# Rilassamenti, dualità e bound

# Indice

Che cos'è un rilassamento

La tabella di conversione primale/duale

Dualità debole, dualità forte

Tre ricette per costruire a mano una soluzione duale

Un problema di minimo, per esteso

Un problema di massimo: i ruoli si scambiano

Disuguaglianze valide e vincoli che preservano l'ottimalità

Formulazioni più forti: che cosa vuol dire, e come si dimostra

Quello che dice il solver

I duali dell'LP non sono i prezzi marginali del MILP

Il protocollo dei bound

# Obiettivi (1/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- scrivere il duale del rilassamento LP di un modello con la tabella di conversione primale/duale;
- costruire a mano una soluzione duale ammissibile e usarne il valore come bound di $z(MILP)$;
- distinguere una disuguaglianza valida da un vincolo che conserva solo l'ottimalità;

# Obiettivi (2/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- confrontare due formulazioni con la forza dei loro rilassamenti LP;
- leggere `ObjVal`, `ObjBound` e `MIPGap` senza scambiare i duali dell'LP per prezzi marginali del MILP.

# Prerequisiti

- Da questo modulo, Capitolo 1 «Che cos'è un modello MIP»: il rilassamento LP, i due tipi di bound e il gap
- Dal modulo *Programmazione lineare*, Capitolo 9 «Teoria della dualità»: la costruzione del duale di un problema di programmazione lineare, la dualità debole e forte
- Dal modulo *Programmazione lineare intera*, Capitolo 2 «Bound primali e duali»: i bound primali e duali di un problema di programmazione lineare intera

# Che cos'è un rilassamento

# Introduzione: Che cos'è un rilassamento

- Questo capitolo insegna a produrre, *a mano*, un numero che sta certamente da una parte dell'ottimo intero
- Serve a tre cose:
  - capire quanto vale un modello
  - capire quanto vale un'euristica
  - leggere con giudizio i numeri che un solver riporta quando non ha finito
- Partiamo dalla definizione di **rilassamento** e dai tre rilassamenti usati nel corso

# Definizione operativa

- Un **rilassamento** di un problema di minimo con insieme ammissibile $X$ è un problema con lo stesso obiettivo e un insieme ammissibile più grande, $X \subseteq \hat{X}$
- L'unica cosa che si rilassa sono i vincoli. Vale allora

$$\min_{x \in \hat{X}} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \min_{x \in X} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

  perché il minimo su un insieme più grande non può essere più alto

- In un massimo la disuguaglianza si rovescia

# I tre rilassamenti del corso (1/2)

In ordine di forza crescente:

- $z(LP)$, **rilassamento senza i bound**:
  - $x \in \{0, 1\}$ diventa $x \geq 0$
  - è quello di cui si scrive il duale a mano: ha meno vincoli e quindi un duale con meno variabili
- $z(LP^+)$, **con i bound**:
  - $x \in \{0, 1\}$ diventa $0 \leq x \leq 1$
  - è `relax()` di Gurobi, il primo rilassamento che il solver risolve

# I tre rilassamenti del corso (2/2)

- $z(LP^{++})$, **con i bound e le disuguaglianze valide**:
  - come sopra, più disuguaglianze valide
  - la sezione sulle disuguaglianze valide spiega quali

In un problema di minimo:

$$z(LP) \leq z(LP^{+}) \leq z(LP^{++}) \leq z(MILP)$$

# I due rilassamenti coincidono più spesso di quanto sembri

**Osservazione 1: I due rilassamenti coincidono più spesso di quanto sembri**

*Se il modello contiene un vincolo di assegnamento* $\sum_m x_{jm} = 1$ *con* $x \geq 0$, *allora* $x_{jm} \leq 1$ *è già implicato e i due rilassamenti sono uguali.*

- Succede ogni volta che un vincolo di uguaglianza costringe già le variabili sotto l'uno: è il caso di tutti i modelli di assegnamento
- Quando invece i due differiscono, la differenza va riportata: è un'informazione sul modello

# Riepilogo

**Rilassamento**:

- Stesso obiettivo, insieme ammissibile più grande: in un minimo dà un valore non più alto dell'ottimo

**Tre rilassamenti**:

- $z(LP)$ (senza bound), $z(LP^+)$ (con i bound), $z(LP^{++})$ (con i bound e le disuguaglianze valide)
- In un minimo $z(LP) \leq z(LP^+) \leq z(LP^{++}) \leq z(MILP)$
- $z(LP)$ e $z(LP^+)$ coincidono con i vincoli di assegnamento

# La tabella di conversione primale/duale

# Introduzione: La tabella di conversione primale/duale

- Per costruire un bound a mano serve il **duale** del rilassamento
- La tabella di conversione dice come scriverlo: a ogni vincolo primale corrisponde una variabile duale, a ogni variabile primale un vincolo duale
- Vediamo anche come si **legge** il duale, con un significato economico

# Da un primale di minimo al suo duale

## Da un primale di minimo al suo duale

Sia il primale un minimo, con $m$ vincoli indicizzati da $i$ e $n$ variabili indicizzate da $j$.

| Nel primale (min) | Nel duale (max) |
|---|---|
| vincolo $i$ di verso $\geq$ | variabile $\pi_i \geq 0$ |
| vincolo $i$ di verso $\leq$ | variabile $\pi_i \leq 0$ |
| vincolo $i$ di uguaglianza | variabile $\pi_i$ libera |
| variabile $x_j \geq 0$ | vincolo $j$ di verso $\leq c_j$ |
| variabile $x_j$ libera | vincolo $j$ di uguaglianza $= c_j$ |

L'obiettivo duale è $\max \sum_i b_i \pi_i$ e il vincolo duale $j$ è $\sum_i a_{ij} \pi_i \lesseqgtr c_j$ con il verso dato dalla tabella. Se il primale è di **massimo**, tutti i versi della tabella si rovesciano e il duale è di minimo.

# Da un primale di minimo al suo duale (2/2)

- L'obiettivo duale è
$$\max \sum_i b_i \pi_i$$
- Il vincolo duale $j$ è
$$\sum_i a_{ij} \pi_i \leqslant c_j$$
con il verso dato dalla tabella
- Se il primale è di **massimo**, tutti i versi della tabella si rovesciano e il duale è di minimo

# Come si legge il duale

Il vincolo duale $j$ dice:

«il valore che attribuisco alle risorse consumate dall'attività $j$ non può superare il suo costo»

- Con questa lettura, ogni ricetta per costruire una soluzione duale ammissibile ha un significato economico
- È quello che la rende ricordabile: ne vedremo tre

# Riepilogo

**Tabella di conversione (primale di minimo)**:

- Vincolo $\geq \rightarrow \pi_i \geq 0$; vincolo $\leq \rightarrow \pi_i \leq 0$; uguaglianza $\rightarrow \pi_i$ libera
- $x_j \geq 0 \rightarrow$ vincolo $\leq c_j$; $x_j$ libera $\rightarrow$ vincolo $= c_j$
- Primale di massimo: tutti i versi si rovesciano

**Lettura economica**:

- Le risorse consumate da un'attività non valgono più del suo costo

# Dualità debole, dualità forte

# Introduzione: Dualità debole, dualità forte

- Due teoremi collegano il valore del primale e quello del duale
- La **dualità debole** ci dà un bound da *qualunque* soluzione duale ammissibile
- La **dualità forte** ci serve come controllo del duale scritto a mano
- Vediamo infine perché un bound dell'LP vale anche per il MILP

# I due teoremi, e a che cosa servono qui (1/2)

Siano $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ ammissibile per un LP di minimo e $(\bar{\pi}_1, \ldots, \bar{\pi}_m)$ ammissibile per il suo duale.

- **Dualità debole**: *sempre*, senza ipotesi,

$$\sum_{i=1}^{m} b_i \, \bar{\pi}_i \leq \sum_{j=1}^{n} c_j \, \bar{x}_j$$

  È questa che ci serve: dà un lower bound da *qualunque* soluzione duale ammissibile, anche costruita a mano e lontana dall'ottimo

# I due teoremi, e a che cosa servono qui (2/2)

- **Dualità forte**: se l'LP ha ottimo finito, allora $z(D(LP)) = z(LP)$

  Serve come *controllo*: l'ottimo del duale scritto a mano deve coincidere con $z(LP)$, altrimenti il duale è scritto male (lo script lo verifica con un `assert`)

- **Il passaggio all'intero**: ogni soluzione ammissibile del MILP è ammissibile anche per il rilassamento, quindi

$$\sum_{i=1}^{m} b_i \bar{\pi}_i \;\leq\; z(LP) \;\leq\; z(MILP)$$

- Un bound duale dell'LP è un bound anche per il MILP, dallo stesso lato

# Non esiste «il duale del MILP»

**Osservazione 2: Non esiste «il duale del MILP»**

*Il duale che si scrive è quello del rilassamento, non del MILP.*

- Il MILP non ha un duale lineare
- La dualità forte fra MILP e un qualsiasi programma lineare in generale non vale: il salto $z(MILP) - z(LP)$ è precisamente ciò che manca
- Quando nel corso si dice «il duale», si intende sempre il duale del rilassamento indicato

# Riepilogo

**Dualità debole**:

- Ogni soluzione duale ammissibile dà un bound, senza ipotesi

**Dualità forte**:

- $z(D(LP)) = z(LP)$: controllo del duale scritto a mano

**Per il MILP**:

- $\sum_i b_i \bar{\pi}_i \leq z(LP) \leq z(MILP)$ (in un minimo)
- Il duale è sempre quello del rilassamento

# Tre ricette per costruire a mano una soluzione duale

# Introduzione: Tre ricette per costruire a mano una soluzione duale

- Per la dualità debole basta *una* soluzione duale ammissibile, non quella ottima
- Vediamo tre ricette semplici per costruirla senza solver
- Le useremo negli esempi delle prossime sezioni

# Le ricette (1/2)

1. **Azzerare e saturare**
   - Si pongono a zero tutte le variabili duali tranne una famiglia
   - Si portano quelle al valore più grande (in un duale di massimo) compatibile con i vincoli duali
   - Esempio, su un assegnamento: si pone $\bar{\pi} = 0$ e si ottiene $\bar{\mu}_j = \min_m c_{jm}$, cioè «ogni lavoro costa almeno il suo costo minimo»

2. **Euristica costruttiva sui vincoli**
   - Si scorrono i vincoli primali uno alla volta
   - Si alza la variabile duale corrispondente fino a saturare il primo vincolo duale che si oppone, e si aggiornano i residui

# Le ricette (2/2)

3. **Il rapporto migliore**
   - Con un solo vincolo di capacità in un massimo, la variabile duale
   $$\bar{v} = \max_j \frac{p_j}{w_j}$$
   è ammissibile, e dà il bound $b\bar{v}$
   - «Tutta la capacità impiegata all'efficienza migliore»

Qualunque ricetta si usi, la soluzione costruita va *verificata* ammissibile per il duale (è l'unica cosa che rende valido il bound) e il suo valore va confrontato con $z(LP)$ per vedere quanto si è lasciato sul tavolo.

# Riepilogo

**Tre ricette**:

- Azzerare e saturare
- Euristica costruttiva sui vincoli
- Il rapporto migliore

**Sempre**:

- Verificare l'ammissibilità duale della soluzione costruita
- Confrontarne il valore con $z(LP)$

# Un problema di minimo, per esteso

# Introduzione: Un problema di minimo, per esteso

- Applichiamo tutto a un problema di **copertura** a costo minimo
- Scriviamo il modello, il duale del rilassamento e le loro versioni sull'istanza
- Costruiamo a mano un lower bound (dal duale) e un upper bound (da un'euristica)
- Confrontiamo il sandwich ottenuto con i valori del solver

# Copertura di zone a costo minimo

- Un comune ha $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ distretti, ciascuno con una squadra di pronto intervento
- Attivare la squadra del distretto $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ costa $c_j \in \mathbb{Q}_{>0}$ migliaia di euro
- Ci sono $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ zone sensibili: la zona $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ è coperta se almeno una delle squadre dell'insieme $S_i$ dei distretti che la confinano è attiva
- Si vogliono coprire tutte le zone a costo minimo

# I dati dell'istanza

$n = 4$ distretti, di costi

$$c_1 = 4, \qquad c_2 = 3, \qquad c_3 = 5, \qquad c_4 = 3$$

e $m = 6$ zone, le sei coppie di distretti confinanti:

| zona $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_i$ | $\{1,2\}$ | $\{2,3\}$ | $\{1,3\}$ | $\{1,4\}$ | $\{2,4\}$ | $\{3,4\}$ |

$S_i$ è l'insieme delle squadre che coprono la zona $i$.

# Le variabili

Si introducono le seguenti $n$ variabili binarie:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se la squadra del distretto } j \text{ viene attivata} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

# Il modello

## Copertura a costo minimo

$$\min \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.1a}$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{j \in S_i} x_j \geq 1, \qquad \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}, \tag{2.1b}$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{2.1c}$$

# Descrizione del modello

- L'**obiettivo** somma il costo delle squadre attivate
- Gli $m$ **vincoli di copertura**, uno per zona, dicono che almeno una delle due squadre confinanti con quella zona è attiva: è la struttura del *set covering*
- I **domini** sono le $n$ condizioni di binarietà, una per squadra

# Il duale del rilassamento senza i bound

- Si rilassa il dominio a $x_j \geq 0$
- A ciascun vincolo di copertura si associa una variabile duale $\pi_i \geq 0$ (verso $\geq$ in un minimo, per la tabella di conversione)

**Duale del rilassamento LP**

$$\max \sum_{i=1}^{m} \pi_i \tag{2.2a}$$

$$\text{soggetto a} \sum_{i\,:\,j \in S_i} \pi_i \leq c_j, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{2.2b}$$

$$\pi_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}. \tag{2.2c}$$

# Descrizione del duale

- La variabile $\pi_i$ è il **prezzo** che si attribuisce alla zona $i$
- L'**obiettivo** somma i prezzi delle $m$ zone
- I **vincoli** sono le colonne delle $x_j$, uno per squadra: le zone che la squadra $j$ copre, valutate a quei prezzi, non possono valere più di quanto costa attivarla, cioè $c_j$
- È la lettura economica del duale: nessuna squadra deve risultare un affare

# Copertura sull'istanza: primale

## Copertura sull'istanza — primale

$$
\begin{aligned}
\min\ & 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 \\
& x_1 + x_2 \geq 1 \\
& x_2 + x_3 \geq 1 \\
& x_1 + x_3 \geq 1 \\
& x_1 + x_4 \geq 1 \\
& x_2 + x_4 \geq 1 \\
& x_3 + x_4 \geq 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

# Copertura sull'istanza: duale del rilassamento LP

## Copertura sull'istanza — duale del rilassamento LP

$$
\begin{aligned}
\max\ & \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 \\
& \pi_1 + \pi_3 + \pi_4 \le 4 \\
& \pi_1 + \pi_2 + \pi_5 \le 3 \\
& \pi_2 + \pi_3 + \pi_6 \le 5 \\
& \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 \le 3 \\
& \pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3,\ \pi_4,\ \pi_5,\ \pi_6 \ge 0
\end{aligned}
$$

# Una soluzione duale a mano, ricetta 2 (1/2)

Si scorrono le zone in ordine; per la zona $i$ si alza $\pi_i$ del massimo consentito dai residui dei vincoli duali delle squadre in $S_i$, e si aggiornano i residui.

- **Zona 1** ($S_1 = \{1, 2\}$): residui $(4, 3, 5, 3)$, il minimo fra squadre 1 e 2 è 3. Si pone $\bar{\pi}_1 = 3$; residui $(1, 0, 5, 3)$
- **Zona 2** ($\{2, 3\}$): il residuo della squadra 2 è 0, quindi $\bar{\pi}_2 = 0$
- **Zona 3** ($\{1, 3\}$): minimo fra 1 e 5, cioè 1. Si pone $\bar{\pi}_3 = 1$; residui $(0, 0, 4, 3)$

# Una soluzione duale a mano, ricetta 2 (2/2)

- **Zone 4 e 5** ($\{1,4\}$ e $\{2,4\}$): le squadre 1 e 2 hanno residuo nullo, quindi $\bar{\pi}_4 = \bar{\pi}_5 = 0$
- **Zona 6** ($\{3,4\}$): minimo fra 4 e 3, cioè 3. Si pone $\bar{\pi}_6 = 3$; residui $(0,0,1,0)$

Tutti i vincoli duali sono soddisfatti per costruzione, e il valore è

$$LB \;=\; \bar{\pi}_1 + \cdots + \bar{\pi}_6 \;=\; 3+0+1+0+0+3 \;=\; 7$$

# Un upper bound primale

- L'euristica costruttiva di copertura sceglie ogni volta la squadra col miglior rapporto fra costo e zone ancora scoperte
- Prende le squadre 1, 2 e 4, di costo

$$4 + 3 + 3 = 10$$

- La soluzione è ammissibile e *intera*, quindi

$$UB = 10$$

# Il sandwich, e cosa dice il solver

- $z(LP) = z(LP^+) = 15/2$: i due rilassamenti coincidono, e l'ottimo del duale li conferma (dualità forte)
- $z(MILP) = 10$, con le squadre $1, 2, 4$: la stessa soluzione dell'euristica, che qui è ottima

| | |
|---|---|
| $UB$ (euristica costruttiva) | 10 |
| $LB$ (duale a mano) | 7 |
| $z(LP)$ | 15/2 |
| $z(MILP)$ | 10 |
| gap euristica | 0,0% |

# Come si legge la tabella

- Il bound a mano vale 7, il rilassamento 7,5, l'ottimo 10
- Il divario certificato fra i nostri due bound costruiti a mano è

$$\frac{10-7}{10} = 30\%$$

- Senza risolvere il MILP sapremmo soltanto che l'ottimo sta fra 7 e 10
- L'euristica era già ottima, ma non lo si può sapere dai bound

# Riepilogo

**Copertura a costo minimo**:

- Primale di minimo con vincoli $\geq$: duale di massimo con $\pi_i \geq 0$
- Duale a mano (ricetta 2): $LB = 7$
- Euristica costruttiva: $UB = 10$

**Il sandwich**:

- $7 \leq z(LP) = 15/2 \leq z(MILP) = 10 \leq 10$
- Divario certificato 30%, anche se l'euristica è ottima

# Un problema di massimo: i ruoli si scambiano

# Introduzione: Un problema di massimo

- Ripetiamo lo stesso percorso su un problema di **massimo**: uno zaino a più risorse
- In un massimo i ruoli si scambiano: l'euristica dà un **lower** bound, il duale un **upper** bound
- Scriviamo infine il sandwich una volta per tutte, per il minimo e per il massimo

# Zaino a più risorse

- Ci sono $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ oggetti e $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ risorse
- L'oggetto $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ha valore $p_j \in \mathbb{Q}_{>0}$ e consuma $a_{ij} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ unità della risorsa $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$
- Della risorsa $i$ sono disponibili $b_i \in \mathbb{Q}_{>0}$ unità
- Si scelga il sottoinsieme di valore massimo che sta dentro *tutte* le disponibilità

# I dati dell'istanza

- $n = 5$ lavorazioni, di valore $p = (10, 9, 7, 6, 4)$
- $m = 3$ risorse (acciaio, ore di tornio, ore di collaudo), di disponibilità $b = (10, 9, 8)$
- I consumi, una riga per risorsa e una colonna per lavorazione:

$$a = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Si introducono le $n$ variabili binarie

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se la lavorazione } j \text{ viene scelta} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

# Il modello

## Zaino a più risorse

$$\max \quad \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \tag{2.3a}$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \qquad \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}, \tag{2.3b}$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{2.3c}$$

# Descrizione del modello

- L'**obiettivo** somma il valore delle lavorazioni scelte
- I **vincoli di capacità**, uno per risorsa: il consumo complessivo delle lavorazioni scelte non supera la disponibilità
- I **domini** sono le $n$ condizioni di binarietà, una per lavorazione: una lavorazione o si fa tutta, o non si fa

# Il duale del rilassamento senza i bound

- Si rilassa il dominio a $x_j \geq 0$
- Primale di massimo con $m$ vincoli $\leq$: la tabella dà $m$ variabili duali $v_i \geq 0$, una per risorsa, e un vincolo duale per ciascuna variabile primale

**Duale del rilassamento LP del modello dello zaino**

$$\min \quad \sum_{i=1}^{m} b_i \, v_i \tag{2.4a}$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \, v_i \geq p_j, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{2.4b}$$

$$v_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}. \tag{2.4c}$$

# Descrizione del duale

- La variabile $v_i$ è il **prezzo** di una unità della risorsa $i$
- L'**obiettivo** è il valore attribuito a tutte le disponibilità
- Gli $n$ **vincoli**, uno per lavorazione: le risorse consumate dalla lavorazione $j$, valutate a quei prezzi, non valgono meno del profitto che porta
- Ogni vincolo duale ha ora $m$ termini, uno per risorsa: la colonna di $x_j$ nel primale ha $m$ righe

# Zaino sull'istanza: primale

## Zaino sull'istanza — primale

$$
\begin{aligned}
\max\ & 10x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 4x_5 & & \\
\text{soggetto a}\ & 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 2x_5 \leq & & 10 \\
& x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 \leq & & 9 \\
& 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 \leq & & 8 \\
& x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5 \in \{0, 1\} & &
\end{aligned}
$$

# Zaino sull'istanza: duale del rilassamento LP

## Zaino sull'istanza — duale del rilassamento LP

$$
\begin{aligned}
\min\ & 10v_1 + 9v_2 + 8v_3 \\
\text{soggetto a}\ & 6v_1 + v_2 + 3v_3 \geq 10 \\
& 4v_1 + 3v_2 + 2v_3 \geq 9 \\
& 3v_1 + 4v_2 + 2v_3 \geq 7 \\
& 3v_1 + 2v_2 + 4v_3 \geq 6 \\
& 2v_1 + 3v_2 + v_3 \geq 4 \\
& v_1, \quad v_2, \quad v_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

# I due bound: l'euristica

- Euristica costruttiva per rapporto fra valore e consumo complessivo
- I rapporti sono

$$\frac{10}{10} = 1, \quad \frac{9}{9} = 1, \quad \frac{7}{9}, \quad \frac{6}{9}, \quad \frac{4}{6}$$

- Si prendono la lavorazione 1 e poi la 2; nessun'altra ci sta più perché l'acciaio è finito
- Valore $10 + 9 = 19$. In un **massimo** l'euristica dà un **lower** bound:

$$LB = 19 \leq z(MILP)$$

# I due bound: il duale a mano

- Ricetta 3, adattata: si paga *una sola* risorsa
- Scelta la risorsa $i$, si pone $\bar{v}_i = \max_j p_j / a_{ij}$ e tutte le altre a zero: ogni vincolo duale è soddisfatto dal solo termine $a_{ij}\bar{v}_i \geq p_j$
- Le tre scelte danno
  - acciaio: $10 \cdot \frac{7}{3} = \frac{70}{3}$
  - tornio: $9 \cdot 10 = 90$
  - collaudo: $8 \cdot \frac{9}{2} = 36$
- La più conveniente è l'acciaio. In un **massimo** il duale dà un **upper** bound:

$$z(MILP) \leq UB = \frac{70}{3} \approx 23{,}33$$

# Il sandwich

$z(MILP) = 22$ (lavorazioni 2, 3 e 4, che saturano tutte e tre le risorse), $z(LP) = 159/7 \approx 22{,}71$, $z(LP^+) = 22$:

$$19 \leq z(MILP) = 22 = z(LP^+) \leq z(LP) = \frac{159}{7} \leq UB = \frac{70}{3}$$

| | |
|---|---|
| $LB$ (euristica costruttiva) | 19 |
| $z(MILP)$ | 22 |
| $z(LP^+)$ | 22 |
| $z(LP)$ | 159/7 |
| $UB$ (duale a mano) | 70/3 |
| gap euristica | 13,6% |

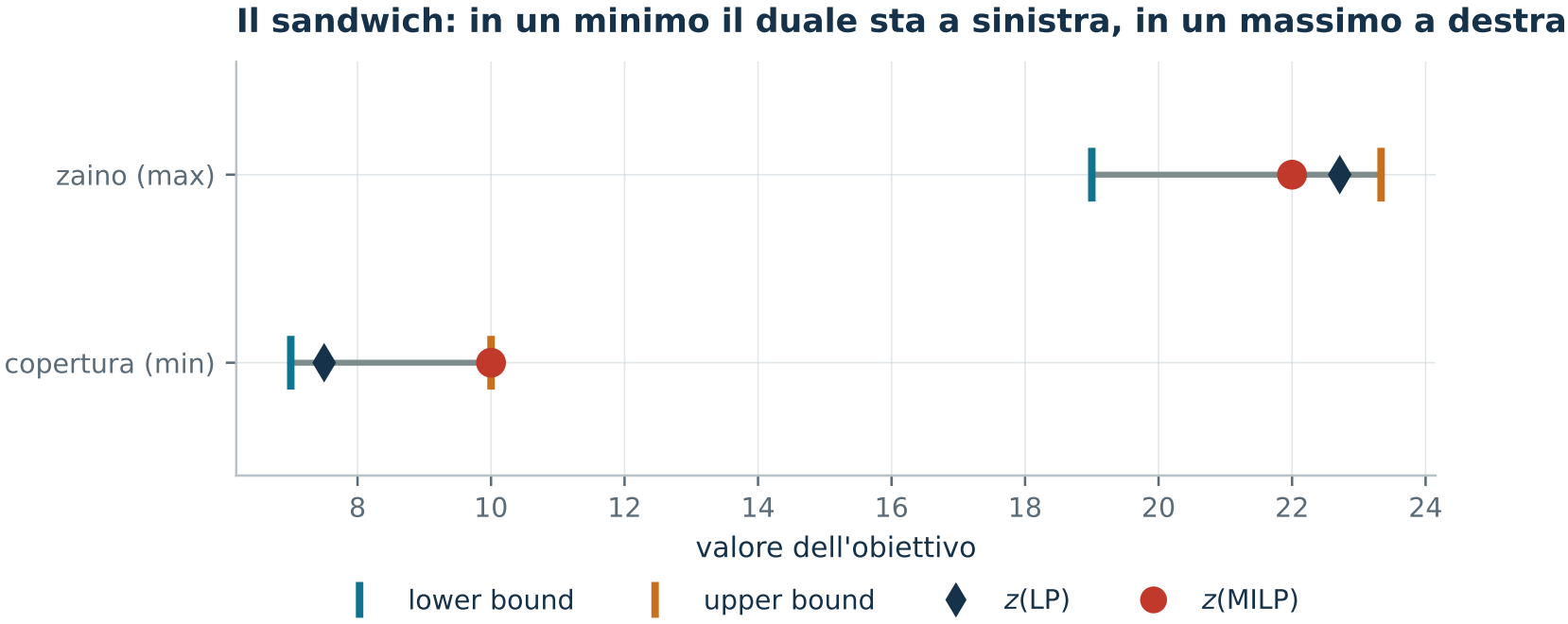
# Come si legge il sandwich

- Qui il duale a mano *non* è ottimo per il rilassamento:

$$\frac{70}{3} > \frac{159}{7}$$

- Pagare una sola risorsa è una ricetta valida, ma grossolana: ignora che le altre due sono sature anche loro
- Il rilassamento con i bound vale 22 e coincide con l'ottimo intero
- Il vincolo $x_j \leq 1$ morde: senza di esso l'LP prende più di una unità della lavorazione migliore

# I due esempi a confronto




In un minimo il bound duale sta a sinistra dell'ottimo e l'euristica a destra; in un massimo i ruoli si scambiano.

# Il sandwich scritto una volta per tutte (1/2)

**Minimo**:

$$LB(\bar{\pi}) \leq z(D(LP)) = z(LP) \leq z(LP^+) \leq z(MILP) \leq UB(\bar{x})$$

**Massimo**:

$$LB(\bar{x}) \leq z(MILP) \leq z(LP^+) \leq z(LP) = z(D(LP)) \leq UB(\bar{\pi})$$

dove

- $(\bar{\pi}_1, \ldots, \bar{\pi}_m)$ è una soluzione duale ammissibile del rilassamento, di valore $\sum_{i=1}^{m} b_i \bar{\pi}_i$
- $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ è una soluzione ammissibile del MILP, di valore $\sum_{j=1}^{n} c_j \bar{x}_j$

# Il sandwich scritto una volta per tutte (2/2)

- Il *lato del rilassamento* è **ottimistico** e contiene tutti i bound duali
- Il *lato dell'euristica* è **pessimistico** e contiene tutte le soluzioni ammissibili
- Il nome ($LB$ o $UB$) dipende dal verso dell'obiettivo, il ruolo no

# Riepilogo

**Zaino a più risorse**:

- Primale di massimo con vincoli $\leq$: duale di minimo con $v_i \geq 0$
- Euristica: $LB = 19$; duale a mano (una sola risorsa): $UB = 70/3$
- $z(MILP) = z(LP^+) = 22$, $z(LP) = 159/7$

**In generale**:

- Lato del rilassamento ottimistico, lato dell'euristica pessimistico
- Il nome del bound dipende dal verso, il ruolo no

# Disuguaglianze valide e vincoli che preservano l'ottimalità

# Introduzione: Disuguaglianze valide

- Aggiungere vincoli può **stringere** il rilassamento senza cambiare l'ottimo intero
- Distinguiamo due nozioni diverse: **disuguaglianze valide** e **vincoli che preservano l'ottimalità**
- Vediamo il **taglio di copertura** per lo zaino, su un'istanza

# Due nozioni diverse (1/2)

- Una **disuguaglianza valida** per un MILP è soddisfatta da *tutte* le soluzioni ammissibili intere
  - aggiungerla non cambia $z(MILP)$
  - può ridurre $z(LP^+)$, e allora si chiama **taglio**
- Un **vincolo che preserva l'ottimalità** taglia alcune soluzioni ammissibili, ma non tutte quelle ottime
  - dopo l'aggiunta esiste ancora un ottimo, e $z(MILP)$ non cambia
  - non è una disuguaglianza valida, e va dichiarato come tale

# Due nozioni diverse (2/2)

**Esempio**:

- Sia $z$ una variabile che l'obiettivo minimizza e che compare solo in vincoli $z \geq t_j x_j$
- Imporre in più $z \leq My$, con $y$ una binaria di attivazione, taglia soluzioni ammissibili (quelle con $y = 0$ e $z$ positiva)
- Non taglia quelle ottime: all'ottimo $z$ è già tirata in basso dall'obiettivo

**La differenza conta**:

- la prima si può aggiungere sempre
- la seconda soltanto se si è dimostrato che almeno un ottimo sopravvive, e mai se si vogliono enumerare *tutte* le soluzioni ottime

# Il taglio di copertura per lo zaino

- Un insieme $S$ di oggetti è una **copertura** se

$$\sum_{j \in S} w_j > b$$

cioè non ci stanno tutti insieme

- Allora

$$\sum_{j \in S} x_j \leq |S| - 1$$

è una disuguaglianza valida

- La copertura è **minimale** se nessun suo sottoinsieme proprio è già una copertura: i tagli delle coperture minimali sono i più forti

# Esempio: coperture minimali

Istanza dello zaino: $w = (5, 4, 3, 3)$, $b = 9$.

- Le coperture minimali sono le quattro terne

$$\{1, 2, 3\}, \quad \{1, 2, 4\}, \quad \{1, 3, 4\}, \quad \{2, 3, 4\}$$

  di peso 12, 12, 11, 10: tutte $> 9$, e nessuna coppia lo è

- I quattro tagli sono

$$\sum_{j \in S} x_j \leq 2$$

- La soluzione ottima del rilassamento, $z(LP^+) = 71/4$, è

$$\tilde{x} = (1,\ 1/4,\ 1,\ 0)$$

# Esempio: i tagli sulla soluzione del rilassamento

| $S$ | $\sum_{j \in S} \tilde{x}_j$ | $\lvert S \rvert - 1$ | |
|---|---|---|---|
| $\{1,2,3\}$ | $9/4$ | 2 | **violato**: il taglio serve |
| $\{1,2,4\}$ | $5/4$ | 2 | soddisfatto |
| $\{1,3,4\}$ | 2 | 2 | soddisfatto (all'uguaglianza) |
| $\{2,3,4\}$ | $5/4$ | 2 | soddisfatto |

- Con i quattro tagli $z(LP^+)$ scende da $71/4 = 17{,}75$ a $69/4 = 17{,}25$, e $z(MILP)$ resta 17
- Il rilassamento si è avvicinato all'ottimo intero senza cambiarlo: è il meccanismo con cui un solver moderno chiude i gap

# Riepilogo

**Due nozioni**:

- Disuguaglianza valida: non toglie soluzioni intere; se riduce $z(LP^+)$ è un taglio
- Vincolo che preserva l'ottimalità: toglie soluzioni ammissibili ma non tutte le ottime; va dichiarato

**Taglio di copertura**:

- $\sum_{j \in S} x_j \leq |S| - 1$ per ogni copertura $S$
- Sull'istanza: $z(LP^+)$ da 17,75 a 17,25, con $z(MILP) = 17$

# Formulazioni più forti

# Introduzione: Formulazioni più forti

- Lo stesso problema si può scrivere con formulazioni diverse
- Vediamo il criterio per dire che una è **più forte** di un'altra, e come lo si dimostra
- E perché più forte non significa automaticamente più veloce

# Il criterio (1/2)

Due formulazioni $A$ e $B$ dello stesso problema si confrontano in due passi.

1. **Stesso insieme intero**:

$$X_A \cap \mathbb{Z}^n = X_B \cap \mathbb{Z}^n$$

   - senza questo passaggio non si sta confrontando nulla
   - si dimostra nei due versi, usando la binarietà o l'interezza dove serve

2. **Rilassamento**: $B$ è *più forte* di $A$ se $X_B \subseteq X_A$ come poliedri, e allora $z_B(LP^+)$ è almeno buono quanto $z_A(LP^+)$
   - se l'inclusione è stretta *e* si esibisce un punto di $X_A \setminus X_B$ ottimo per il rilassamento di $A$, il miglioramento è dimostrato su quell'istanza

# Il criterio (2/2): l'attivazione

Il caso di riferimento è l'**attivazione**: il legame fra «il cliente $i$ è servito dalla sede $j$» ($x_{ij}$) e «la sede $j$ è aperta» ($y_j$).

- **Disaggregata**: $x_{ij} \leq y_j$ per ogni coppia
- **Aggregata**: $\sum_i x_{ij} \leq n\, y_j$ per ogni sede

- La prima implica la seconda, quindi il disaggregato è più forte
- Su tre clienti e due sedi il rilassamento passa da 38/3 a 15, che è già l'ottimo intero

# Più forte non significa più veloce

**Osservazione 3: Più forte non significa più veloce**

*Una formulazione più forte ha meno nodi ma righe in più, e ogni nodo costa di più. Il bilancio dipende dall'istanza.*

Quello che si può *dimostrare* è la forza del rilassamento;

la velocità si *misura*.

# Riepilogo

**Confronto fra formulazioni**:

- Primo: stesso insieme intero, dimostrato nei due versi
- Poi: $X_B \subseteq X_A$ come poliedri $\Rightarrow$ $B$ più forte
- Attivazione: il disaggregato $x_{ij} \leq y_j$ è più forte dell'aggregato

**Attenzione**:

- La forza si dimostra, la velocità si misura

# Quello che dice il solver

# Introduzione: Quello che dice il solver

- Gurobi riporta diversi attributi alla fine di una risoluzione
- Vediamo quali leggere, e in quale **ordine**
- E perché `ObjBound` non va confuso con il rilassamento del modello scritto

# I quattro attributi da leggere, e in quale ordine

1. `Status`: 2 è `OPTIMAL`, 3 `INFEASIBLE`, 9 `TIME_LIMIT`. Va letto *prima* di ogni altra cosa
2. `SolCount`: quante soluzioni intere sono state trovate. Se è 0, `ObjVal` non esiste e leggerlo è un errore
3. `ObjVal` e `ObjBound`: la migliore soluzione trovata e il miglior bound dimostrato. In un minimo

$$\texttt{ObjBound} \leq z(MILP) \leq \texttt{ObjVal}$$

4. `MIPGap` e `NodeCount`: il divario certificato fra i due e quanti nodi sono stati esplorati

# `ObjBound` non è il rilassamento della radice (1/2)

**Osservazione 4: `ObjBound` non è il rilassamento della radice**

*Sull'istanza di copertura il rilassamento del modello come lo abbiamo scritto vale* $15/2$ *e l'ottimo intero* $10$*. Eppure Gurobi riporta* $\texttt{ObjBound} = 10$ *e* $\texttt{NodeCount} = 0$*.*

- Ha chiuso il gap nella radice, con presolve, tagli propri ed euristiche, senza mai ramificare
- Spegnendoli (`Presolve = Cuts = Heuristics = 0`) lo stesso modello dà lo stesso ottimo 10 ma con 5 nodi

# `ObjBound` non è il rilassamento della radice (2/2)

Due conseguenze:

- «Quanto è difficile un modello» non è una proprietà del solo modello: dipende anche da che cosa il solver mette in campo
- Il rilassamento di cui parliamo nei bound a mano è quello del modello scritto, e va ottenuto con `relax()`
- Leggere `ObjBound` a fine risoluzione dà l'ottimo, non il rilassamento

# Riepilogo

**Ordine di lettura**:

- `Status`, poi `SolCount`, poi `ObjVal` e `ObjBound`, poi `MIPGap` e `NodeCount`

`ObjBound`:

- È il miglior bound dimostrato dal solver, con i suoi strumenti
- Non è il rilassamento del modello scritto: per quello si usa `relax()`

# I duali dell'LP non sono i prezzi marginali del MILP

# Introduzione: I duali dell'LP e i prezzi marginali

- In un LP le variabili duali hanno un'interpretazione come **prezzi marginali** delle risorse
- Mostriamo con un controesempio che per un MILP questa interpretazione è falsa
- E vediamo che cosa, del duale dell'LP, resta vero

# L'affermazione

- In un LP, il duale $\tilde{\pi}_i$ di un vincolo di risorsa è il suo **prezzo marginale**
- Aumentando $b_i$ di una piccola quantità, l'ottimo varia di $\tilde{\pi}_i$ per unità (finché la base non cambia)

**Per un MILP questo è falso**,
e non per approssimazione.

# Il controesempio: lo zaino al variare della capacità

| $b$ | $z(MILP)$ | $z(LP^+)$ | duale LP | variazione vera |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 16 | 16 | 2 | — |
| 9 | 17 | 71/4 | 7/4 | +1 |
| 10 | 17 | 39/2 | 7/4 | 0 |
| 11 | 20 | 85/4 | 7/4 | +3 |
| 12 | 23 | 23 | 7/4 | +3 |

L'ultima colonna è la variazione vera di $z(MILP)$ rispetto alla riga precedente.

# Come si legge il controesempio

- Il duale dell'LP è il rapporto $p_j/w_j$ dell'oggetto «critico»:
  - vale 2 quando la capacità si esaurisce sull'oggetto 1
  - vale $7/4$ quando avanza spazio per il 2
- La variazione vera dell'ottimo intero è **a scatti**:
  - da $b = 9$ a $b = 10$ non cambia *affatto* (nessun sottoinsieme sfrutta l'unità in più), mentre il duale promette $7/4$
  - da 10 a 11 salta di 3

# Che cosa si può dire, allora

**Osservazione 5: Che cosa si può dire, allora**

*Del duale dell'LP resta vero l'unico uso che questo corso ne fa: è un* ***bound****.*

- $\tilde{\pi}_i$ dice quanto vale la risorsa *nel rilassamento*, e $\sum_i b_i \tilde{\pi}_i$ è un bound valido per il MILP
- Come indicazione gestionale («conviene comprare un'unità in più?») va verificata risolvendo di nuovo il MILP
- La differenza $z(MILP)(b_i + 1) - z(MILP)(b_i)$ è l'unica risposta corretta, e non c'è una formula chiusa che la dia

# Riepilogo

**Prezzi marginali**:

- In un LP il duale è il prezzo marginale della risorsa
- In un MILP la variazione dell'ottimo è a scatti: il duale dell'LP non la descrive

**Che cosa resta**:

- Il duale dell'LP dà un bound valido
- Il valore di un'unità in più si ottiene solo risolvendo di nuovo il MILP

# Il protocollo dei bound

# Introduzione: Il protocollo dei bound

- Davanti a un modello qualunque, il percorso per stringere il sandwich è sempre lo stesso
- Conviene farlo nell'ordine: sei passi, dai due bound a mano fino alle considerazioni aggiuntive

# Il protocollo (1/2)

1. una soluzione **ammissibile e intera**, costruita a mano, verificata su tutti i vincoli *e* sull'interezza: è il controllo di interezza a renderla un bound del MILP e non del solo rilassamento
2. il **duale del rilassamento senza i bound**, scritto in forma generale e poi sull'istanza, con i versi presi dalla tabella di conversione
3. una **soluzione duale ammissibile costruita a mano**, con la ricetta dichiarata, verificata ammissibile e valutata

# Il protocollo (2/2)

4. i due **rilassamenti** $z(LP)$ e $z(LP^+)$, con l'annotazione se coincidono e perché
5. l'**ottimo** $z(MILP)$ e la tabella $UB \cdot LB \cdot z(LP) \cdot z(LP^+) \cdot z(MILP)$ con il gap
6. le **considerazioni aggiuntive**: disuguaglianze valide con il loro conteggio, vincoli che preservano l'ottimalità dichiarati come tali, confronto dei rilassamenti fra formulazioni alternative

# I due lati del sandwich

I passi 1 e 3 sono i due lati del sandwich,
e sono gli unici che si possono costruire senza un solver.

I passi 4 e 5 servono a misurare
quanto i primi due erano buoni.

# Riepilogo finale (1/2)

- Un **rilassamento** allarga l'insieme ammissibile: $z(LP) \leq z(LP^{+}) \leq z(LP^{++}) \leq z(MILP)$ in un minimo
- La **tabella di conversione** dà il duale del rilassamento; la **dualità debole** rende un bound ogni soluzione duale ammissibile
- Tre **ricette** per costruire a mano una soluzione duale: azzerare e saturare, euristica sui vincoli, rapporto migliore
- In un minimo il duale dà $LB$ e l'euristica $UB$; in un massimo i ruoli si scambiano

# Riepilogo finale (2/2)

- **Disuguaglianze valide** e tagli stringono il rilassamento senza cambiare l'ottimo
- Una formulazione **più forte** ha un rilassamento migliore, ma non per forza è più veloce
- Del **solver** si leggono `Status`, `SolCount`, `ObjVal`/`ObjBound`, `MIPGap`; `ObjBound` non è il rilassamento
- I duali dell'LP **non** sono i prezzi marginali del MILP, ma restano un bound
- Il **protocollo dei bound** mette tutto in ordine, in sei passi