum_{m=1}^{k} c_m\, y_m \tag{7.4a}$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{m=1}^{k} x_{jm} = 1, \qquad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{7.4b}$$

$$-\sum_{j=1}^{n} t_{jm}\, x_{jm} + a_m\, y_m \geq 0, \qquad \forall m \in \{1, 2, \ldots, k\}, \tag{7.4c}$$

$$x_{jm} \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \ \forall m \in \{1, 2, \ldots, k\}, \tag{7.4d}$$

$$y_m \in \{0, 1\}, \qquad \forall m \in \{1, 2, \ldots, k\}. \tag{7.4e}$$

Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli

- La funzione obiettivo minimizza il costo totale delle macchine usate
- I vincoli (7.4b) assicurano che ogni lavoro sia assegnato a esattamente una macchina (n vincoli)
- I vincoli (7.4c) collegano le variabili di assegnamento con quelle di utilizzo e impongono le restrizioni di capacità: se almeno un lavoro è assegnato, la macchina è usata; a una macchina non usata non è assegnato alcun lavoro; una macchina usata non supera la disponibilità (k vincoli)
- Gli ultimi vincoli definiscono le variabili del modello

Il legame fra le variabili (1/3)

- Per ogni macchina m, se il tempo complessivo dei lavori assegnati è positivo, allora la macchina deve essere usata:

$$\sum_{j=1}^{n} t_{jm} x_{jm} > 0 \implies y_m = 1$$

- Per contronominale:

$$y_m = 0 \implies \sum_{j=1}^{n} t_{jm} x_{jm} = 0$$

cioè, poiché $t_{jm} > 0$, nessun lavoro può essere assegnato a una macchina non usata

Il legame fra le variabili (2/3)

Questo verso è imposto dai vincoli (7.4c), che danno $\sum_j t_{jm} x_{jm} \leq a_m y_m$:

- se $\sum_j t_{jm} x_{jm} > 0$, allora $a_m y_m > 0$, dunque $y_m > 0$ e, essendo binaria, $y_m = 1$
- se $y_m = 0$, il vincolo dà $\sum_j t_{jm} x_{jm} \leq 0$ e, poiché $t_{jm} > 0$ e $x_{jm} \geq 0$, questo forza $x_{jm} = 0$ per ogni j

Il legame fra le variabili (3/3)

- Il verso opposto

$$y_m = 1 \implies \sum_{j=1}^{n} t_{jm} x_{jm} > 0$$

  dice che una macchina usata ha almeno un lavoro

- *Non* è imposto dai vincoli: $y_m = 1$ senza lavori è ammissibile
- Segue dall'obiettivo in ogni ottimo: poiché $c_m > 0$, porre $y_m = 0$ mantiene i vincoli (il vincolo (7.4c) diventa $0 \geq 0$) e riduce l'obiettivo di $c_m > 0$
- Quindi in ogni soluzione ottima una macchina senza lavori non è usata

Il modello in gurobipy

```
m = gp.Model("costo_fisso")
x = m.addVars(n, k, vtype=GRB.BINARY, name="x")
y = m.addVars(k, vtype=GRB.BINARY, name="y")
m.setObjective(gp.quicksum(c[mm] * y[mm]
    for mm in range(k)), GRB.MINIMIZE)
m.addConstrs((x.sum(j, "*") == 1 for j in range(n)),
             name="assegna")
m.addConstrs((-gp.quicksum(t[j][mm] * x[j, mm]
    for j in range(n)) + a[mm] * y[mm] >= 0
    for mm in range(k)), name="link")
m.optimize()
```

L'istanza

$n = 3$ lavori, $k = 3$ macchine:

t_{jm}	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
$j = 1$	6	5	3
$j = 2$	5	10	2
$j = 3$	20	13	10

	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
c_m	8	7	5
a_m	25	20	12

Il modello dell'istanza

Modello 7.2 sull'istanza

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & & & & & & & & & & & & 8y_1 & +7y_2 & +5y_3 & & \\
\text{soggetto a} \quad & x_{11} & +x_{12} & +x_{13} & & & & & & & & & & & & = & 1 \\
& & & & x_{21} & +x_{22} & +x_{23} & & & & & & & & & = & 1 \\
& & & & & & & x_{31} & +x_{32} & +x_{33} & & & & & & = & 1 \\
& -6x_{11} & & & -5x_{21} & & & -20x_{31} & & & +25y_1 & & & & \geq & 0 \\
& & -5x_{12} & & & -10x_{22} & & & -13x_{32} & & & +20y_2 & & & \geq & 0 \\
& & & -3x_{13} & & & -2x_{23} & & & -10x_{33} & & & +12y_3 & & \geq & 0 \\
& x_{11}, & x_{12}, & x_{13}, & x_{21}, & x_{22}, & x_{23}, & x_{31}, & x_{32}, & x_{33} & & & & & & \in & \{0,1\} \\
& & & & & & & & & & y_1, & y_2, & y_3 & & & \in & \{0,1\}
\end{aligned}
$$

Euristica costruttiva: il bound primale

- Le stesse tre famiglie del problema 7.1, con il criterio del best-fit che diventa il **tempo minimo**
- Non ci sono costi di assegnamento: conviene consumare poca disponibilità
- È un'euristica costruttiva: si costruisce una sola soluzione, un elemento per volta, senza mai tornare indietro

Esecuzione sull'istanza (1/2)

- **Passo 1.** Lavoro 1: $ra = (25, 20, 12)$; tempi $6, 5, 3$, tutti ammissibili; minimo sulla macchina 3: $x[1][3] = 1$, $ra[3] = 12 - 3 = 9$
- **Passo 2.** Lavoro 2: $ra = (25, 20, 9)$; tempi $5, 10, 2$; minimo sulla macchina 3: $x[2][3] = 1$, $ra[3] = 9 - 2 = 7$
- **Passo 3.** Lavoro 3: $ra = (25, 20, 7)$; la macchina 3 non basta $(10 > 7)$; fra 20 e 13 il minimo è la macchina 2: $x[3][2] = 1$, $ra[2] = 20 - 13 = 7$

Esecuzione sull'istanza (2/2)

Le macchine usate sono la 2 e la 3:

$$\bar{y} = (0, 1, 1), \qquad \text{valore } 7 + 5 = 12, \qquad z(MILP) \leq UB = 12.$$

- Next-fit e first-fit usano le macchine 1 e 2 (valore 15)
- Anche le varianti «prima le macchine già aperte» danno 15
- Il best-fit a tempo minimo è l'unica delle cinque a trovare 12

Rilassamento LP e duale

- Rilassiamo in $x_{jm} \geq 0$ e $y_m \geq 0$; duale libera μ_j per i vincoli (1), non negativa π_m per i vincoli (2) (verso $\geq$ in un minimo)

Duale del rilassamento LP del modello 7.2

$$\max \sum_{j=1}^{n} \mu_j \tag{7.5a}$$

$$\text{soggetto a} \quad \mu_j - t_{jm}\,\pi_m \leq 0, \quad \forall j \in \{1,2,\ldots,n\},\ \forall m \in \{1,2,\ldots,k\}, \tag{7.5b}$$

$$a_m\,\pi_m \leq c_m, \quad \forall m \in \{1,2,\ldots,k\}, \tag{7.5c}$$

$$\mu_j \gtreqless 0, \quad \forall j \in \{1,2,\ldots,n\}, \tag{7.5d}$$

$$\pi_m \geq 0, \quad \forall m \in \{1,2,\ldots,k\}. \tag{7.5e}$$

Descrizione del duale

- μ_j è il valore del lavoro j, π_m il prezzo di una unità di capacità della macchina m
- L'obiettivo valuta i soli lavori: la capacità, di per sé, non si paga
- I vincoli (7.5b) sono le colonne delle x_{jm}: assegnare il lavoro j alla macchina m incassa μ_j e consuma t_{jm} di capacità al prezzo π_m; il saldo non può essere positivo, perché le x_{jm} non compaiono nell'obiettivo primale
- I vincoli (7.5c) sono le colonne delle y_m: tutta la capacità a_m messa a disposizione, valutata a π_m, non può valere più del costo fisso c_m

Il duale dell'istanza

Il modello dell'istanza

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr}
\max & \mu_1 & +\mu_2 & +\mu_3 & & & & & \\
\text{soggetto a} & \mu_1 & & & -6\pi_1 & & & \leq 0 \\
& \mu_1 & & & & -5\pi_2 & & \leq 0 \\
& \mu_1 & & & & & -3\pi_3 & \leq 0 \\
& & \mu_2 & & -5\pi_1 & & & \leq 0 \\
& & \mu_2 & & & -10\pi_2 & & \leq 0 \\
& & \mu_2 & & & & -2\pi_3 & \leq 0 \\
& & & \mu_3 & -20\pi_1 & & & \leq 0 \\
& & & \mu_3 & & -13\pi_2 & & \leq 0 \\
& & & \mu_3 & & & -10\pi_3 & \leq 0 \\
& & & & 25\pi_1 & & & \leq 8 \\
& & & & & 20\pi_2 & & \leq 7 \\
& & & & & & 12\pi_3 & \leq 5 \\
& \mu_1, & \mu_2, & \mu_3 & & & & \gtreqless 0 \\
& & & & \pi_1, & \pi_2, & \pi_3 & \geq 0
\end{array}
$$

Una soluzione duale a mano (1/2)

- I vincoli (7.5c) dicono quanto può valere al più ogni π_m: prendiamo il massimo, $\bar{\pi}_m = c_m/a_m$ (il costo per minuto di ogni macchina)

$$\bar{\pi}_1 = \frac{8}{25}, \qquad \bar{\pi}_2 = \frac{7}{20}, \qquad \bar{\pi}_3 = \frac{5}{12}$$

- I vincoli (7.5b) danno allora $\mu_j \leq t_{jm}\bar{\pi}_m$ per ogni m, e il massimo ammissibile è

$$\bar{\mu}_1 = \min\left\{\frac{48}{25}, \frac{7}{4}, \frac{5}{4}\right\} = \frac{5}{4}, \qquad \bar{\mu}_2 = \min\left\{\frac{8}{5}, \frac{7}{2}, \frac{5}{6}\right\} = \frac{5}{6},$$
$$\bar{\mu}_3 = \min\left\{\frac{32}{5}, \frac{91}{20}, \frac{25}{6}\right\} = \frac{25}{6}$$

Una soluzione duale a mano (2/2)

- Il valore di questa soluzione duale ammissibile è

$$\frac{5}{4} + \frac{5}{6} + \frac{25}{6} = \frac{25}{4}$$

- Per la dualità debole

$$LB = \frac{25}{4} \leq z(MILP) \leq UB = 12$$

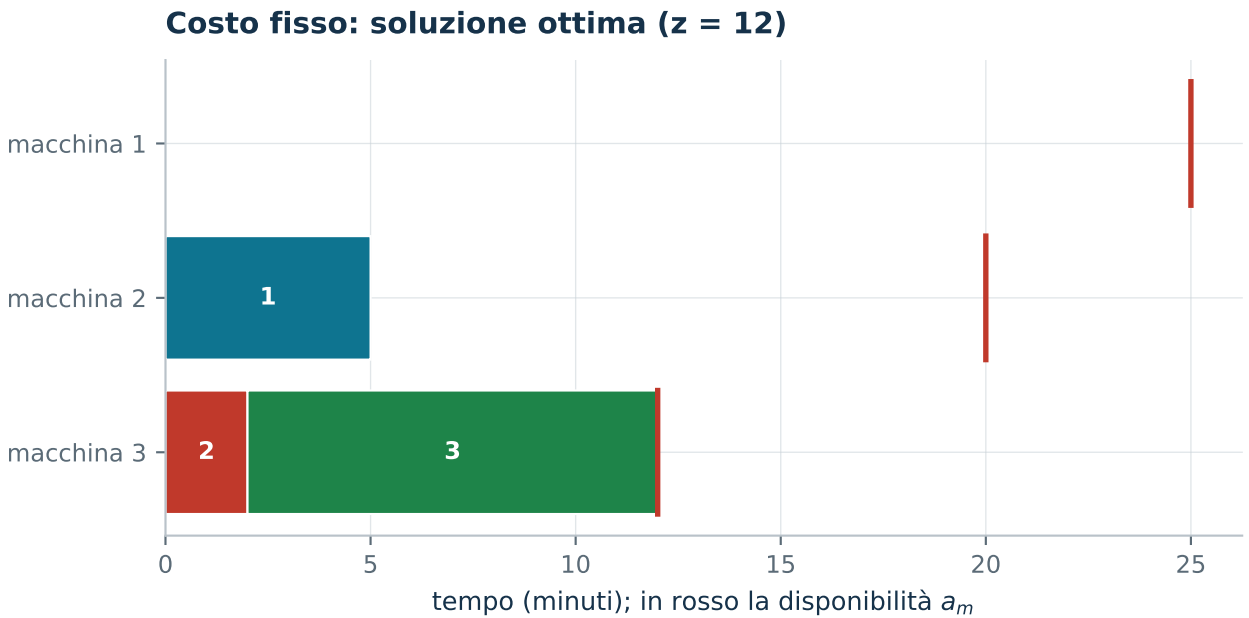
- La lettura: ogni lavoro «paga» almeno il costo per minuto della macchina più economica per lui, moltiplicato per il suo tempo
- È un bound debole: il costo fisso si paga per intero appena si usa la macchina, ma il rilassamento lo spalma sui minuti

Quello che dice il solver (1/2)

- L'ottimo del rilassamento senza i bound è proprio $z(LP) = 25/4$: la soluzione costruita a mano è ottima per il duale
- Con i bound $y_m \leq 1$ e $x_{jm} \leq 1$ si ottiene $z(LP^+) = 1273/200 = 6{,}365$; aggiungendo i vincoli disaggregati $x_{jm} \leq y_m$ si sale a $440/67 = 6{,}567$
- L'ottimo intero è $z(MILP) = 12$, con le macchine 2 e 3 accese e $\tilde{x}_{12} = \tilde{x}_{23} = \tilde{x}_{33} = 1$
- Il gap fra 6,25 e 12 misura quanto è lontano il rilassamento dall'intero: i costi fissi «frazionati» ingannano l'LP

Quello che dice il solver (2/2)

UB (best-fit)	LB (duale a mano)	$z(LP)$	$z(LP^+)$	$z(MILP)$
12	25/4	25/4	1273/200	12



Considerazioni aggiuntive: la forma disaggregata (1/2)

- Le disuguaglianze $y_m \leq 1$ (k) e $x_{jm} \leq 1$ $(n\,k)$ sono valide; le seconde sono implicate dai vincoli (1), le prime no: infatti rafforzano il rilassamento (6,25 $\rightarrow$ 6,365)
- «Se almeno un lavoro è assegnato a m allora m è usata» è l'implicazione booleana

$$(x_{1m} \quad \texttt{OR} \quad x_{2m} \quad \texttt{OR} \quad \cdots \quad \texttt{OR} \quad x_{nm}) \Longrightarrow y_m$$

la cui contronominale è

$$\texttt{NOT}\ y_m \Longrightarrow (\texttt{NOT}\ x_{1m} \quad \texttt{AND} \quad \cdots \quad \texttt{AND} \quad \texttt{NOT}\ x_{nm})$$

Considerazioni aggiuntive: la forma disaggregata (2/2)

- Con De Morgan e la distributività si ottiene la CNF

$$(\texttt{NOT}\ x_{1m}\ \ \texttt{OR}\ \ y_m)\ \ \texttt{AND}\ \ \cdots\ \ \texttt{AND}\ \ (\texttt{NOT}\ x_{nm}\ \ \texttt{OR}\ \ y_m)$$

  cioè i vincoli $1 - x_{jm} + y_m \geq 1$:

$$x_{jm} \leq y_m, \qquad \forall j,\ \forall m$$

  ($n\,k$ disuguaglianze valide, la forma **disaggregata** del legame)

- Il modello le implica, ma il rilassamento no: aggiunte, portano $z(LP^+)$ a $440/67$ — stesso insieme di soluzioni intere, rilassamento più stretto

Considerazioni aggiuntive: il verso opposto

- «Se nessun lavoro è assegnato allora la macchina non è usata» è la clausola

$$\texttt{NOT } y_m \quad \texttt{OR} \quad x_{1m} \quad \texttt{OR} \quad \cdots \quad \texttt{OR} \quad x_{nm}$$

cioè

$$\sum_{j=1}^{n} x_{jm} \geq y_m, \qquad \forall m \in \{1, 2, \ldots, k\}$$

- Non è una disuguaglianza valida (il modello ammette $y_m = 1$ senza lavori), ma si può aggiungere senza perdere l'ottimo, perché $c_m > 0$

Esercizio: utilizzo minimo di una macchina accesa

- Accendere una macchina per pochi minuti non ha senso: ogni macchina usata deve lavorare almeno $\ell = 8$ minuti
- Modellare il vincolo
- Trovare il nuovo ottimo per l'istanza

Il confronto finale (1/2)

I tre numeri che ogni problema del corso produce:

	valore	che cos'è
UB	12	soluzione euristica
LB	$\frac{25}{4}$	bound certificato
$z(MILP)$	12	ottimo del MILP

Il confronto finale (2/2)

- Gap dell'euristica rispetto all'ottimo:

$$\frac{|UB - z(MILP)|}{|z(MILP)|} = 0.0\%$$

- Gap certificato: quello che si conosce *prima* di risolvere il MILP
- In assoluto $UB - LB = \frac{23}{4}$; in percentuale, rispetto alla soluzione euristica,

$$\frac{UB - LB}{|UB|} = 47.9\%$$

Una variante svolta: legame fra due attivazioni (1/2)

- La macchina 3 condivide l'alimentazione con la macchina 1: se si usa la macchina 1 si deve usare anche la 3
- È un'implicazione fra due binarie, $y_1 \implies y_3$, cioè `NOT` y_1 `OR` y_3, già in CNF:

$$1 - y_1 + y_3 \geq 1 \quad \iff \quad y_1 \leq y_3$$

- Impone che $y_1 = 1$ forzi $y_3 = 1$ e, per contronominale, che $y_3 = 0$ forzi $y_1 = 0$; non impone il viceversa

Una variante svolta: legame fra due attivazioni (2/2)

- Sull'istanza il vincolo non cambia l'ottimo, 12, perché la soluzione ottima non usa la macchina 1
- Un legame fra *attivazioni* non tocca il rilassamento, che può accendere mezza macchina: a crescere è l'ottimo intero

	valore	che cos'è
UB	12	soluzione euristica
LB	$\frac{25}{4}$	certificato duale a mano
$z(LP)$	$\frac{25}{4}$	rilassamento senza i bound
$z(LP^+)$	$\frac{1273}{200}$	rilassamento con i bound
$z(MILP)$	12	ottimo del MILP

Riepilogo: Macchine con costo fisso

- Variabili di assegnamento x_{jm} e variabili di **attivazione** y_m
- $a_m y_m \geq \sum_j t_{jm} x_{jm}$: un solo vincolo fa da **attivazione aggregata** e da **capacità**
- Il verso «macchina accesa $\Rightarrow$ usata» segue dall'ottimalità, perché $c_m > 0$
- La forma disaggregata $x_{jm} \leq y_m$ non cambia le soluzioni intere ma stringe il rilassamento
- Bound: $LB = 25/4$ (duale a mano), $UB = 12$ (euristica), $z(MILP) = 12$

Selezione di lavori

Introduzione: Selezione di lavori

- È il problema 7.2 in cui i lavori non sono più obbligatori e hanno un **ricavo**
- Diventa un problema di **massimo**: i ruoli dei bound si scambiano, l'euristica dà un *lower* bound e il duale un *upper* bound
- Il legame di attivazione è lo stesso, ma l'argomento di ottimalità cambia segno: vedremo che la struttura della dimostrazione non cambia

Problema 7.3: selezione di lavori (1/2)

- Un'azienda può eseguire $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ lavori e dispone di $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ macchine
- Per ogni lavoro j, il valore $t_j \in \mathbb{Q}_{>0}$ è il tempo di lavorazione in minuti (uguale su tutte le macchine) e il valore $r_j \in \mathbb{Q}_{>0}$ è il ricavo in euro se il lavoro viene eseguito
- Per ogni macchina m, il valore $a_m \in \mathbb{Q}_{>0}$ è la disponibilità in minuti e il valore $c_m \in \mathbb{Q}_{>0}$ è il costo in euro se la macchina viene usata

Problema 7.3: selezione di lavori (2/2)

- Ogni macchina esegue un lavoro alla volta
- L'azienda vuole scegliere quali lavori eseguire, e su quali macchine, per **massimizzare il profitto**: ricavi dei lavori eseguiti meno costi delle macchine usate

Il problema a parole

- **Decidiamo** quali lavori eseguire, su quali macchine, e quali macchine accendere
- **L'obiettivo**: profitto massimo
- **I vincoli**: ogni lavoro al più su una macchina; nessun lavoro su una macchina spenta; disponibilità rispettata
- È il problema 7.2 con lavori non obbligatori e con un ricavo: un problema di **massimo**

Dati (input del modello)

Simbolo	Tipo	Significato
n	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero di lavori, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$
k	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero di macchine, $m \in \{1, 2, \ldots, k\}$
t_j	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	tempo di lavorazione del lavoro j
r_j	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	ricavo se il lavoro j è eseguito
a_m	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	disponibilità della macchina m
c_m	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	costo fisso se la macchina m è usata

Variabili decisionali

Introduciamo le seguenti $n\,k + k$ variabili binarie:

$$\begin{cases} x_{jm} = 1 \text{ se il lavoro } j \text{ è eseguito dalla macchina } m,\ 0 \text{ altrimenti,} \\ y_m = 1 \text{ se la macchina } m \text{ è usata},\ 0 \text{ altrimenti,} \end{cases}$$

$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \forall m \in \{1, 2, \ldots, k\}.$$

Il modello

Modello 7.3 — selezione di lavori

$$\max \quad \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=1}^{k} r_j \, x_{jm} - \sum_{m=1}^{k} c_m \, y_m \tag{7.6a}$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{m=1}^{k} x_{jm} \leq 1, \qquad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{7.6b}$$

$$\sum_{j=1}^{n} t_j \, x_{jm} - a_m \, y_m \leq 0, \qquad \forall m \in \{1, 2, \ldots, k\}, \tag{7.6c}$$

$$x_{jm} \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \ \forall m \in \{1, 2, \ldots, k\}, \tag{7.6d}$$

$$y_m \in \{0, 1\}, \qquad \forall m \in \{1, 2, \ldots, k\}. \tag{7.6e}$$

Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli

- La funzione obiettivo massimizza il profitto totale, differenza fra il ricavo dei lavori eseguiti e il costo delle macchine usate
- I vincoli (1) assicurano che ogni lavoro sia assegnato ad *al più* una macchina, così che nessun lavoro venga eseguito due volte (n vincoli)
- I vincoli (2) collegano assegnamenti e utilizzo e impongono le capacità, esattamente come nel problema 7.2 (k vincoli)
- Gli ultimi vincoli definiscono le variabili del modello

Il legame fra le variabili (1/2)

È il legame del problema 7.2, con t_j al posto di t_{jm}.

- L'implicazione

$$\sum_{j=1}^{n} t_j x_{jm} > 0 \Longrightarrow y_m = 1$$

  dice che una macchina non usata non ha lavori

- È imposta dai vincoli (2): se $\sum_j t_j x_{jm} > 0$ allora $a_m y_m > 0$, quindi $y_m = 1$; viceversa, se $y_m = 0$ allora $\sum_j t_j x_{jm} \leq 0$ e, con $t_j > 0$, tutte le x_{jm} sono nulle

Il legame fra le variabili (2/2)

- L'implicazione opposta

$$y_m = 1 \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} t_j x_{jm} > 0$$

  dice che una macchina usata ha almeno un lavoro

- Non è imposta dai vincoli e segue dall'obiettivo in ogni ottimo: poiché $c_m > 0$, se $y_m = 1$ senza lavori, porre $y_m = 0$ resta ammissibile e **aumenta** il profitto di c_m

- In un problema di massimo il verso del miglioramento si inverte, la struttura dell'argomento no

Il modello in gurobipy

```
m = gp.Model("selezione")
x = m.addVars(n, k, vtype=GRB.BINARY, name="x")
y = m.addVars(k, vtype=GRB.BINARY, name="y")
m.setObjective(gp.quicksum(r[j] * x[j, mm]
    for j in range(n) for mm in range(k))
    - gp.quicksum(c[mm] * y[mm] for mm in range(k)),
    GRB.MAXIMIZE)
m.addConstrs((x.sum(j, "*") <= 1 for j in range(n)),
             name="al_piu_una")
m.addConstrs((gp.quicksum(t[j] * x[j, mm]
    for j in range(n)) - a[mm] * y[mm] <= 0
    for mm in range(k)), name="link")
```

L'istanza

$n = 3$ lavori, $k = 3$ macchine:

	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
a_m	105	110	100
c_m	20	30	15

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
t_j	25	40	75
r_j	10	15	30

Il modello dell'istanza

Modello 7.3 sull'istanza

$$
\begin{aligned}
\max\ & 10x_{11}+10x_{12}+10x_{13}+15x_{21}+15x_{22}+15x_{23}+30x_{31}+30x_{32}+30x_{33}-20y_1-30y_2-15y_3 \\
\text{soggetto a}\ & x_{11}+x_{12}+x_{13} \le 1 \\
& x_{21}+x_{22}+x_{23} \le 1 \\
& x_{31}+x_{32}+x_{33} \le 1 \\
& 25x_{11}+40x_{21}+75x_{31}-105y_1 \le 0 \\
& 25x_{12}+40x_{22}+75x_{32}-110y_2 \le 0 \\
& 25x_{13}+40x_{23}+75x_{33}-100y_3 \le 0 \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33} \in \{0,1\} \\
& y_1, y_2, y_3 \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

Euristica costruttiva: il bound primale

- In un problema di massimo una soluzione ammissibile dà un **lower** bound
- Le tre euristiche del problema 7.1 si adattano con una regola in più: un lavoro che non sta su nessuna macchina viene *saltato* (non è obbligatorio)
- Il best-fit sceglie la macchina **più piena** fra quelle che bastano (minima disponibilità residua), per concentrare i lavori su poche macchine

Esecuzione sull'istanza (1/2)

- **Passo 1.** Lavoro 1 ($t_1 = 25$): $ra = (105, 110, 100)$, tutte bastano; la più piena è la macchina 3: $x[1][3] = 1$, $ra[3] = 75$
- **Passo 2.** Lavoro 2 ($t_2 = 40$): $ra = (105, 110, 75)$; la più piena è ancora la 3: $x[2][3] = 1$, $ra[3] = 35$
- **Passo 3.** Lavoro 3 ($t_3 = 75$): $ra = (105, 110, 35)$; la macchina 3 non basta; fra 1 e 2 la più piena è la 1: $x[3][1] = 1$, $ra[1] = 30$

Esecuzione sull'istanza (2/2)

Soluzione $\bar{x}_{13} = \bar{x}_{23} = \bar{x}_{31} = 1$, $\bar{y} = (1, 0, 1)$, profitto

$$10 + 15 + 30 - 20 - 15 = 20, \qquad z(MILP) \geq LB = 20.$$

- Next-fit e first-fit riempiono prima la macchina 1 (lavori 1 e 2) e mettono il lavoro 3 sulla 2: profitto $55 - 50 = 5$

Rilassamento LP e duale

- Rilassando $x_{jm} \geq 0$ e $y_m \geq 0$, con duali non negative μ_j per i vincoli (1) e π_m per i vincoli (2) (versi $\leq$ in un massimo)

Duale del rilassamento LP del modello 7.3

$$\min \sum_{j=1}^{n} \mu_j \tag{7.7a}$$

$$\text{soggetto a} \quad \mu_j + t_j \pi_m \geq r_j, \qquad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \ \forall m \in \{1, 2, \ldots, k\}, \tag{7.7b}$$

$$-a_m \pi_m \geq -c_m, \qquad \forall m \in \{1, 2, \ldots, k\}, \tag{7.7c}$$

$$\mu_j \geq 0, \qquad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{7.7d}$$

$$\pi_m \geq 0, \qquad \forall m \in \{1, 2, \ldots, k\}. \tag{7.7e}$$

Descrizione del duale

- μ_j è il prezzo del diritto di eseguire il lavoro j, π_m quello di una unità di capacità della macchina m
- L'obiettivo somma i prezzi dei diritti sui lavori
- I vincoli (7.7b) sono le colonne delle x_{jm}: eseguire il lavoro j sulla macchina m consuma il diritto, al prezzo μ_j, e t_j di capacità, al prezzo π_m; i due insieme devono coprire il ricavo r_j
- I vincoli (7.7c) sono le colonne delle y_m: la capacità a_m resa disponibile, valutata a π_m, non può costare più del costo fisso c_m

Il duale dell'istanza

Il modello dell'istanza

$$
\begin{array}{rlllllll}
\min & \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 & & & & & & \\
\text{soggetto a} & \mu_1 & & +25\pi_1 & & & \geq & 10 \\
& \mu_1 & & & +25\pi_2 & & \geq & 10 \\
& \mu_1 & & & & +25\pi_3 & \geq & 10 \\
& & \mu_2 & +40\pi_1 & & & \geq & 15 \\
& & \mu_2 & & +40\pi_2 & & \geq & 15 \\
& & \mu_2 & & & +40\pi_3 & \geq & 15 \\
& & & \mu_3 \quad +75\pi_1 & & & \geq & 30 \\
& & & \mu_3 & +75\pi_2 & & \geq & 30 \\
& & & \mu_3 & & +75\pi_3 & \geq & 30 \\
& & & -105\pi_1 & & & \geq & -20 \\
& & & & -110\pi_2 & & \geq & -30 \\
& & & & & -100\pi_3 & \geq & -15 \\
& \mu_1, \quad \mu_2, & \quad \mu_3 & & & & \geq & 0 \\
& & & \pi_1, & \quad \pi_2, & \quad \pi_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Una soluzione duale a mano (1/2)

- I vincoli (7.7c) limitano ogni π_m dall'alto: $\bar{\pi}_m = c_m/a_m$, cioè

$$\bar{\pi}_1 = \tfrac{4}{21}, \qquad \bar{\pi}_2 = \tfrac{3}{11}, \qquad \bar{\pi}_3 = \tfrac{3}{20}$$

- Ogni μ_j deve soddisfare $\mu_j \geq r_j - t_j\bar{\pi}_m$ per ogni m e $\mu_j \geq 0$: il più piccolo valore ammissibile è il massimo di questi

$$\bar{\mu}_1 = \max\left\{\tfrac{110}{21}, \tfrac{35}{11}, \tfrac{25}{4}, 0\right\} = \tfrac{25}{4},$$

$$\bar{\mu}_2 = \max\left\{\tfrac{155}{21}, \tfrac{45}{11}, 9, 0\right\} = 9,$$

$$\bar{\mu}_3 = \max\left\{\tfrac{110}{7}, \tfrac{105}{11}, \tfrac{75}{4}, 0\right\} = \tfrac{75}{4}$$

Una soluzione duale a mano (2/2)

- Il valore è $\frac{25}{4} + 9 + \frac{75}{4} = 34$. Per la dualità debole

$$LB = 20 \leq z(MILP) \leq UB = 34$$

- La lettura: μ_j è «quanto vale al più il lavoro j» una volta pagato, per ogni minuto, il costo fisso spalmato della macchina meno costosa al minuto (la 3, con $\frac{3}{20}$ euro al minuto)

Quello che dice il solver (1/2)

- L'ottimo del rilassamento senza i bound è $z(LP) = 34$: anche qui la soluzione a mano è ottima per il duale
- Con i limiti $x_{jm} \leq 1$ e $y_m \leq 1$ il rilassamento scende a $z(LP^+) = 680/21 = 32{,}38$
- L'ottimo intero è $z(MILP) = 25$: i lavori 1 e 3 sulla macchina 3 ($25 + 75 = 100$, esattamente la disponibilità), profitto $40 - 15$
- Il lavoro 2 non conviene, perché richiederebbe una seconda macchina ($c_1 = 20 > r_2 = 15$)

Quello che dice il solver (2/2)

LB (best-fit)	UB (duale a mano)	$z(LP)$	$z(LP^+)$	$z(MILP)$
20	34	34	680/21	25

- L'euristica si era fermata a 20: aveva messo il lavoro 2 sulla macchina 3 lasciando fuori il 3, che poi ha aperto la macchina 1
- Gap dell'euristica rispetto all'ottimo: 20%

Considerazioni aggiuntive

- $y_m \leq 1$ (k) e $x_{jm} \leq 1$ $(n\,k)$ sono disuguaglianze valide; le seconde sono implicate dai vincoli (1), le prime rafforzano il rilassamento (34 $\rightarrow$ 32,38)
- I vincoli disaggregati $x_{jm} \leq y_m$, dall'implicazione $(x_{1m}$ OR $\cdots$ OR $x_{nm}) \Longrightarrow y_m$ già vista nel problema 7.2, sono validi e implicati dal modello, ma rafforzano il rilassamento
- Se $r_j < \min_m c_m$ e il lavoro j è l'unico su una macchina, eseguirlo non conviene mai: è quanto accade al lavoro 2 nell'istanza

Esercizio: tutti i lavori obbligatori

- L'azienda ha già firmato i contratti: tutti i lavori vanno eseguiti
- Come cambia il modello?
- Quanto costa l'obbligo sull'istanza?

Il confronto finale (1/2)

I tre numeri che ogni problema del corso produce:

	valore	che cos'è
LB	20	soluzione euristica
UB	34	bound certificato
$z(MILP)$	25	ottimo del MILP

In un problema di massimo l'euristica dà il **lower** bound e il duale l'**upper** bound.

Il confronto finale (2/2)

- Gap dell'euristica rispetto all'ottimo:

$$\frac{|LB - z(MILP)|}{|z(MILP)|} = 20.0\%$$

- Gap certificato, noto *prima* di risolvere il MILP: in assoluto $UB - LB = 14$; in percentuale, rispetto alla soluzione euristica,

$$\frac{UB - LB}{|LB|} = 70.0\%$$

Una variante svolta: un lavoro condizionato a un altro (1/2)

- Il lavoro 3 richiede un semilavorato prodotto dal lavoro 2: si può eseguire il lavoro 3 solo se si esegue anche il lavoro 2 (su qualunque macchina)
- L'implicazione «3 $\Rightarrow$ 2» si scrive

$$\sum_{m=1}^{k} x_{3m} \leq \sum_{m=1}^{k} x_{2m}$$

(un vincolo lineare)

- Se il lavoro 3 è eseguito il membro sinistro vale 1 e il vincolo forza il membro destro a 1; il vincolo non impone la converse

Una variante svolta: un lavoro condizionato a un altro (2/2)

- Sull'istanza l'ottimo diventa 20: la soluzione da 25 (lavori 1 e 3 senza il 2) non è più ammissibile

	valore	che cos'è
UB	34	certificato duale a mano
LB	20	soluzione euristica
$z(LP)$	34	rilassamento senza i bound
$z(LP^+)$	$\frac{680}{21}$	rilassamento con i bound
$z(MILP)$	20	ottimo del MILP

Riepilogo: Selezione di lavori

- Lavori non obbligatori ($\sum_m x_{jm} \leq 1$) con ricavo, macchine con costo fisso
- Stesso legame di attivazione del problema 7.2, con l'argomento di ottimalità rovesciato di segno
- In un problema di massimo l'euristica dà LB e il duale dà UB
- Bound: $LB = 20$ (euristica), $UB = 34$ (duale a mano $= z(LP)$), $z(MILP) = 25$

Lavori in parallelo

Introduzione: Lavori in parallelo

- I lavori assegnati alla stessa macchina partono insieme: il tempo di lavorazione della macchina è il **massimo** dei tempi dei suoi lavori
- Un massimo non è lineare, ma si linearizza con una variabile continua e n vincoli «$\geq$» per macchina
- È il pattern della **variabile definita come massimo**: lo dimostreremo in tre passi

Problema 7.4: lavori in parallelo (1/2)

- Un'azienda deve eseguire $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ lavori con $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ macchine
- Per ogni lavoro j e ogni macchina m, il valore $t_{jm} \in \mathbb{Q}_{>0}$ è il tempo di lavorazione in minuti del lavoro j sulla macchina m
- Ogni macchina m può eseguire al più $p_m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ lavori, e li esegue in parallelo: tutti i lavori assegnati alla stessa macchina partono insieme

Problema 7.4: lavori in parallelo (2/2)

- L'azienda vuole assegnare i lavori minimizzando la **somma dei tempi di lavorazione delle macchine**
- Il tempo di lavorazione di una macchina è il tempo del lavoro più lungo fra quelli che le sono assegnati

Il problema a parole

- **Decidiamo** su quale macchina va ogni lavoro
- **L'obiettivo**: somma dei tempi di lavorazione delle macchine, ciascuno pari al *massimo* dei tempi dei lavori assegnati
- **I vincoli**: ogni lavoro a una macchina; al più p_m lavori sulla macchina m
- La novità è l'obiettivo: un massimo non è lineare, ma si linearizza

Dati (input del modello)

Simbolo	Tipo	Significato
n	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero di lavori, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$
k	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero di macchine, $m \in \{1, 2, \ldots, k\}$
t_{jm}	$\in \mathbb{Q}_{>0}$	tempo di lavorazione del lavoro j sulla macchina m
p_m	$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$	numero massimo di lavori (in parallelo) sulla macchina m

Variabili decisionali

Introduciamo le seguenti $n\,k$ variabili binarie e k variabili non negative:

$$\begin{cases} x_{jm} = 1 \text{ se il lavoro } j \text{ è eseguito dalla macchina } m,\ 0 \text{ altrimenti,} \\ y_m = \text{tempo di lavorazione della macchina } m, \end{cases}$$

$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \forall m \in \{1, 2, \ldots, k\}.$$

Il modello

Modello 7.4 — lavori in parallelo

$$\min \quad \sum_{m=1}^{k} y_m \tag{7.8a}$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{m=1}^{k} x_{jm} = 1, \qquad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{7.8b}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{jm} \leq p_m, \qquad \forall m \in \{1, 2, \ldots, k\}, \tag{7.8c}$$

$$-t_{jm}\, x_{jm} + y_m \geq 0, \qquad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \ \forall m \in \{1, 2, \ldots, k\}, \tag{7.8d}$$

$$x_{jm} \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \ \forall m \in \{1, 2, \ldots, k\}, \tag{7.8e}$$

$$y_m \geq 0, \qquad \forall m \in \{1, 2, \ldots, k\}. \tag{7.8f}$$

Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli

- La funzione obiettivo minimizza la somma dei tempi di lavorazione delle macchine
- I vincoli (1) assicurano che ogni lavoro sia assegnato a esattamente una macchina (n vincoli)
- I vincoli (2) limitano il numero di lavori assegnati a ciascuna macchina (k vincoli)
- I vincoli (3) garantiscono che, se il lavoro è assegnato alla macchina, il tempo di lavorazione della macchina è almeno il tempo richiesto da quel lavoro ($n\,k$ vincoli)

Il legame fra le variabili (1/3)

- Per ogni macchina m e ogni lavoro j:

$$x_{jm} = 1 \implies y_m \geq t_{jm},$$

  e per contronominale $y_m < t_{jm} \implies x_{jm} = 0$

- È imposto dai vincoli (3), che danno $y_m \geq t_{jm} x_{jm}$: se $x_{jm} = 1$, allora $y_m \geq t_{jm}$; se $y_m < t_{jm}$, x_{jm} non può valere 1

- Poiché vale per ogni j, la famiglia (3) impone, per ogni macchina,

$$y_m \geq \max\{t_{jm} x_{jm} : j \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$$

Il legame fra le variabili (2/3)

- Viceversa, se nessun lavoro è assegnato alla macchina m, il suo tempo di lavorazione è zero:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{jm} = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_m = 0$$

- Non è imposta dai vincoli: con $x_{jm} = 0$ per ogni j i vincoli (3) si riducono a $y_m \geq 0$
- Segue dall'obiettivo in ogni ottimo: y_m ha coefficiente $1 > 0$; se nessun lavoro è sulla macchina e $y_m > 0$, porre $y_m = 0$ mantiene i vincoli e riduce l'obiettivo di $y_m > 0$

Il legame fra le variabili (3/3)

Sintesi: in ogni soluzione ottima

$$y_m = \max\{t_{jm}x_{jm} : j \in \{1, 2, \ldots, n\}\},$$

cioè y_m è esattamente il tempo di lavorazione della macchina.

- Il primo punto dà $y_m \geq$ massimo in ogni soluzione ammissibile
- Se in una soluzione fosse $y_m >$ massimo, porre y_m uguale al massimo manterrebbe tutti i vincoli (3) e ridurrebbe l'obiettivo della differenza, strettamente positiva: la soluzione non era ottima
- Con nessun lavoro il massimo è 0, e si ritrova il secondo punto

Il modello in gurobipy

```
m = gp.Model("parallelo")
x = m.addVars(n, k, vtype=GRB.BINARY, name="x")
y = m.addVars(k, name="y")
m.setObjective(y.sum(), GRB.MINIMIZE)
m.addConstrs((x.sum(j, "*") == 1 for j in range(n)),
             name="assegna")
m.addConstrs((x.sum("*", mm) <= p[mm] for mm in range(
    k)),
             name="cardinalita")
m.addConstrs((-t[j][mm] * x[j, mm] + y[mm] >= 0
    for j in range(n) for mm in range(k)), name="
        massimo")
m.optimize()
```

L'istanza

$n = 3$ lavori, $k = 3$ macchine, con i tempi del problema 7.2:

t_{jm}	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
$j = 1$	6	5	3
$j = 2$	5	10	2
$j = 3$	20	13	10

	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
p_m	1	2	2

Il modello ha 9 vincoli di massimo, uno per coppia lavoro–macchina, i tre vincoli di assegnamento e le tre cardinalità.

Il modello dell'istanza

Il modello dell'istanza

$$
\begin{array}{lrrr

Euristica costruttiva: il bound primale

- Next-fit sulle cardinalità: si riempie la macchina 1 fino a p_1 lavori, poi la 2, e così via
- Il tempo di ogni macchina è il massimo dei tempi assegnati
- È un'euristica costruttiva: una sola soluzione, un elemento per volta, senza mai tornare indietro

Esecuzione sull'istanza

- **Passo 1.** Lavoro 1 sulla macchina 1 (un lavoro $\leq p_1 = 1$): $y[1] = \max(0, 6) = 6$
- **Passo 2.** La macchina 1 è piena: lavoro 2 sulla macchina 2, $y[2] = \max(0, 10) = 10$
- **Passo 3.** Lavoro 3 sulla macchina 2 (due lavori $\leq p_2 = 2$): $y[2] = \max(10, 13) = 13$

Soluzione $\bar{x}_{11} = \bar{x}_{22} = \bar{x}_{32} = 1$, $\bar{y} = (6, 13, 0)$, valore 19:

$$z(MILP) \leq UB = 19.$$

Rilassamento LP e duale

- Rilassando $x_{jm} \geq 0$, con duali μ_j libere per (1), $\pi_m \leq 0$ per (2) e $\lambda_{jm} \geq 0$ per (3)

Duale del rilassamento LP del modello 7.4

$$\max \quad \sum_{j=1}^{n} \mu_j + \sum_{m=1}^{k} p_m \pi_m \tag{7.9a}$$

$$\text{soggetto a} \quad \mu_j + \pi_m - t_{jm} \lambda_{jm} \leq 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \ \forall m \in \{1, 2, \ldots, k\}, \tag{7.9b}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jm} \leq 1, \qquad \forall m \in \{1, 2, \ldots, k\}, \tag{7.9c}$$

$$\mu_j \gtreqless 0, \qquad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{7.9d}$$

$$\pi_m \leq 0, \qquad \forall m \in \{1, 2, \ldots, k\}, \tag{7.9e}$$

$$\lambda_{jm} \geq 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \ \forall m \in \{1, 2, \ldots, k\}. \tag{7.9f}$$

Descrizione del duale

- μ_j è il valore del lavoro j, π_m il prezzo (non positivo) di uno dei p_m posti della macchina m, λ_{jm} il prezzo del legame che spinge il massimo y_m sopra t_{jm}
- L'obiettivo valuta i lavori e i posti disponibili
- I vincoli (7.9b) sono le colonne delle x_{jm}: mettere il lavoro j sulla macchina m soddisfa l'assegnamento e occupa un posto, ma obbliga il massimo a salire fino a t_{jm}; il saldo non può essere positivo
- I vincoli (7.9c) sono le colonne delle y_m: il massimo costa 1 nell'obiettivo primale, e i prezzi dei legami non possono valere di più

Il duale dell'istanza

Il modello dell'istanza

$$
\begin{array}{rrrr

Una soluzione duale a mano

- Il vincolo (7.9c) è il costo ridotto di y_m: il coefficiente 1 nell'obiettivo primale limita la somma dei λ_{jm}
- Ripartiamo quell'unità in parti uguali, $\bar{\lambda}_{jm} = 1/n = 1/3$, e poniamo $\bar{\pi}_m = 0$; i vincoli (7.9b) diventano $\mu_j \leq t_{jm}/3$ per ogni m:

$$\bar{\mu}_1 = \frac{\min\{6,5,3\}}{3} = 1, \qquad \bar{\mu}_2 = \frac{\min\{5,10,2\}}{3} = \frac{2}{3},$$

$$\bar{\mu}_3 = \frac{\min\{20,13,10\}}{3} = \frac{10}{3}$$

- Valore $1 + \frac{2}{3} + \frac{10}{3} = 5$, quindi $LB = 5 \leq z(MILP) \leq UB = 19$

Quello che dice il solver (1/2)

- $z(LP) = 520/49 = 10{,}61$, uguale all'ottimo del duale; il rilassamento con i bound coincide, perché $x_{jm} \leq 1$ è implicato
- L'ottimo intero è $z(MILP) = 15$: il lavoro 1 sulla macchina 2, i lavori 2 e 3 sulla macchina 3, $\tilde{y} = (0, 5, 10)$
- Il bound a mano (5) è lontano dal rilassamento (10,61): la ripartizione uniforme $\lambda_{jm} = 1/3$ è la prima che viene in mente, non la migliore
- Il duale ottimo distribuisce l'unità di ogni macchina in modo diverso

Quello che dice il solver (2/2)

UB (next-fit)	LB (duale a mano)	$z(LP)$	$z(MILP)$	gap euristica
19	5	520/49	15	26,7%

- È il primo problema della famiglia in cui l'euristica *non* trova l'ottimo

Considerazioni aggiuntive

- $x_{jm} \leq 1$ ($n\,k$ disuguaglianze valide) è implicato dai vincoli (1)
- Il verso «nessun lavoro $\Rightarrow y_m = 0$» si può imporre esplicitamente: posto $\bar{t}_m = \max_j t_{jm}$,

$$\bar{t}_m \sum_{j=1}^{n} x_{jm} - y_m \geq 0, \qquad \forall m \in \{1, 2, \ldots, k\}$$

  forza $y_m = 0$ se la macchina è vuota
- *Non* sono disuguaglianze valide, ma sono **vincoli che preservano l'ottimo**: si possono aggiungere perché l'obiettivo minimizza $\sum_m y_m$

Esercizio: costo fisso se la macchina lavora

- Accendere una macchina costa $g_m = 4$ euro (una tantum) e un minuto di lavorazione costa 1 euro
- Minimizzare il costo totale
- Quale legame serve e qual è il big-M più piccolo?

Il confronto finale (1/2)

I tre numeri che ogni problema del corso produce:

	valore	che cos'è
UB	19	soluzione euristica
LB	5	bound certificato
$z(MILP)$	15	ottimo del MILP

Il confronto finale (2/2)

- Gap dell'euristica rispetto all'ottimo:

$$\frac{|UB - z(MILP)|}{|z(MILP)|} = 26.7\%$$

- Gap certificato: in assoluto $UB - LB = 14$; in percentuale, rispetto alla soluzione euristica,

$$\frac{UB - LB}{|UB|} = 73.7\%$$

Una variante svolta: il tempo della macchina più lenta (1/3)

- Le macchine lavorano tutte insieme e l'azienda vuole finire il prima possibile: minimizzare il *massimo* dei tempi delle macchine (il makespan), non la somma
- Un secondo livello di massimo: una variabile $w \geq 0$ con i vincoli

$$w \geq y_m, \qquad \forall m \in \{1, 2, \ldots, k\}$$

  e obiettivo min w
- I vincoli impongono $w \geq \max_m y_m$ e la minimizzazione forza $w = \max_m y_m$ all'ottimo

Una variante svolta: il tempo della macchina più lenta (2/3)

- **Attenzione**: ora le y_m non hanno più coefficiente positivo nell'obiettivo, quindi l'argomento «y_m = massimo dei $t_{jm}x_{jm}$ in ogni ottimo» cade: y_m può gonfiarsi fino a w senza costo
- Resta vero che *esiste* un ottimo in cui y_m è il massimo: basta abbassarla, i vincoli restano soddisfatti e w non cresce
- Sull'istanza il makespan ottimo è 10: il lavoro 3 richiede almeno 10 minuti su qualunque macchina

Una variante svolta: il tempo della macchina più lenta (3/3)

	valore	che cos'è
UB	13	soluzione euristica
LB	$\frac{260}{59}$	certificato duale a mano
$z(LP)$	$\frac{260}{59}$	rilassamento senza i bound
$z(MILP)$	10	ottimo del MILP

- Nel duale si toglie il costo alle y_m e si aggiunge una famiglia $\nu_m \geq 0$ per i vincoli $w \geq y_m$, con $\sum_m \nu_m \leq 1$
- Conviene valutare un lavoro solo, il più lungo, con ν_m proporzionale a $1/t_{jm}$: il bound è la media armonica dei suoi tempi

Riepilogo: Lavori in parallelo

- Variabili binarie x_{jm} e variabili continue y_m definite come **massimo**
- $y_m \geq t_{jm} x_{jm}$ per ogni lavoro: i vincoli danno «$\geq$ massimo», l'obiettivo dà l'uguaglianza
- Il verso «macchina vuota $\Rightarrow y_m = 0$» segue dall'ottimalità, non dai vincoli
- Bound: $LB = 5$ (duale a mano, lontano da $z(LP) = 520/49$), $UB = 19$ (next-fit), $z(MILP) = 15$