Modelli numerici (1/3): EX 1–5

Indice

I quindici modelli numerici

EX 1 — Il furgone da otto posti

EX 2 — Linee di autobus

EX 3 — Staffetta

EX 4 — Hub-and-spoke

EX 5 — Fondi acquistabili a lotti

Obiettivi (1/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- scrivere le variabili e il modello di un'istanza a dati espliciti, primale e duale;
- costruire a mano una soluzione ammissibile e una soluzione duale, e chiudere il sandwich $LB \leq z(MILP) \leq UB$;

Obiettivi (2/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- riconoscere in ogni enunciato la tecnica di cui il modello ha bisogno;
- confrontare i bound costruiti a mano con l'ottimo dato dal solver.

Prerequisiti

- Da questo modulo, Capitolo 2 «Rilassamenti, dualità e bound»: il duale del rilassamento LP e la soluzione duale costruita a mano
- Da questo modulo, Capitolo 4 «Euristiche costruttive»: le euristiche costruttive e il bound primale
- Da questo modulo, Capitolo 6 «Legami fra variabili»: i legami fra variabili (attivazione, lotto minimo, conteggi interi, min-max)

I quindici modelli numerici

Introduzione: I quindici modelli numerici

- Il corso raccoglie quindici modelli numerici, da EX 1 a EX 15
- Dati espliciti, poche variabili, una tecnica per modello
- Sono i più facili: vengono prima delle tre famiglie di problemi e dei problemi misti
- In queste slide: i primi cinque, da EX 1 a EX 5

Le cinque parti di ogni modello numerico

- l'enunciato, con i dati dell'istanza
- le **variabili**, con il loro dominio e il loro conteggio
- il **modello dell'istanza**, primale e duale
- una soluzione ammissibile costruita a mano, che dà il bound primale
- una soluzione duale costruita a mano, che dà il bound duale, e il confronto con l'ottimo del solver

Ogni modello ha il suo script e il suo notebook.

Riepilogo

- Modelli piccoli, con dati espliciti: si risolvono anche a mano
- Sempre lo stesso schema: enunciato, variabili, modello primale e duale
- Due bound costruiti a mano collocano l'ottimo fra due valori *prima* di conoscerlo
- Il solver fornisce l'ottimo, con cui si confrontano i due bound

EX 1 — Il furgone da otto posti

Introduzione: EX 1 — Il furgone da otto posti

- Quali gruppi di turisti accettare su un furgone da otto posti
- Tre vincoli in quattro variabili binarie: capacità, conteggio, implicazione
- Costruiremo a mano un bound primale e un bound duale
- Togliendo un vincolo per volta vedremo quale vincolo "morde"

EX 1 — quali gruppi di turisti accettare

- Un tour operator noleggia un furgone da otto posti
- Si presentano quattro gruppi, di 2, 3, 4 e 5 persone, i cui membri non vogliono essere separati
- Le offerte dei gruppi sono 30, 50, 80 e 70 euro
- Si possono accettare al più due gruppi
- Se si accetta il gruppo 2 si deve accettare anche il gruppo 4
- Si vuole massimizzare l'incasso

Le variabili

I gruppi sono quattro: serve una variabile binaria per gruppo.

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se il gruppo } j \text{ viene accettato,} \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad \forall j \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

EX 1 sull'istanza — primale

EX 1 sull'istanza — primale

$$
\begin{aligned}
\max\ & 30x_1 + 50x_2 + 80x_3 + 70x_4 \\
\text{soggetto a}\ & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 8 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2 \\
& x_2 - x_4 \leq 0 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

Descrizione del modello

- L'obiettivo somma le offerte dei gruppi accettati
- Prima riga: la capacità del furgone, le persone accettate non superano gli otto posti
- Seconda riga: conta i gruppi accettati e ne concede al più due
- Terza riga: l'implicazione "se accetto il gruppo 2 accetto anche il gruppo 4", cioè $x_2 - x_4 \leq 0$
  - con $x_2 = 1$ obbliga $x_4 = 1$; con $x_2 = 0$ non vieta niente
- Ultima riga: le quattro variabili sono binarie

Una soluzione ammissibile: il bound primale

Si scandiscono i gruppi per offerta decrescente $(3, 4, 2, 1)$ e si accetta un gruppo solo se tutti i vincoli restano soddisfatti:

- gruppo 3 (offerta 80): accettato, 4 posti, 1 gruppo
- gruppo 4 (offerta 70): scartato, servirebbero 9 posti su 8
- gruppo 2 (offerta 50): scartato, obbligherebbe ad accettare il gruppo 4, e i gruppi diventerebbero tre
- gruppo 1 (offerta 30): accettato, 6 posti, 2 gruppi

$$\bar{x} = (1, 0, 1, 0), \qquad LB = 30 + 80 = 110.$$

Il rilassamento LP e il suo duale

- Il rilassamento LP sostituisce il dominio binario con la sola non negatività
- Il duale associa una variabile non negativa a ciascuno dei tre vincoli:
  - α ai posti
  - β al numero di gruppi
  - γ all'implicazione
- Le quattro colonne del primale danno quattro vincoli duali

EX 1 sull'istanza — duale del rilassamento LP

EX 1 sull'istanza — duale del rilassamento LP

$$
\begin{aligned}
\min\ & 8\alpha + 2\beta & & \\
\text{soggetto a}\ & 2\alpha + \beta & \geq & 30 \\
& 3\alpha + \beta + \gamma & \geq & 50 \\
& 4\alpha + \beta & \geq & 80 \\
& 5\alpha + \beta - \gamma & \geq & 70 \\
& \alpha & \geq & 0 \\
& \beta & \geq & 0 \\
& \gamma & \geq & 0
\end{aligned}
$$

Una soluzione duale: il bound duale

Si valuta il solo posto e si azzerano gli altri due moltiplicatori: $\bar{\beta} = 0$, $\bar{\gamma} = 0$. I vincoli duali diventano

$$2\alpha \geq 30, \qquad 3\alpha \geq 50, \qquad 4\alpha \geq 80, \qquad 5\alpha \geq 70,$$

e il più piccolo α che li soddisfa tutti è

$$\bar{\alpha} = \max\left(\frac{30}{2}, \frac{50}{3}, \frac{80}{4}, \frac{70}{5}\right) = 20, \qquad UB = 8 \cdot 20 = 160.$$

La lettura: "un posto vale quanto il gruppo che lo paga meglio".

Soluzione ottima

- L'ottimo si ottiene risolvendo il modello
- I due bound non si passano al solver: servono a collocare l'ottimo fra due valori prima di conoscerlo, e a interpretare quello che il solver trova
- L'ottimo accetta i gruppi 2 e 4, riempiendo esattamente gli otto posti:

$$\tilde{x} = (0, 1, 0, 1), \qquad z(MILP) = 50 + 70 = 120.$$

Il confronto finale

	valore	che cos'è
LB	110	soluzione euristica
UB	160	bound duale
$z(LP)$	160	rilassamento senza i bound
$z(LP^+)$	140	rilassamento con i bound
$z(MILP)$	120	ottimo del MILP

I gap

- Gap dell'euristica rispetto all'ottimo:

$$\frac{|110 - 120|}{120} = 8{,}3\%.$$

- Gap certificato, noto *prima* di risolvere il MILP (non può usare $z(MILP)$): in assoluto $UB - LB = 50$; in percentuale, nella convenzione del solver,

$$\frac{|UB - LB|}{|UB|} = \frac{|160 - 110|}{160} = 31{,}3\%.$$

- Il duale a mano è *ottimo* per il rilassamento senza i bound; aggiungendo $x_j \leq 1$ si scende a 140

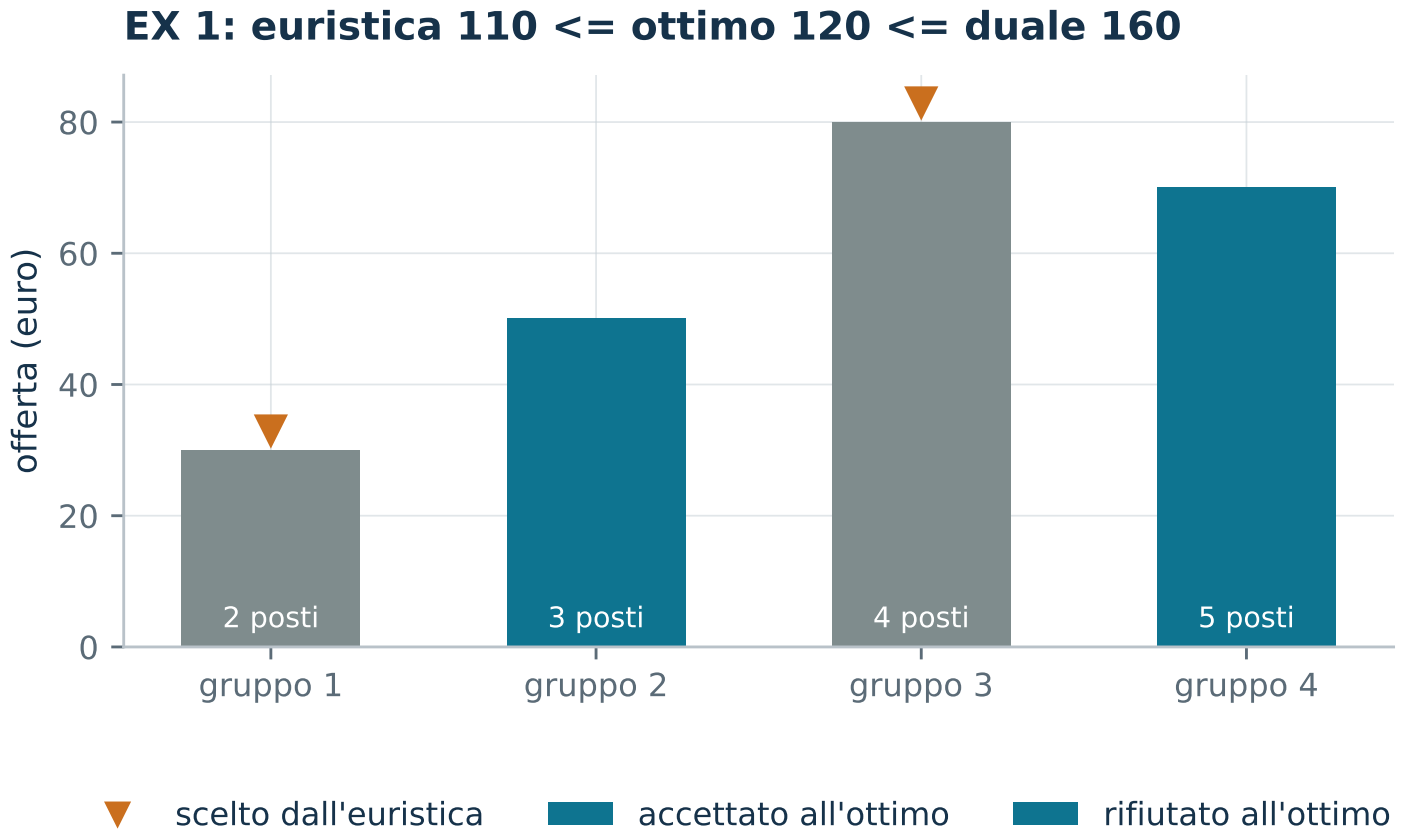
Il contributo di ciascun vincolo

Togliendo un vincolo per volta si vede quale morde:

modello	$z(MILP)$	gruppi
completo	120	2, 4
senza il limite sul numero di gruppi	120	2, 4
senza l'implicazione	130	2, 3
senza entrambi	130	2, 3

- L'implicazione costa 10 euro
- Il limite di due gruppi non costa nulla: è la capacità in posti a mordere

I tre bound a confronto



Riepilogo

- Capacità, conteggio e implicazione $x_2 - x_4 \leq 0$ in quattro binarie
- Euristica per offerta decrescente: $LB = 110$
- Duale "un posto vale quanto il gruppo che lo paga meglio": $UB = 160$
- Ottimo $z(MILP) = 120$, gruppi 2 e 4
- Il vincolo che morde è la capacità; l'implicazione costa 10 euro

EX 2 — Linee di autobus

Introduzione: EX 2 — Linee di autobus

- Un assegnamento di linee a compagnie, con capacità in numero di linee
- Struttura: vincoli di *set partitioning* più vincoli di capacità
- Vedremo che il rilassamento LP è esatto, ma la ricetta duale non lo raggiunge

EX 2 — assegnamento con capacità in numero di linee

Un comune valuta le offerte di tre compagnie di autobus per gestire quattro linee. Costo con cui ogni compagnia gestirebbe ciascuna linea:

Compagnia	Linea 1	Linea 2	Linea 3	Linea 4
1	10	4	9	7
2	1	2	3	10
3	8	9	10	1

Ogni linea va assegnata a esattamente una compagnia e ogni compagnia può gestire al più due linee. Si vuole minimizzare il costo totale.

Le variabili

Quattro linee e tre compagnie: dodici variabili binarie, una per ogni coppia compagnia–linea.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se la compagnia } i \text{ gestisce la linea } j, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$\forall i \in \{1,2,3\},\ \forall j \in \{1,2,3,4\}.$$

Il numero massimo di linee per compagnia è 2.

EX 2 sull'istanza — primale

EX 2 sull'istanza — primale

$$
\begin{aligned}
\min\ & 10x_{11}+4x_{12}+9x_{13}+7x_{14}+x_{21}+2x_{22}+3x_{23}+10x_{24}+8x_{31}+9x_{32}+10x_{33}+x_{34} \\
\text{soggetto a}\ & x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1 \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1 \\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1 \\
& x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1 \\
& x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \le 2 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \le 2 \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \le 2 \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34} \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

Descrizione del modello

- L'obiettivo somma i costi delle coppie compagnia–linea scelte
- Le prime quattro righe sono un *set partitioning*: una per linea, ciascuna gestita da esattamente una compagnia
- Le tre righe successive sono le capacità: una per compagnia, ciascuna con al più due linee
- L'ultima riga dichiara binarie le dodici variabili

Una soluzione ammissibile: il bound primale

Si scandiscono le linee nell'ordine dato e si assegna ogni linea alla compagnia più economica fra quelle con posti liberi:

- linea 1: costi 10, 1, 8; la più economica è la compagnia 2
- linea 2: costi 4, 2, 9; di nuovo la compagnia 2, che ora è satura
- linea 3: restano le compagnie 1 e 3, costi 9 e 10: compagnia 1
- linea 4: restano le compagnie 1 e 3, costi 7 e 1: compagnia 3

$$\bar{x}_{21} = \bar{x}_{22} = \bar{x}_{13} = \bar{x}_{34} = 1, \qquad UB = 1 + 2 + 9 + 1 = 13.$$

Il rilassamento LP e il suo duale

- Il rilassamento LP sostituisce il dominio binario con la sola non negatività
- Il duale ha:
  - una variabile libera α_j per ogni vincolo di linea
  - una variabile non positiva π_i per ogni vincolo di capacità
- Le dodici colonne del primale danno dodici vincoli duali

EX 2 sull'istanza — duale del rilassamento LP

EX 2 sull'istanza — duale del rilassamento LP

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrr}
\max & \alpha_1 & +\alpha_2 & +\alpha_3 & +\alpha_4 & +2\beta_1 & +2\beta_2 & +2\beta_3 & & \\
\text{soggetto a} & \alpha_1 & & & & +\beta_1 & & & \leq & 10 \\
& & \alpha_2 & & & +\beta_1 & & & \leq & 4 \\
& & & \alpha_3 & & +\beta_1 & & & \leq & 9 \\
& & & & \alpha_4 & +\beta_1 & & & \leq & 7 \\
& \alpha_1 & & & & & +\beta_2 & & \leq & 1 \\
& & \alpha_2 & & & & +\beta_2 & & \leq & 2 \\
& & & \alpha_3 & & & +\beta_2 & & \leq & 3 \\
& & & & \alpha_4 & & +\beta_2 & & \leq & 10 \\
& \alpha_1 & & & & & & +\beta_3 & \leq & 8 \\
& & \alpha_2 & & & & & +\beta_3 & \leq & 9 \\
& & & \alpha_3 & & & & +\beta_3 & \leq & 10 \\
& & & & \alpha_4 & & & +\beta_3 & \leq & 1 \\
& \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4 & & & & \gtreqless & 0 \\
& & & & & \beta_1, & \beta_2, & \beta_3 & \leq & 0
\end{array}
$$

Descrizione del duale

- α_j è il valore della linea j, che va comunque assegnata
- π_i è il prezzo (non positivo) di uno dei $p = 2$ posti della compagnia i
- L'obiettivo valuta le linee e i posti disponibili
- I vincoli duali sono le colonne delle x_{ij}: dare la linea j alla compagnia i soddisfa il vincolo di quella linea e occupa un posto, e il saldo non può superare il costo c_{ij}

Una soluzione duale: il bound duale

Si azzerano i tre moltiplicatori della capacità,

$$\bar{\pi}_1 = 0, \qquad \bar{\pi}_2 = 0, \qquad \bar{\pi}_3 = 0,$$

e per ogni linea si prende il più grande valore ammissibile, cioè il costo più basso fra le tre compagnie:

$$\bar{\alpha}_1 = 1, \qquad \bar{\alpha}_2 = 2, \qquad \bar{\alpha}_3 = 3, \qquad \bar{\alpha}_4 = 1,$$

$$LB = 1 + 2 + 3 + 1 = 7.$$

La lettura: "ogni linea costa almeno quanto la sua compagnia più economica".

Soluzione ottima

- L'ottimo si ottiene risolvendo il modello; i due bound servono a collocarlo e a interpretarlo
- L'ottimo assegna:
  - la linea 1 alla compagnia 2, la linea 2 alla compagnia 1
  - la linea 3 alla compagnia 2, la linea 4 alla compagnia 3

$$\tilde{x}_{21} = \tilde{x}_{12} = \tilde{x}_{23} = \tilde{x}_{34} = 1, \qquad z(MILP) = 1 + 4 + 3 + 1 = 9.$$

Il confronto finale

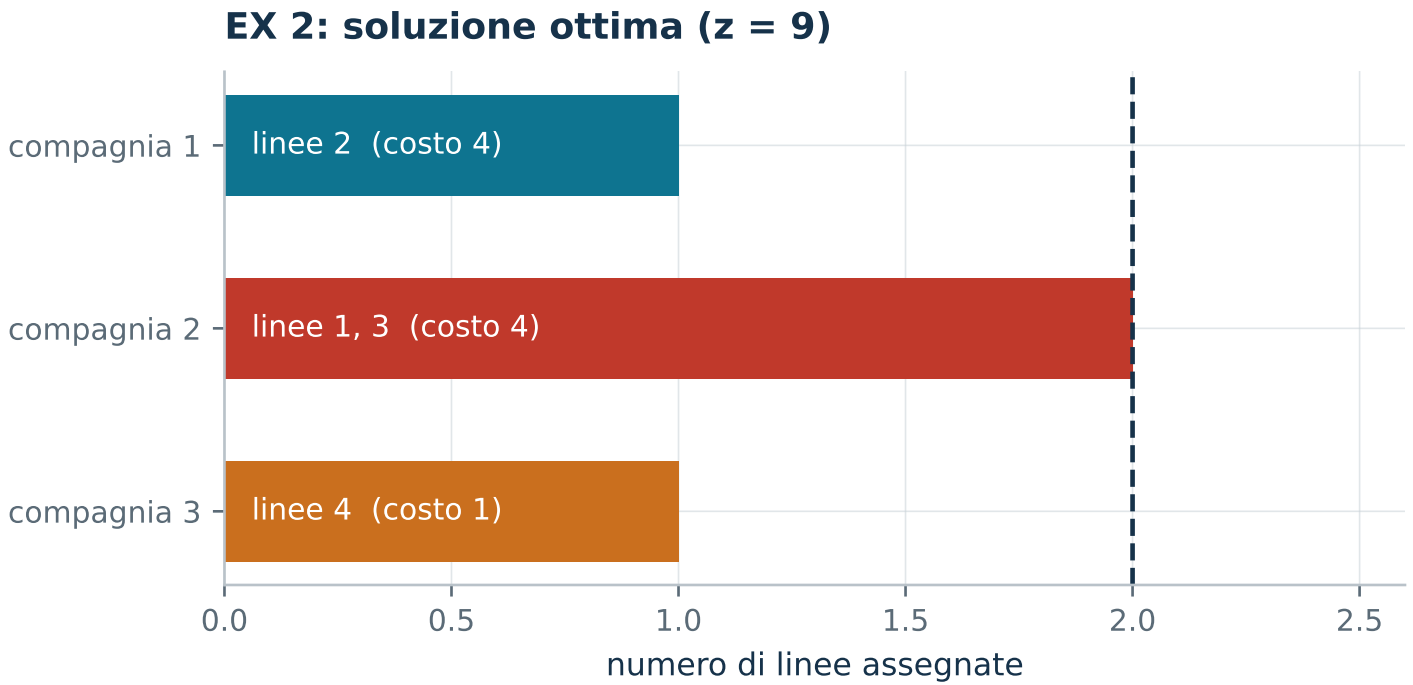
	valore	che cos'è
UB	13	soluzione euristica
LB	7	bound duale
$z(LP)$	9	rilassamento LP
$z(MILP)$	9	ottimo del MILP

- Gap dell'euristica: $\frac{|13-9|}{9} = 44{,}4\%$
- Gap certificato: $UB - LB = 6$, cioè $\frac{|13-7|}{13} = 46{,}2\%$

Rilassamento esatto, ricetta duale no

- Il rilassamento LP è *esatto*: $z(LP) = z(MILP) = 9$
- La ricetta duale però non lo raggiunge, e si ferma a 7
- Azzerare i moltiplicatori della capacità butta via proprio l'informazione che rende il problema difficile: la compagnia più economica non può prendersi tutte le linee

La soluzione ottima



Riepilogo

- Set partitioning sulle linee più capacità sulle compagnie
- Euristica linea per linea: $UB = 13$
- Duale "ogni linea costa almeno la sua offerta più bassa": $LB = 7$
- Ottimo $z(MILP) = 9 = z(LP)$: il rilassamento è esatto
- La ricetta duale azzera proprio l'informazione della capacità

EX 3 — Staffetta

Introduzione: EX 3 — Staffetta

- Un assegnamento con più risorse (nuotatori) che compiti (frazioni)
- Stessa struttura di EX 2 con capacità unitaria
- Vedremo perché qui il rilassamento è esatto: la matrice è totalmente unimodulare

EX 3 — assegnamento con più risorse che compiti

Un allenatore deve formare una staffetta scegliendo tre nuotatori fra quattro. Tre frazioni da 50 metri; tempi registrati (secondi):

Stile	Carlo	Paolo	Fabio	Marco
Dorso	37	32	33	37
Rana	43	33	42	34
Farfalla	33	28	38	30

Si vuole minimizzare il tempo totale della staffetta.

Le variabili

Tre frazioni e quattro nuotatori: dodici variabili binarie, una per ogni coppia frazione–nuotatore.

$$x_{sn} = \begin{cases} 1 & \text{se la frazione } s \text{ è nuotata dal nuotatore } n, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$\forall s \in \{1,2,3\},\ \forall n \in \{1,2,3,4\}.$$

EX 3 sull'istanza — primale

EX 3 sull'istanza — primale

$$
\begin{aligned}
\min\ & 37x_{11}+32x_{12}+33x_{13}+37x_{14}+43x_{21}+33x_{22}+42x_{23}+34x_{24}+33x_{31}+28x_{32}+38x_{33}+30x_{34} \\
\text{soggetto a}\ & x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} = 1 \\
& x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} = 1 \\
& x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} = 1 \\
& x_{11}+x_{21}+x_{31} \le 1 \\
& x_{12}+x_{22}+x_{32} \le 1 \\
& x_{13}+x_{23}+x_{33} \le 1 \\
& x_{14}+x_{24}+x_{34} \le 1 \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34} \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

Descrizione del modello

- L'obiettivo somma i tempi delle assegnazioni scelte
- Le prime tre righe: ogni frazione è nuotata da esattamente un nuotatore
- Le quattro successive: ogni nuotatore nuota al più una frazione
- È la struttura dell'*assegnamento*: uguaglianze sulle righe della matrice, disuguaglianze sulle colonne
- L'ultima riga dichiara binarie le dodici variabili

Una soluzione ammissibile: il bound primale

Si scandiscono le frazioni nell'ordine dato e si assegna ciascuna al nuotatore più veloce fra quelli ancora liberi:

- dorso: il più veloce dei quattro è Paolo, con 32
- rana: fra i tre rimasti il più veloce è Marco, con 34
- farfalla: fra i due rimasti il più veloce è Carlo, con 33

$\bar{x}_{12} = \bar{x}_{24} = \bar{x}_{31} = 1, \qquad UB = 32 + 34 + 33 = 99$ secondi.

EX 3 sull'istanza — duale del rilassamento LP

EX 3 sull'istanza — duale del rilassamento LP

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrr}
\max & \alpha_1 & +\alpha_2 & +\alpha_3 & +\beta_1 & +\beta_2 & +\beta_3 & +\beta_4 & & \\
\text{soggetto a} & \alpha_1 & & & +\beta_1 & & & & \leq & 37 \\
& \alpha_1 & & & & +\beta_2 & & & \leq & 32 \\
& \alpha_1 & & & & & +\beta_3 & & \leq & 33 \\
& \alpha_1 & & & & & & +\beta_4 & \leq & 37 \\
& & \alpha_2 & & +\beta_1 & & & & \leq & 43 \\
& & \alpha_2 & & & +\beta_2 & & & \leq & 33 \\
& & \alpha_2 & & & & +\beta_3 & & \leq & 42 \\
& & \alpha_2 & & & & & +\beta_4 & \leq & 34 \\
& & & \alpha_3 & +\beta_1 & & & & \leq & 33 \\
& & & \alpha_3 & & +\beta_2 & & & \leq & 28 \\
& & & \alpha_3 & & & +\beta_3 & & \leq & 38 \\
& & & \alpha_3 & & & & +\beta_4 & \leq & 30 \\
& \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 & & & & & \gtreqless & 0 \\
& & & & \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & \beta_4 & \leq & 0
\end{array}
$$

Una soluzione duale: il bound duale

La stessa ricetta di EX 2 con capacità unitaria: $\bar{\beta}_n = 0$ per ogni nuotatore e il più grande α_s ammissibile,

$$\bar{\alpha}_s = \min_n t_{sn}: \qquad \bar{\alpha}_1 = 32, \quad \bar{\alpha}_2 = 33, \quad \bar{\alpha}_3 = 28, \qquad LB = 93.$$

- Significato: "ogni frazione costa almeno il tempo del suo migliore specialista"
- Il bound è debole quando due frazioni hanno lo stesso specialista migliore: qui Paolo è il più veloce sia nel dorso sia nella farfalla, e il bound non è raggiungibile

Soluzione ottima

- L'ottimo si ottiene risolvendo il modello; i due bound servono a collocarlo e a interpretarlo
- Dorso a Fabio (33), rana a Marco (34), farfalla a Paolo (28); Carlo resta fuori

$$\tilde{x}_{13} = \tilde{x}_{24} = \tilde{x}_{32} = 1, \qquad z(MILP) = 33 + 34 + 28 = 95 \text{ secondi.}$$

Il confronto finale

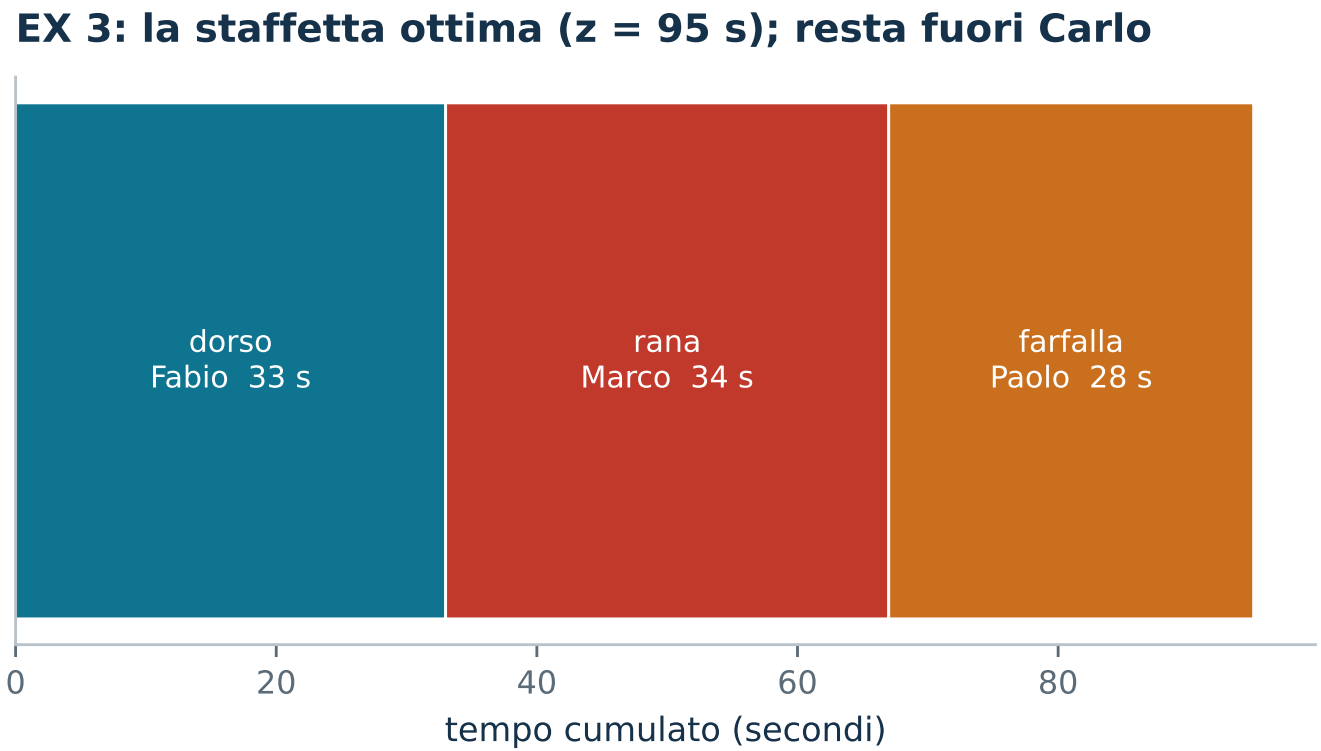
	valore	che cos'è
UB	99	soluzione euristica
LB	93	bound duale
$z(LP)$	95	rilassamento LP
$z(MILP)$	95	ottimo del MILP

- Gap dell'euristica: $\frac{|99-95|}{95} = 4{,}2\%$
- Gap certificato: $UB - LB = 6$, cioè $\frac{|99-93|}{99} = 6{,}1\%$

Perché qui il rilassamento è esatto

- La matrice del modello è quella del problema di assegnamento: totalmente unimodulare
- Tutti i vertici del rilassamento sono interi, quindi $z(LP) = z(MILP)$ e l'interezza non costa nulla
- È lo stesso fenomeno dell'alldiff (sezione "Alldiff ed espansione binaria")
- Non è così appena si aggiunge un vincolo di capacità con coefficienti diversi da 0 e 1

La staffetta ottima



Riepilogo

- Assegnamento con più risorse che compiti: uguaglianze sulle frazioni, disuguaglianze sui nuotatori
- Euristica frazione per frazione: $UB = 99$
- Duale "il miglior specialista": $LB = 93$
- Ottimo $z(MILP) = 95 = z(LP)$: matrice totalmente unimodulare

EX 4 — Hub-and-spoke

Introduzione: EX 4 — Hub-and-spoke

- Il minimo numero di hub per coprire otto città: un *set covering* puro
- Euristica costruttiva di copertura per il bound primale
- Euristica costruttiva duale per il bound duale
- I due bound a mano coincidono: l'ottimalità si dimostra senza il solver

EX 4 — il minimo numero di hub

Una compagnia aerea usa un sistema *hub-and-spoke*: un hub serve direttamente tutte le città entro 1000 miglia. Le città entro 1000 miglia sono:

Città	Città entro 1000 miglia
Atlanta	Atlanta, Chicago, Houston, New York
Chicago	Atlanta, Chicago, New York
Denver	Denver, Los Angeles
Houston	Atlanta, Houston
Los Angeles	Denver, Los Angeles, San Francisco
New York	Atlanta, Chicago, New York
San Francisco	Los Angeles, San Francisco, Seattle
Seattle	San Francisco, Seattle

Si vuole il numero minimo di hub che copre ogni città.

Le variabili

Le città sono otto: serve una variabile binaria per città.

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se la città } j \text{ diventa un hub,} \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad \forall j \in \{1, 2, \ldots, 8\}.$$

Numerando le città in ordine alfabetico, il dato è l'insieme $S_i \subseteq \{1, 2, \ldots, 8\}$ delle città entro 1000 miglia dalla città i, cioè quelle che possono coprirla.

Gli insiemi S_i

città i	S_i
1 Atlanta	$\{1, 2, 4, 6\}$
2 Chicago	$\{1, 2, 6\}$
3 Denver	$\{3, 5\}$
4 Houston	$\{1, 4\}$
5 Los Angeles	$\{3, 5, 7\}$
6 New York	$\{1, 2, 6\}$
7 San Francisco	$\{5, 7, 8\}$
8 Seattle	$\{7, 8\}$

EX 4 sull'istanza — primale

EX 4 sull'istanza — primale

$$
\begin{aligned}
\min\ & y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 \\
\text{soggetto a}\ & y_1 + y_2 + y_4 + y_6 \geq 1 \\
& y_1 + y_2 + y_6 \geq 1 \\
& y_3 + y_5 \geq 1 \\
& y_1 + y_4 \geq 1 \\
& y_3 + y_5 + y_7 \geq 1 \\
& y_1 + y_2 + y_6 \geq 1 \\
& y_5 + y_7 + y_8 \geq 1 \\
& y_7 + y_8 \geq 1 \\
& y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5,\ y_6,\ y_7,\ y_8 \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

Descrizione del modello

- Un *set covering* puro: otto vincoli di copertura, tutti i costi pari a 1
- "Entro 1000 miglia" è una relazione simmetrica: $j \in S_i \iff i \in S_j$
- Quindi la matrice del modello è simmetrica
- Il duale del rilassamento LP associa una variabile $\pi_i \geq 0$ a ciascun vincolo di copertura
- La colonna di y_j raccoglie le città che j è in grado di coprire

EX 4 sull'istanza — duale del rilassamento LP

EX 4 sull'istanza — duale del rilassamento LP

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrrr}
\max & \pi_1 & + & \pi_2 & + & \pi_3 & + & \pi_4 & + & \pi_5 & + & \pi_6 & + & \pi_7 & + & \pi_8 & \\
\text{soggetto a} & \pi_1 & + & \pi_2 & & & + & \pi_4 & & & + & \pi_6 & & & & \leq & 1 \\
& \pi_1 & + & \pi_2 & & & & & & & + & \pi_6 & & & & \leq & 1 \\
& & & & & \pi_3 & & & + & \pi_5 & & & & & & \leq & 1 \\
& \pi_1 & & & + & \pi_4 & & & & & & & & & & \leq & 1 \\
& & & & & \pi_3 & & & + & \pi_5 & & & + & \pi_7 & & \leq & 1 \\
& \pi_1 & + & \pi_2 & & & & & & & + & \pi_6 & & & & \leq & 1 \\
& & & & & & & & & \pi_5 & & & + & \pi_7 & + & \pi_8 & \leq & 1 \\
& & & & & & & & & & & & & \pi_7 & + & \pi_8 & \leq & 1 \\
& \pi_1, & & \pi_2, & & \pi_3, & & \pi_4, & & \pi_5, & & \pi_6, & & \pi_7, & & \pi_8 & \geq & 0
\end{array}
$$

Una soluzione ammissibile: il bound primale

Euristica costruttiva di copertura, criterio "costo per città nuova coperta":

- **Passo 1.** Rapporti 1/4 per Atlanta, 1/3 per Chicago, New York e San Francisco, 1/2 per le altre: si sceglie **Atlanta** (copre Atlanta, Chicago, Houston, New York)
- **Passo 2.** Restano Denver, Los Angeles, San Francisco, Seattle; rapporti 1/2, 1/3, 1/3, 1/2: si sceglie **Los Angeles** (copre Denver, Los Angeles, San Francisco)
- **Passo 3.** Resta Seattle; rapporto 1/1 per San Francisco e Seattle: si sceglie **San Francisco**

Tre hub, quindi $UB = 3$.

Una soluzione duale: il significato del duale

Rilassando a $y_j \geq 0$, con $\pi_i \geq 0$ per ogni vincolo di copertura (verso $\geq$ in un minimo):

- π_i è il prezzo che si attribuisce alla città i
- L'obiettivo somma i prezzi delle 8 città
- I vincoli sono le colonne delle y_j, uno per hub: le città che l'hub j copre, valutate a quei prezzi, non possono valere più di quanto costa aprirlo, cioè 1

Una soluzione duale: il bound duale

Euristica costruttiva duale sulle città, nell'ordine: si alza π_i fino a saturare il primo vincolo duale che si oppone, e si aggiornano i residui.

- **Atlanta**: quattro hub con residuo 1; $\bar{\pi}_1 = 1$, i residui di Atlanta, Chicago, Houston, New York vanno a zero
- **Chicago**, **Houston**, **New York**: hub a residuo zero, $\bar{\pi} = 0$
- **Denver**: Denver e Los Angeles con residuo 1; $\bar{\pi}_3 = 1$
- **Los Angeles**, **San Francisco**: un hub a residuo zero, $\bar{\pi} = 0$
- **Seattle**: San Francisco e Seattle con residuo 1; $\bar{\pi}_8 = 1$

Valore $LB = 1 + 1 + 1 = 3$.

Che cosa dimostra questo bound, in parole

- Le tre città con $\pi_i = 1$ — Atlanta, Denver, Seattle — sono a due a due "lontane"
- Nessuna città può fare da hub per due di esse
- Quindi servono almeno tre hub
- Il duale ha formalizzato un argomento che si può raccontare senza scriverlo: è il senso della ricetta costruttiva

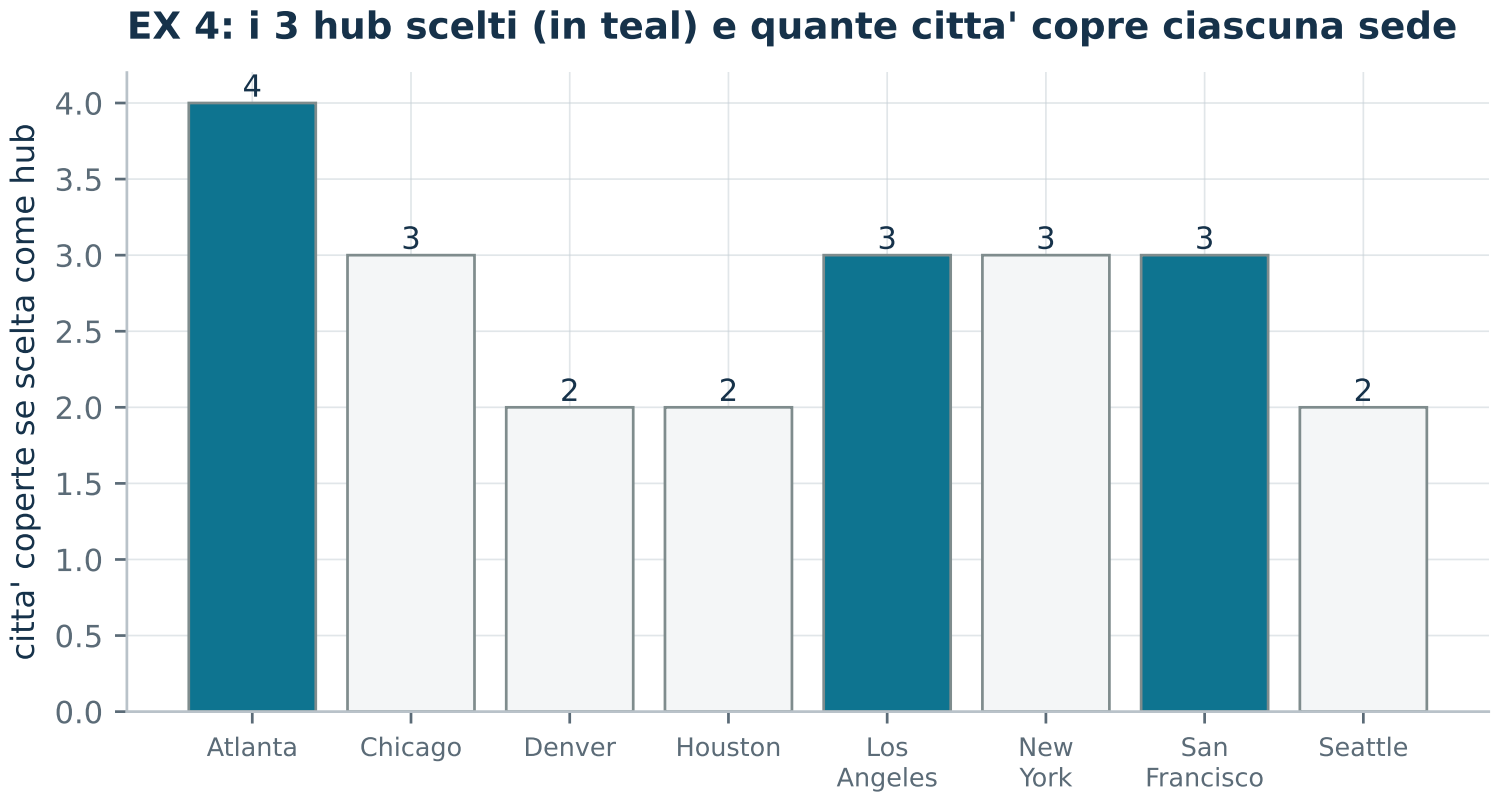
Il confronto finale

$z(MILP) = 3$, con gli hub ad Atlanta, Los Angeles e San Francisco: la stessa soluzione dell'euristica costruttiva.

UB (euristica costruttiva)	3
LB (duale a mano)	3
$z(LP)$	3
$z(MILP)$	3
gap euristica	0,0%

I due bound a mano coincidono: l'ottimalità è dimostrata senza il solver.

Quante città coprirebbe ogni hub



Per ogni città, quante ne coprirebbe come hub; in teal le tre scelte.

Riepilogo

- Set covering puro, matrice simmetrica
- Euristica "costo per città nuova coperta": $UB = 3$
- Euristica costruttiva duale: $LB = 3$
- Atlanta, Denver, Seattle sono a due a due lontane: servono almeno tre hub
- $LB = UB$: ottimalità dimostrata a mano

EX 5 — Fondi acquistabili a lotti

Introduzione: EX 5 — Fondi acquistabili a lotti

- Uno zaino intero, non binario: le variabili contano lotti
- Un vincolo di quota scritto in forma lineare
- L'euristica inciampa proprio sul fondo migliore
- Un tentativo duale che sembra naturale ma non è ammissibile

EX 5 — quattro fondi comuni

- Un investitore deve impiegare 100 milioni di lire in quattro fondi comuni
- Le quote si acquistano solo a lotti indivisibili, da 12, 15, 18 e 25 milioni
- Rendimento annuo stimato: 1/6 del capitale per il primo fondo, 1/3 per il secondo, 1/9 per il terzo, 16% per il quarto
- Il numero di lotti del secondo fondo non può superare il 50% del numero totale di lotti
- Si vuole massimizzare il rendimento annuo atteso

Le variabili

x_j = numero di lotti del fondo j. Il rendimento di un lotto vale

$$12 \cdot \tfrac{1}{6} = 2, \qquad 15 \cdot \tfrac{1}{3} = 5, \qquad 18 \cdot \tfrac{1}{9} = 2, \qquad 25 \cdot 0{,}16 = 4.$$

Il vincolo di quota

$$x_2 \leq \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4),$$

moltiplicato per 2 e portato a sinistra, diventa

$$-x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \leq 0.$$

EX 5 — il modello per esteso

EX 5 — il modello per esteso

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 \\
\text{soggetto a} \quad & 12x_1 + 15x_2 + 18x_3 + 25x_4 \leq 100 \\
& -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \leq 0 \\
& x_1, \; x_2, \; x_3, \; x_4 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}
\end{aligned}
$$

Una soluzione ammissibile: il bound primale

Ordine di rendimento per milione: 1/3 (secondo), 1/6 (primo), 4/25 (quarto), 1/9 (terzo).

- Del secondo, il migliore, non si compra nessun lotto: da solo violerebbe subito la quota
- Del primo si comprano 8 lotti (96 milioni); i 4 milioni restanti non bastano per altro
- L'euristica è inciampata sul fondo migliore: un suo lotto conviene, ma solo *insieme* a un lotto di un altro fondo

$$z(MILP) \geq LB = 16.$$

EX 5 sull'istanza — duale

EX 5 sull'istanza — duale

$$
\begin{aligned}
& \min 100\alpha \\
\text{soggetto a} \quad & 12\alpha - \beta \geq 2 \\
& 15\alpha + \beta \geq 5 \\
& 18\alpha - \beta \geq 2 \\
& 25\alpha - \beta \geq 4 \\
& \alpha \geq 0 \\
& \beta \geq 0
\end{aligned}
$$

Un tentativo che non è ammissibile

Osservazione 1: Un tentativo che non è ammissibile

Una scelta che viene spontanea è $\bar{\alpha} = 5/32$, $\bar{\beta} = 1/8$. *Primo vincolo:*

$$12 \cdot \frac{5}{32} - \frac{1}{8} = \frac{60}{32} - \frac{4}{32} = \frac{56}{32} = \frac{7}{4} < 2.$$

È violato di $1/4$*: la coppia non è duale ammissibile, e* $100 \cdot 5/32$ *non è un bound. Un valore duale è un bound solo dopo aver verificato tutti i vincoli.*

Una soluzione duale: il bound duale

La ricetta corretta è $\bar{\beta} = 0$ e

$$\bar{\alpha} = \max_j \frac{p_j}{c_j} = \max\left(\frac{2}{12}, \frac{5}{15}, \frac{2}{18}, \frac{4}{25}\right) = \frac{1}{3},$$

cioè il milione vale quanto rende nel fondo migliore. Tutti i vincoli diventano $c_j\,\bar{\alpha} \geq p_j$ e sono soddisfatti:

$$z(MILP) \leq UB = 100 \cdot \frac{1}{3} = \frac{100}{3} \approx 33{,}33.$$

Il confronto finale

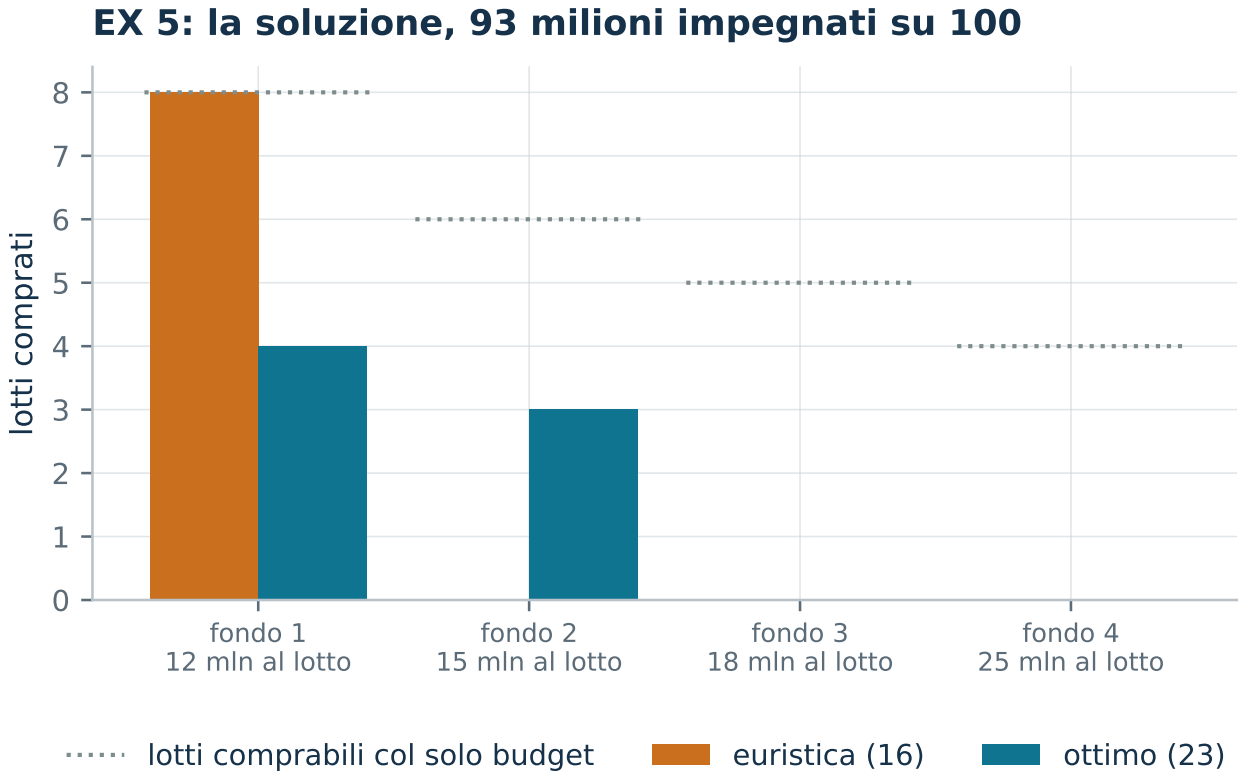
LB	UB	$z(LP)$	$z(LP^+)$	$z(MILP)$
16	$100/3$	$700/27$	$700/27$	23

- L'ottimo compra 4 lotti del primo fondo e 3 del secondo: 93 milioni per 23 di rendimento
- L'euristica si ferma a 16 e sbaglia del 30%
- $700/27 - 23 = 79/27$ è il prezzo dell'interezza: il rilassamento comprerebbe lotti a pezzi

Che cosa dicono i bound e i vincoli

- Il bound duale a mano, 100/3, resta lontano: “il milione vale quanto rende nel fondo migliore” ignora che il fondo migliore non si può comprare da solo
- È una ricetta valida, non una buona
- Togliendo il vincolo di quota l’ottimo salirebbe da 23 a 30: sei lotti del secondo fondo e nulla d’altro
- La quota costa 7 milioni di rendimento all’anno
- Così si misura che cosa fa un vincolo: lo si toglie e si guarda di quanto cambia l’ottimo

Euristica e ottimo a confronto



I lotti comprati dall'euristica e all'ottimo, con il numero di lotti che il solo budget consentirebbe per ciascun fondo.

Riepilogo

- Zaino intero con un vincolo di quota lineare
- Euristica per rendimento al milione: $LB = 16$, inciampa sul fondo migliore
- Un valore duale è un bound solo se *tutti* i vincoli duali sono verificati
- Duale "il milione vale quanto nel fondo migliore": $UB = 100/3$
- Ottimo $z(MILP) = 23$; la quota costa 7

Riepilogo finale (1/2)

Lo schema dei modelli numerici:

- Variabili, modello primale e duale sull'istanza
- Un bound primale da un'euristica costruttiva, un bound duale da una ricetta duale
- L'ottimo del solver sta sempre fra i due

Che cosa misurare:

- Il gap dell'euristica e il gap certificato
- Il costo di un vincolo: lo si toglie e si guarda di quanto cambia l'ottimo

Riepilogo finale (2/2)

- **EX 1** furgone: $110 \leq 120 \leq 160$
- **EX 2** linee di autobus: $7 \leq 9 \leq 13$, rilassamento esatto
- **EX 3** staffetta: $93 \leq 95 \leq 99$, matrice totalmente unimodulare
- **EX 4** hub-and-spoke: $3 = 3 = 3$, ottimalità dimostrata a mano
- **EX 5** fondi: $16 \leq 23 \leq 100/3$, attenzione all'ammissibilità duale