

Laboratorio di Ricerca Operativa

Modelli continui di ottimizzazione per l'Ingegneria Gestionale

Fabio Furini

Sapienza Università di Roma

A.A. 2026–2027

Indice del corso

Strumenti

- Introduzione e filosofia del corso
- Teoria: programmazione lineare
- Teoria: ottimizzazione non lineare
- Implementazione: modelli lineari e non lineari

Modelli deterministici

- Produzione e scorte (LP/QP)
- Supply chain e CO₂ (LP/NLP)
- Portafoglio di Markowitz (QP)
- Pricing (NLP)

- Budget pubblicitario (NLP convesso)
- Localizzazione continua (NLP convesso)
- Ricarica di veicoli elettrici (LP/QP)
- Code e capacità (NLP convesso)

Incertezza e machine learning

- Newsvendor (LP stocastico)
- VaR e CVaR (LP)
- Arbitraggio e prezzatura (LP)
- Support Vector Machine (QP)

Organizzazione del laboratorio

Introduzione

Di che cosa si occupa questo laboratorio

- Trasformare **decisioni aziendali** in modelli di ottimizzazione: quanto produrre, dove localizzare, che prezzo fissare, quanto rischio accettare.
- Implementare i modelli in **Python + Gurobi**, risolverli e — soprattutto — **interrogarli**: quanto vale un'ora di capacità in più? la soluzione regge se i dati cambiano del 5%?
- Solo **variabili continue**: valgono dualità, prezzi ombra e condizioni KKT — gli strumenti che trasformano numeri in spiegazioni economiche.

La domanda finale di ogni esercitazione

Non solo *“qual è l'ottimo?”*, ma *“quale decisione suggeriamo e quanto è robusta?”*

Notazione e sigle

- **LP** programmazione lineare; **QP** quadratica; **NLP** non lineare. *Convesso* = ogni minimo locale è globale.
- Scalari e indici minuscoli (x_{it}, λ); **vettori** minuscoli in grassetto (x); **matrici** maiuscole in grassetto (Q); **oggetti numerati** con indici su insiemi enumerati: $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ — la notazione del testo è già quella del modello; dati razionali ($\mathbb{Q}$), conteggi interi ($\mathbb{Z}_{\geq 1}$).
- Variabili duali π_i , costi ridotti $\bar{c}_j$, scarti $\bar{s}_i$; la **barra** indica i valori di una soluzione ammissibile, la **tilde** quelli di una soluzione ottima ($\tilde{x}_j, \tilde{z}$).
- In ogni modello: prima i **dati** (con il loro tipo), poi le **variabili**, poi obiettivo e vincoli spiegati riga per riga.

Teoria: programmazione lineare

La coppia primale-duale (forma generale)

Dati: costi c_j ($j \in N$), coefficienti a_{ij} , termini noti b_i ($i \in M$). $M_{\leq}, M_{=}, M_{\geq}$ ripartiscono M per verso; $N_{\geq 0}, N_{\leq 0}, N_{\leq 0}$ ripartiscono N per segno.

$$(P) \quad \max \sum_{j \in N} c_j x_j$$

$$\text{soggetto a } \sum_{j \in N} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad \forall i \in M_{\leq},$$

$$\sum_{j \in N} a_{ij} x_j = b_i, \quad \forall i \in M_{=},$$

$$\sum_{j \in N} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad \forall i \in M_{\geq},$$

$$x_j \geq 0, \quad \forall j \in N_{\geq 0},$$

$$x_j \leq 0, \quad \forall j \in N_{\leq 0},$$

$$x_j \leq 0, \quad \forall j \in N_{\leq 0}.$$

$$(D) \quad \min \sum_{i \in M} b_i \pi_i$$

$$\text{soggetto a } \sum_{i \in M} a_{ij} \pi_i \geq c_j, \quad \forall j \in N_{\geq 0},$$

$$\sum_{i \in M} a_{ij} \pi_i = c_j, \quad \forall j \in N_{=0},$$

$$\sum_{i \in M} a_{ij} \pi_i \leq c_j, \quad \forall j \in N_{\leq 0},$$

$$\pi_i \geq 0, \quad \forall i \in M_{\leq},$$

$$\pi_i \leq 0, \quad \forall i \in M_{=},$$

$$\pi_i \leq 0, \quad \forall i \in M_{\geq}.$$

Le regole della dualità

Primale (max)	Duale (min)
vincolo $\leq b_i$ ($i \in M_{\leq}$)	variabile $\pi_i \geq 0$
vincolo $= b_i$ ($i \in M_{=}$)	variabile $\pi_i \geq 0$
vincolo $\geq b_i$ ($i \in M_{\geq}$)	variabile $\pi_i \leq 0$
variabile $x_j \geq 0$ ($j \in N_{\geq 0}$)	vincolo $\geq c_j$
variabile $x_j \geq 0$ ($j \in N_{\geq 0}$)	vincolo $= c_j$
variabile $x_j \leq 0$ ($j \in N_{\leq 0}$)	vincolo $\leq c_j$

- Le **uguaglianze** del primale danno duali **libere** (e viceversa).
- Per un primale di *minimo* la tabella si legge da destra a sinistra.

I due teoremi della dualità

Dualità debole

Per ogni $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ ammissibile di (P) e ogni $(\bar{\pi}_1, \dots, \bar{\pi}_m)$ ammissibile di (D):

$$\sum_{j \in N} c_j \bar{x}_j \leq \sum_{i \in M} b_i \bar{\pi}_i$$

(ogni duale ammissibile è un **limite superiore** per il primale di massimo).

Dualità forte

(P) ha un ottimo $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \iff$ (D) ha un ottimo $(\tilde{\pi}_1, \dots, \tilde{\pi}_m)$, e in tal caso il divario si chiude:

$$\sum_{j \in N} c_j \tilde{x}_j = \sum_{i \in M} b_i \tilde{\pi}_i.$$

Costruire il duale con le regole: l'LP 2×2

Forma canonica di massimo: ogni vincolo $\leq$ dà una $\pi_i \geq 0$; ogni variabile ≥ 0 dà un vincolo $\geq c_j$ (coefficienti per **colonna**); l'obiettivo scambia i ruoli.

$$\begin{array}{ll}\max & 30x_1 + 50x_2 \\ \text{soggetto a} & x_1 + 3x_2 \leq 90, \\ & 2x_1 + x_2 \leq 80, \\ & x_1, x_2 \geq 0.\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\min & 90\pi_1 + 80\pi_2 \\ \text{soggetto a} & \pi_1 + 2\pi_2 \geq 30, \\ & 3\pi_1 + \pi_2 \geq 50, \\ & \pi_1, \pi_2 \geq 0.\end{array}$$

Costruire il duale: tutti i casi in un solo LP

Un *minimo* con tre versi e tre segni (tabella da destra a sinistra):

$$\begin{array}{llll} \min & 5x_1 + 8x_2 - 9x_3 & & \\ \text{sogg. a} & x_1 + x_2 & \geq & 30, \\ & x_1 + x_2 - x_3 & = & 100, \\ & x_1 - 2x_2 & \leq & -20, \\ & x_1 & \geq & 0, \\ & & x_2 & \geq 0, \\ & & & x_3 \leq 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \max & 30\pi_1 + 100\pi_2 - 20\pi_3 & & \\ \text{sogg. a} & \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 & \leq & 5, \\ & \pi_1 + \pi_2 - 2\pi_3 & = & 8, \\ & -\pi_2 & \geq & -9, \\ & \pi_1 & \geq & 0, \\ & & \pi_2 & \geq 0, \\ & & & \pi_3 \leq 0. \end{array}$$

Le condizioni di ottimalità dell'LP: gli scarti complementari

Scarto di un vincolo e costo ridotto di una variabile (lo scarto del corrispondente vincolo *duale*):

$$\bar{s}_i = \sum_{j \in N} a_{ij} \bar{x}_j - b_i, \quad \bar{c}_j = c_j - \sum_{i \in M} a_{ij} \bar{\pi}_i.$$

Teorema (scarti complementari)

$(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n), (\bar{\pi}_1, \dots, \bar{\pi}_m)$ ammissibili sono **ottime** per (P) e (D) $\iff$

$$\bar{\pi}_i \cdot \bar{s}_i = 0 \quad \forall i \in M, \quad \bar{x}_j \cdot \bar{c}_j = 0 \quad \forall j \in N.$$

- **Vincolo lasco $\Rightarrow$ duale a zero**; variabile $\neq 0 \Rightarrow$ costo ridotto nullo (implicazioni: degenerazione).

I segni dei prezzi ombra

Convenzione unica: $\tilde{\pi}_i = \frac{\partial \tilde{z}}{\partial b_i}$, valido per $b_i \in [b_i^{\min}, b_i^{\max}]$ (intervallo di validità)

- Due domande: aumentare b_i **allarga** ($\leq$) o **restringe** ($\geq$) la regione ammissibile? E una regione più ampia non può mai peggiorare l'ottimo.

Verso del vincolo	minimo	massimo
$\leq$ ($b_i \uparrow \Rightarrow$ regione più ampia)	$\tilde{\pi}_i \leq 0$	$\tilde{\pi}_i \geq 0$
$\geq$ ($b_i \uparrow \Rightarrow$ regione più stretta)	$\tilde{\pi}_i \geq 0$	$\tilde{\pi}_i \leq 0$
$=$	segno qualunque (duale libera)	

- In un minimo: $\leq$ (capacità) $\Rightarrow$ allentare riduce il costo, $|\tilde{\pi}_i|$ = risparmio marginale; $\geq$ (richiesta) $\Rightarrow \tilde{\pi}_i$ = costo marginale. Vincolo non attivo: $\tilde{\pi}_i = 0$.

Dualità sull'LP 2×2 : risolvendo si ottiene, noi verifichiamo

1. **Risolvendo si ottiene:** $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = (30, 20)$, $\tilde{z} = 1900$, $(\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2) = (14, 8)$, $(\bar{c}_1, \bar{c}_2) = (0, 0)$; vincoli attivi.
2. Verifica (scarti complementari): $x_1, x_2 \neq 0 \Rightarrow$ vincoli duali attivi: $14 + 16 = 30 = c_1$, $42 + 8 = 50 = c_2$. ✓
3. Verifica della dualità forte: $90 \cdot 14 + 80 \cdot 8 = 1900 = \tilde{z}$. ✓
4. Costi ridotti $\bar{c}_j = c_j - \sum_i a_{ij} \tilde{\pi}_i$: $\bar{c}_1 = 30 - (14 + 16) = 0$, $\bar{c}_2 = 50 - (42 + 8) = 0$ (nulli: variabili diverse da zero — attenzione alla **degenerazione**: esistono anche variabili a zero con $\bar{c} = 0$).

Sensitività sull'esempio 2×2 : prezzi ombra e costi ridotti

Prezzi ombra

Aumentare b_1 di una unità pagando 12? Conviene ($14 > 12$). Con $b_1 = 100$:
 $2040 = 1900 + 10 \cdot 14$ — esatto finché b_1 resta nell'intervallo di validità $[b_1^{\min}, b_1^{\max}] = [40, 240]$.
Un vincolo non attivo ha sempre prezzo ombra nullo.

Costi ridotti: conviene una terza variabile?

Coefficiente $c_3 = 20$, consumi $a_{13} = a_{23} = 1$:

- ai prezzi ombra le risorse valgono $1 \cdot 14 + 1 \cdot 8 = 22 > 20$;
- risolvendo: $\tilde{x}_3 = 0$ con $\bar{c}_3 = 20 - 22 = -2$ e $c_3^{\max} = 22 \Rightarrow$ conviene solo da $c_3 = 22$ in su;
- controprova con $c_3 = 23$: la soluzione cambia in $(0, 5, 75)$, valore 1975;
- intervalli di validità dei coefficienti: c_1 può variare in $[16, 7, 100]$ senza cambiare la soluzione.

Tutti i casi in un solo LP: verifica delle condizioni

- **Risolvendo si ottiene:** $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = (60, 40, 0)$, $\tilde{z} = 620$; $(\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \tilde{\pi}_3) = (0, 6, -1)$; $(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3) = (0, 0, -3)$; intervalli dei coefficienti $(-\infty, 8]$, $[5, 17]$, $(-\infty, -6]$.
- Verifiche: $\tilde{\pi}_1 = 0$ (vincolo lasco: $100 > 30$); $\tilde{\pi}_2 = 6$ (uguaglianza, duale libera); $\tilde{\pi}_3 = -1 \leq 0$ ($\leq$ in un minimo); dualità forte $600 + 20 = 620$. ✓
- x_3 al **bound superiore** (zero): $\bar{c}_3 = -9 + 6 = -3$, soglia $c_3^{\max} = -6$; perturbazioni: $b_2+1 \rightarrow 626$, $b_3+1 \rightarrow 619$, $x_3 = -1 \rightarrow 623$. ✓

Teoria: ottimizzazione non lineare

Un QP 2×2 , svolto per intero

Obiettivo quadratico separabile, un vincolo di soglia sulla somma:

$$\begin{array}{ll} \min & x_1^2 + 2x_2^2 \\ \text{soggetto a} & x_1 + x_2 \geq 6, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

- $Q = \text{diag}(2, 4) \succ 0$: convesso $\Rightarrow$ ottimo globale certificato.
- **Risolvendo si ottiene:** $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = (4, 2)$, $\tilde{f} = 24$, $\lambda = 8$.
- Verifica: vincolo attivo ($4 + 2 = 6$) e **derivate uguali** $2\tilde{x}_1 = 8 = 4\tilde{x}_2 =$ prezzo ombra della soglia. ✓

Condizioni KKT

Per $\min f(x_1, \dots, x_n)$ soggetto a $g_i(x_1, \dots, x_n) \leq 0$, $h_j(x_1, \dots, x_n) = 0$, con Lagrangiana $L = f + \sum_i \lambda_i g_i + \sum_j \nu_j h_j$ ($\lambda_i \geq 0$), in un ottimo regolare $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$:

$$\frac{\partial L}{\partial x_k}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) = 0, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (\text{stazionarietà})$$

$$\lambda_i g_i(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) = 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad (\text{complementarietà})$$

Se il problema è convesso, sono anche **sufficienti**.

Esempio svolto: le KKT sul QP dell'esempio

$\min x_1^2 + 2x_2^2$ soggetto a $x_1 + x_2 \geq 6$: stazionarietà $2x_1 = \lambda$, $4x_2 = \lambda$; vincolo attivo $\Rightarrow \lambda = 8$, $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = (4, 2)$, $\tilde{f} = 24$. Con termine noto $6 + \varepsilon$: $\tilde{f} = 24 + 8\varepsilon + \frac{2}{3}\varepsilon^2$ — il moltiplicatore è la derivata dell'ottimo.

- Nel caso lineare le KKT **sono** gli scarti complementari della coppia (P)–(D): moltiplicatori = duali π_i .
- Quando i duali non sono disponibili: stimarli **per perturbazione**.

Il protocollo di analisi di sensitività (in ogni esercitazione)

1. **Scenario base:** risolvere, verificare, vincoli attivi.
2. **One-at-a-time:** un parametro chiave su una griglia.
3. **Prezzi ombra e costi ridotti:** duale vs ri-ottimizzazione perturbata; $\bar{c}_j$ delle variabili a zero = soglia di convenienza.
4. **Scenari:** pessimistico, centrale, ottimistico.
5. **Trade-off:** una frontiera (costo-servizio, rischio-rendimento, costo-CO₂).
6. **Stabilità:** dati $\pm 5\%$.

Implementazione: modelli lineari

Costruire un modello in cinque passi

```
m = gp.Model("produzione")           # 1. contenitore
x = m.addVars(prodotti, mesi, name="x") # 2. variabili (>= 0)
m.addConstrs((x.sum("*", t) <= b[t]     # 3. vincoli
              for t in mesi), name="cap")
m.setObjective(..., GRB.MINIMIZE)      # 4. obiettivo
m.write("modello.lp"); m.optimize()    # 5. debug + soluzione
```

- Variabili **libere** (SVM: b ; CVaR: η): `m.addVar(lb=-GRB.INFINITY)` — dimenticarlo è l'errore più comune!
- Somme: `gp.quicksum(...)` o `x.sum(i, "*")`.

Leggere la soluzione

```
if m.Status == GRB.OPTIMAL:          # SEMPRE prima di leggere numeri
    print(m.ObjVal, x[i,t].X)
elif m.Status == GRB.INFEASIBLE:
    m.computeIIS(); m.write("conflitto.ilp")
```

Pi	prezzo ombra del vincolo (LP)
Slack	scarto: $0 \Rightarrow$ vincolo attivo
RC	costo ridotto di una variabile a zero
SARHSLow/Up	intervallo di validità del prezzo ombra
SAObjLow/Up	intervallo di validità del costo ridotto

- Problemi di minimo, vincolo $\leq$: $Pi \leq 0$ (convenzione Gurobi).
- RHS con costanti a sinistra: Gurobi le sposta nel termine noto (**trappola** nell'analisi di sensitività — v. ricarica EV).

Checklist di interpretazione

1. Stato OPTIMAL? Se no: diagnosi (IIS, file .1p).
2. Ordine di grandezza dell'ottimo sensato?
3. Vincoli attivi = quelli attesi?
4. Prezzi ombra: quale risorsa potenziare per prima, e fino a che prezzo?
5. Stabilità: dati $\pm 5\%$.
6. Raccomandazione manageriale in tre righe.

Implementazione: modelli non lineari

Un solver solo: anche gli NLP generali in Gurobi

- Funzioni non lineari come **vincoli funzionali** su variabili ausiliarie:
`addGenConstrLog/Exp/Pow` con `FuncNonlinear=1`.
- Termini bilineari e rapporti con variabile ausiliaria e `NonConvex=2` (es. $w(\mu - \lambda) = 1$).
- Ottimo **globale certificato**, stessa checklist di interpretazione.
- Per le analisi marginali: `MIPGap`, `FeasibilityTol`, `OptimalityTol` a 10^{-9} ; riformulare per la scalatura (es. $q \cdot p^\varepsilon \leq A$, non $q \leq A p^{-\varepsilon}$).

Produzione e scorte multiperiodali (LP/QP)

Produzione e scorte — il problema

- **Decisioni:** produzione x_{it} e scorta s_{it} (non negative); **obiettivo:** costo minimo.
- **Dati:** domanda d_{it} , costi c_{it}, h_{it} , ore per unità a_i , ore disponibili b_t , scorta iniziale s_{i0} .

Modello (LP)

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^m (c_{it} x_{it} + h_{it} s_{it})$$

$$\text{soggetto a } s_{i,t-1} + x_{it} = d_{it} + s_{it}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall t \in \{1, 2, \dots, m\},$$

$$\sum_{i=1}^n a_i x_{it} \leq b_t, \quad \forall t \in \{1, 2, \dots, m\},$$

$$x_{it}, s_{it} \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall t \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Produzione e scorte — capire i vincoli

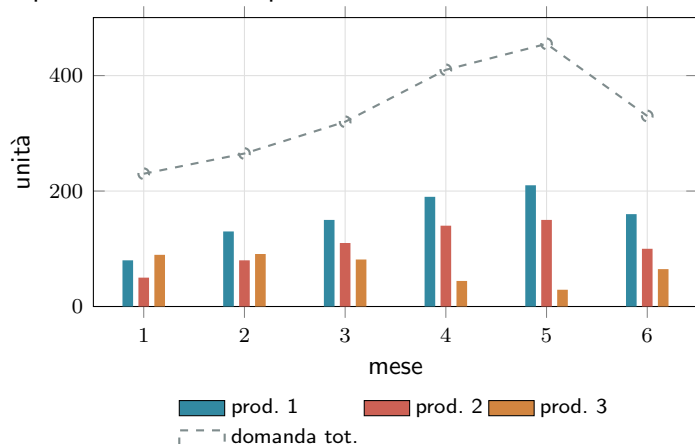
- **Obiettivo:** il modello scambia liberamente produzione anticipata (più giacenza) con produzione al limite di capacità.
- **Bilancio:** contabilità di magazzino; è il vincolo che **lega i mesi**: senza, il problema si spezza in $|T|$ problemi indipendenti.
- **Capacità:** la risorsa scarsa condivisa; il suo duale dice quanto vale un'ora in più.

Esempio a mano (1 prodotto, 2 mesi)

$d = (60, 100)$, capacità 80/mese, $c = 10$, $h = 1$: unico piano ammissibile $x = (80, 80)$, $s_1 = 20$, costo 1620 €. +1 ora nel mese 2 $\Rightarrow$ costo -1 € (un mese di giacenza in meno): duale mese 2 = -1 , mese 1 = 0.

Produzione e scorte — caso di studio

3 prodotti $\times$ 6 mesi, picco di domanda nei mesi 4–5, 420–460 ore/mese.



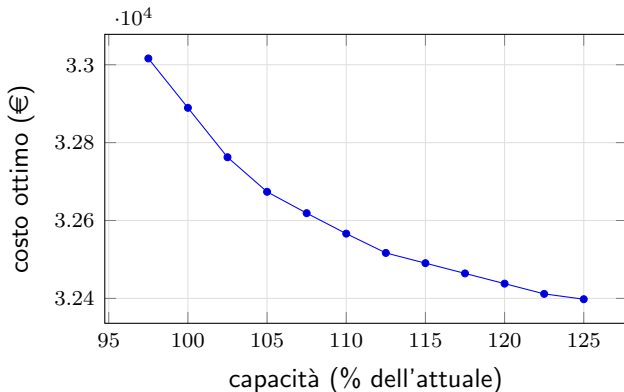
- Costo ottimo: **32.889 €**
- Il prodotto 3 (2,1 ore/unità) viene prodotto **in anticipo** (*pre-build*) e messo a scorta (fino a 107 unità) per liberare i mesi di picco.
- Scorte a zero nel mese finale: il modello non spreca.

Produzione e scorte — i prezzi ombra raccontano una storia

mese	1	2	3	4	5	6
uso ore	330/420	420/420	460/460	460/460	460/460	420/420
prezzo ombra (€/h)	0	-0,76	-1,52	-2,29	-3,05	-3,81

- I duali crescono di $0,762 = h_3/a_3$ al mese: un'ora in più nel mese t fa risparmiare **un mese di giacenza** del prodotto 3.
- Verifica per perturbazione: +1 ora nel mese 6 $\Rightarrow$ costo -3,810 € (coincide col duale).
- Quando solver e ragionamento economico danno lo stesso numero, il modello è probabilmente giusto.

Produzione e scorte — smoothing e valore della capacità



- Curva **convessa e decrescente**: le prime ore extra valgono molto.
- Sotto il 97%: **inammissibile** — la domanda non è più servibile.
- Variante QP con $\gamma \sum_{t>1} (v_t - v_{t-1})^2$: profilo quasi piatto (variazione max da 81 a 1 unità) per +114 € (+0,35%).

Take-away

Ore straordinarie nei mesi 5–6 convergono fino a 3–3,8 €/ora sotto il prezzo interno; il piano livellato è quasi gratis.

Supply chain con congestione e CO₂ (LP/NLP)

Supply chain — il problema

A parole. Decidere quante unità far viaggiare su ogni tratta della rete. Obiettivo: minimo costo di trasporto. Vincoli: conservazione del flusso in ogni nodo e capacità delle tratte.

Modello (flusso a costo minimo)

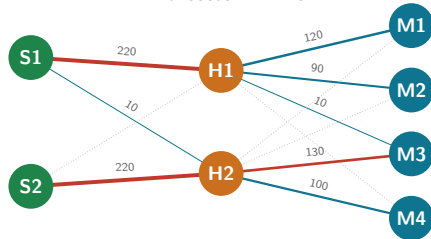
$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \text{ soggetto a } \sum_{j: (i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{j: (j,i) \in A} x_{ji} = b_i, \forall i \in N, \quad 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$$

Varianti sull'obiettivo: congestione quadratica $\sum (c_{ij} x_{ij} + \alpha c_{ij} x_{ij}^2 / u_{ij})$ (convessa); prezzo interno CO₂: $\sum (c_{ij} + \tau e_{ij}) x_{ij}$; minimax dell'utilizzo.

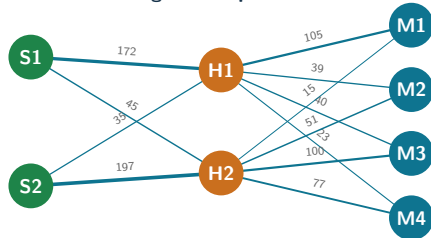
- Esempio a mano (2 rotte): l'LP satura la rotta economica; la congestione eguaglia i **costi marginali** e lascia margine di sicurezza.

Supply chain — caso di studio

LP a costo minimo



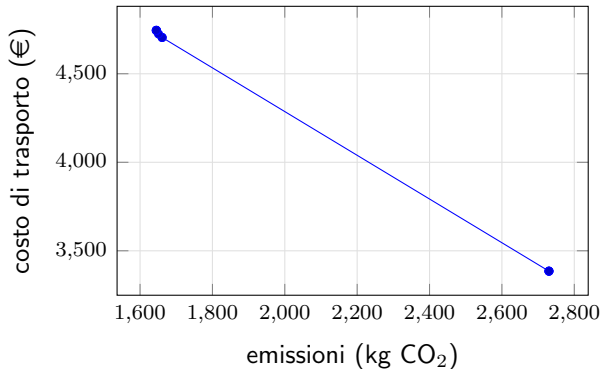
Congestione quadratica



2 stabilimenti → 2 hub → 4 mercati; tratte economiche “su strada” (inquinanti), care “su ferro” (pulite).

- LP: costo 3.385 €, 3 archi saturi (in rosso), emissioni 2.730 kg.
- Congestione: costo 3.703 €, nessun arco oltre il 90%.
- Prezzi ombra della domanda = costi marginali di servizio dei mercati: M1 8,00 — M4 10,50 €/unità.

Supply chain — il prezzo della CO₂



- $\tau \leq 1$: assetto “strada”: 3.385 € e 2.730 kg.
- $\tau \geq 1,5$: assetto “ferro”: 4.705 € e 1.661 kg.
- Soglia esatta, per bisezione: $\tau^* = 1,25$ €/kg.
- Le soluzioni LP stanno nei **vertici**: la frontiera procede a salti; sotto la soglia il prezzo interno non cambia nulla.

Attenzione

Il minimax puro ($\min z$) è degenere: ogni instradamento con utilizzo $\leq z^*$ è ottimo, anche se costoso. Combinarlo sempre con il costo.

Portafoglio di Markowitz (QP)

Markowitz — il problema

A parole. Ripartire il capitale tra n titoli. Obiettivo: minima varianza. Vincoli: quote a somma 1, rendimento atteso minimo, limiti per titolo.

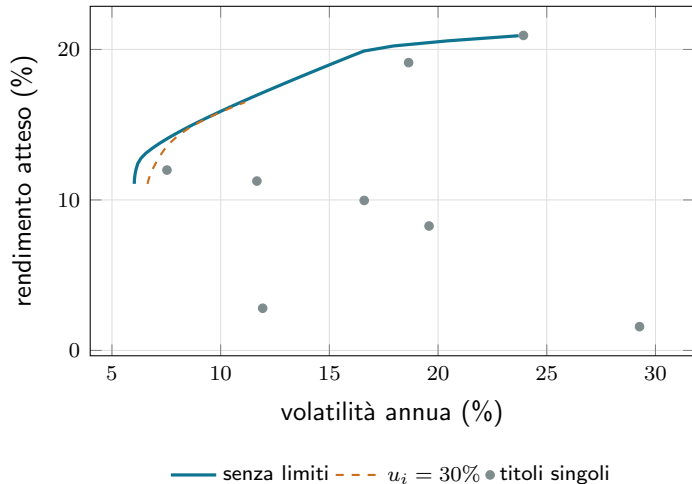
Modello (QP convesso: $Q \succeq 0$ sempre)

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} x_i x_j \quad \text{soggetto a} \quad \sum_{i=1}^n \mu_i x_i \geq \bar{r}, \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1, \quad \ell_i \leq x_i \leq u_i$$

Esempio a mano (2 titoli non correlati)

$\sigma_1 = 20\%$, $\sigma_2 = 30\%$: $x_1 = 9/13 = 69,2\%$, volatilità di portafoglio $16,6\%$ — **meno di entrambi i titoli**: la diversificazione nella sua forma più pura.

Markowitz — la frontiera efficiente



8 ETF, μ e Q stimati da 60 mesi.

- Minima varianza: rendimento 11%, volatilità **6%** < 7,5% del miglior titolo.
- Equipesato $1/n$: **dominato** (10,7%, 10,1%).
- Tetto $u_i = 30\%$: taglia la parte alta — il costo dei mandati *si vede*.

Markowitz — sensitività e fragilità

- Vincolo di rendimento **inattivo** fino a $\bar{r} = 11,06\%$ (la minima varianza rende già tanto): chiedere “almeno l’8%” non costa nulla.
- Oltre: ogni punto di rendimento si paga in varianza (moltiplicatore $\approx 0,022$ a $\bar{r} = 12\%$).
- Composizione lungo la frontiera: dal mix difensivo (UTL, CON, SAN) al portafoglio concentrato sui titoli aggressivi (MAT, ENE).

La lezione pratica più importante

Le stime dei rendimenti sono **molto più instabili** di quelle delle covarianze (errore standard $\approx 2,6\%$ annuo su 60 mesi): i portafogli ottimizzati inseguono gli errori di stima. Rimedi: vincoli u_i , shrinkage, minima varianza.

Pricing e revenue management (NLP)

Pricing — il problema

A parole. Decidere prezzo p e quantità q . Obiettivo: massimo profitto $(p - c)q$. Vincoli: $q \leq d(p)$ e $q \leq k$ (capacità).

Modello e domande

$$\max pq - cq \text{ soggetto a } q \leq d(p), q \leq k$$

lineare $d(p) = a - bp$; elasticità costante $d(p) = \theta p^{-\varepsilon}$; logistica $d(p) = m/(1 + e^{-\alpha + \beta p})$.

- La non convessità sta nel prodotto $p \cdot q$ (bilineare); con domanda lineare il profitto ridotto è una parabola concava; Gurobi risolve comunque al globale (NonConvex=2).

Pricing — esempio a mano e caso di studio

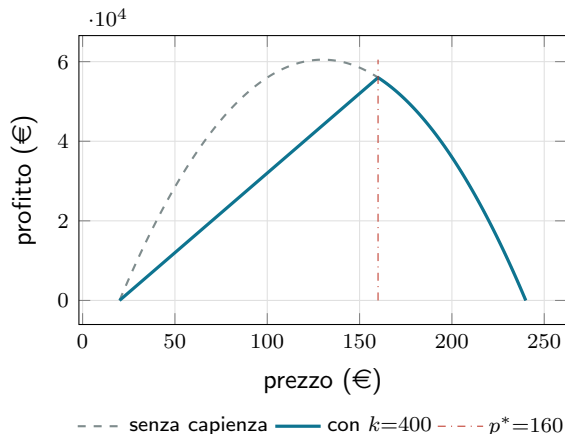
Concerto: $d(p) = 1200 - 5p$, $c = 20$ €, $k = 400$ posti.

1. Senza capacità: $p^\circ = (a/b + c)/2 = 130$ €, $q^\circ = 550$.
2. La capacità morde: $p^* = (a - k)/b = \mathbf{160}$ €, profitto 56.000 €.
3. Valore di un posto in più: $(p^* - c) + k dp^*/dk = 140 - 80 = \mathbf{60}$ € — **non** il margine pieno: per riempire il posto si abbassa il prezzo a tutti. (Gurobi, per perturbazione: 59,80.)

L'ottimo nel punto di spigolo

Con elasticità costante l'ottimo non vincolato sarebbe 36,67 €, ma lì la domanda esplode: l'ottimo vero è nello spigolo $d(p) = k$, cioè $p^* = (\theta/k)^{1/\varepsilon} = 79,11$ € — nessuna derivata si annulla.

Pricing — profitto e capienza



- Il vincolo di capienza taglia la parabola e sposta l'ottimo da 130 a 160 €.
- La curva del valore della capienza si appiattisce a $q^o = 550$: oltre, i posti non valgono nulla.
- Multiprodotto (platea/galleria con sostituzione): prezzi da decidere **congiuntamente**; profitto 85.149 €.
- Ampliamenti: conviene la galleria (+3.838 € per 50 posti), non la platea (+3.287 €).

Budget pubblicitario (NLP convesso)

Budget — il problema e la condizione KKT

A parole. Ripartire il budget b tra canali con risposta concava $r_i(x_i) = a_i \log(1 + k_i x_i)$; vincoli: budget e tetti u_i .

$$\max \sum_{i=1}^n r_i(x_i) \quad \text{soggetto a} \quad \sum_{i=1}^n x_i \leq b, \quad 0 \leq x_i \leq u_i$$

KKT = economia

All'ottimo $r'_i(x_i^*) = \lambda$ per ogni canale interno: **l'ultimo euro rende lo stesso in tutti i canali attivi**. Canali al tetto: marginale $> \lambda$; canali a zero: marginale iniziale $< \lambda$.

Esempio a mano ($b = 50$): $x = (35,6; 14,4)$, $\lambda = 2,46$.

Budget — verifica numerica e curva del valore

	social	search	TV	influencer
spesa (migliaia €)	24,3	34,8	22,9	18,0
ritorno marginale	8,2693	8,2693	8,2693	8,2693

- Verifica: +1000 € di budget $\Rightarrow$ risposta $+8,244 \approx \lambda$.
- La TV riceve meno dei social nonostante il tetto più alto: conta la **velocità di saturazione** k_i , non la dimensione del canale.
- λ scende da 19 ($b = 20$) a 0 ($b = 300$, tutti ai tetti): la curva di λ è l'argomento per negoziare il budget con il CFO.

Localizzazione continua (NLP convesso)

Localizzazione — tre obiettivi, tre risposte

A parole. Decidere le coordinate (x, y) della struttura; l'obiettivo — media, massimo o quadratica — è la vera scelta manageriale.

$$\text{Weber: } \min \sum_{i=1}^n w_i \sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}$$

$$\text{Minimax: } \min z \quad \text{soggetto a} \quad \sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2} \leq z, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Esempio a mano in 1D (pesi 1, 1, 3 nei km 0, 4, 10)

Weber = mediana pesata = 10; baricentro = 6,8; minimax = 5. Tre obiettivi ragionevoli, tre risposte diverse.

- Quadratico $\Rightarrow$ baricentro pesato (forma chiusa); Weber: non differenziabile nei punti di domanda; minimax: centro del cerchio minimo, **ignora i pesi**.

Ricarica di veicoli elettrici (LP/QP)

Ricarica EV — il problema

A parole. Quanta potenza x_{vt} per veicolo e ora, al minimo costo; la disponibilità $a_{vt} \in \{0, 1\}$ è un **dato**, non una decisione.

Modello (LP: nessuna variabile binaria!)

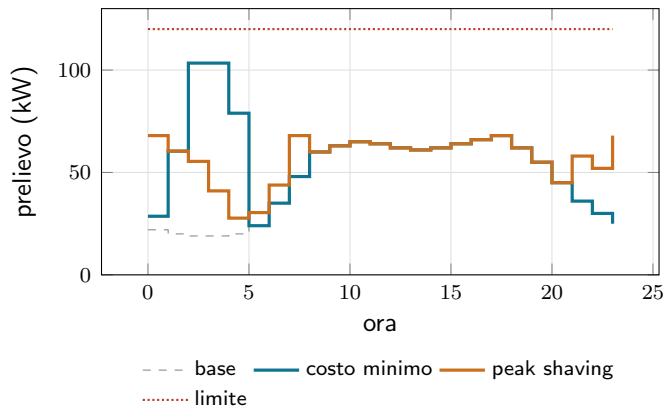
$$\min \sum_{v=1}^n \sum_{t=1}^m \pi_t \Delta t x_{vt}$$

$$\text{soggetto a } \eta \sum_{t=1}^m \Delta t x_{vt} \geq e_v, \quad \forall v \in \{1, 2, \dots, n\},$$

$$\sum_{v=1}^n x_{vt} + b_t \leq k, \quad \forall t \in \{1, 2, \dots, m\},$$

$$0 \leq x_{vt} \leq a_{vt} \bar{p}_v, \quad \forall v \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad \forall t \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Ricarica EV — costo minimo vs peak shaving



- Costo minimo: 20,36 €/notte, picco **103 kW**.
- Peak shaving: picco 68 kW; col compromesso costo+ ρ picco lo stesso picco costa 22,15 € (il minimax puro: 27,79!).
- Duali del fabbisogno = $0,08/\eta$ o $0,09/\eta$: il prezzo dell'ora marginale di ogni veicolo.
- Capacità minima ammissibile: 68 kW (bisezione).

Trappola vera

In $\text{quicksum}(x) + \text{base}[t] \leq C$ il RHS memorizzato è $C - \text{base}[t]$.

Code e capacità di servizio (NLP convesso)

Code M/M/1 — il problema

A parole. Quanta capacità di servizio comprare; obiettivo: costo di capacità + valore del tempo dei clienti; vincolo: stabilità $\mu > \lambda$.

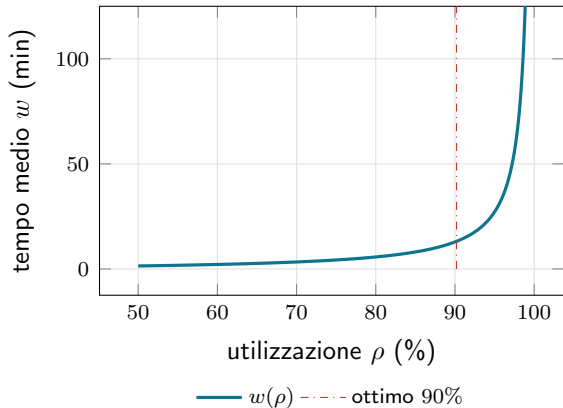
Modello e soluzione chiusa

$$\min_{\mu > \lambda} c\mu + h \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \quad \Longrightarrow \quad \mu^* = \lambda + \sqrt{h\lambda/c}$$

“capacità = domanda + **cuscinetto**”; il cuscinetto cresce come $\sqrt{\lambda}$ (economie di scala, pooling).

Esempio a mano ($\lambda = 8$, $c = 2$, $h = 4$): $\mu^* = 12$, $\rho = 67\%$, costo 32 €/h; con $\mu = 9$ (“più efficiente”, $\rho = 89\%$): 50 €/h.

Code — il muro dell'utilizzazione e il prezzo di una promessa



Caso di studio: $\lambda = 42$, $c = 3$, $h = 1,5 \Rightarrow \mu^* = 46,6$, $\rho = 90\%$, $w = 13$ min.

- Tra $\rho = 90\%$ e 99% l'attesa si moltiplica per **dieci**: conflitto matematico, non organizzativo.
- Promessa $w \leq w_{\max}$: da 12 a 9 min costa 1,85 €/h; da 3 a 2 min **28,95 €/h** ($dC/dw_{\max} = -c/w_{\max}^2 + h\lambda$).
- λ incerto in $[36, 48]$: l'ottimo nominale **diverge** ($\mu^* < 48$); il robusto ($\mu = 52,9$) costa +13%.

Il Newsvendor (LP stocastico)

News vendor — decidere prima di sapere

A parole. Un'unica quantità q , scelta *prima* di osservare la domanda D ; obiettivo: minimo costo atteso di eccedenza (c_o) e carenza (c_u).

Modello e regola del quantile

$$\min_{q \geq 0} c_o \mathbb{E}[(q - D)^+] + c_u \mathbb{E}[(D - q)^+] \quad \Rightarrow \quad F(q^*) = \frac{c_u}{c_u + c_o}$$

Esempio a mano ($D \in \{80, 100, 120\}$, $c_u = 9$, $c_o = 4$)

$C(80) = 180$, $C(100) = 86,7$, $C(120) = \mathbf{80}$: si ordina il **massimo**, non la media —
 $F(100) = 0,67 < \alpha^* = 0,692$.

Caso continuo ($\mu = 100$, $\sigma = 20$, $c_u/c_o = 9/4$): $q^* = F^{-1}(0,6923) = 110 \neq 100$.

News vendor — LP a scenari e valore della soluzione stocastica

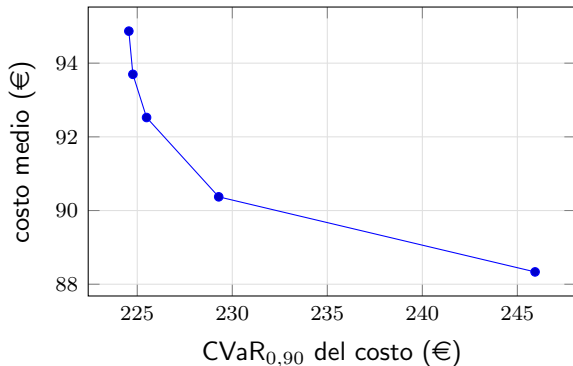
Il trucco delle parti positive (senza binarie)

$$\min c_o \sum_{s=1}^k \pi_s o_s + c_u \sum_{s=1}^k \pi_s u_s \quad \text{sogetto a } o_s \geq q - d_s, \quad u_s \geq d_s - q, \quad q, o_s, u_s \geq 0$$

All'ottimo $o_s = (q - d_s)^+$ e $u_s = (d_s - q)^+$: l'obiettivo li schiaccia.

- q dell'LP = quantile empirico (108,6 con 600 scenari): è un teorema.
- **VSS** = 11,17 €/ciclo (−11%): il guadagno di modellare l'incertezza invece di ordinare “la media”.
- Stabilità: con 30 scenari la q balla di $\pm 3,5$ unità tra repliche — gli scenari sono un campione.
- Service level: 95% di non-stockout costa +45,59 €; il fill rate in q^* è già il 96% — leggere bene lo SLA.

News vendor — avversione al rischio e multiprodotto



- Media-CVaR: da $\lambda = 0$ a 1 si ordina di più (108,6 $\rightarrow$ 116,2): +6,5 € di media comprano -21,4 € di coda.
- Frontiera ripida all'inizio: molta protezione quasi gratis.
- Multiprodotto con budget 1200 € e domande correlate ($\rho = 0,7$): duale del budget -0,55 (rendimento 55%!); con $\rho = 0$ il costo atteso scende del 18%: la correlazione è un costo.

VaR e CVaR (LP)

VaR e CVaR — misurare la coda

L perdita aleatoria, $\alpha \in (0, 1)$:

$$\text{VaR}_\alpha(L) = \inf\{\eta : \mathbb{P}(L \leq \eta) \geq \alpha\},$$

$$\text{CVaR}_\alpha(L) = \text{media della coda peggiore di massa } 1 - \alpha.$$

- Il CVaR è **convesso** e subadditivo (premia la diversificazione); il VaR no.
- Esempio a mano (perdite $\{2, 4, 5, 7, 12, 20\}$, $\alpha = 0,8$): $\text{VaR} = 12$; $\text{CVaR} = 12 + \frac{1}{0,2} \cdot \frac{1}{6}(20 - 12) = \mathbf{18,67}$; media = 8,33.
- Tre numeri, tre storie: la media rassicura, il VaR dà una soglia, il CVaR dice quanto fa male quando va male.

La formulazione lineare di Rockafellar–Uryasev

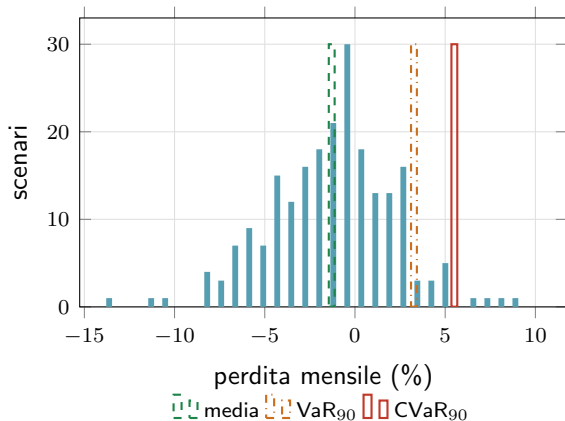
Scenari $s \in \{1, 2, \dots, k\}$ con probabilità π_s ; perdita lineare $\ell_s(\mathbf{x})$; soglia η (variabile *libera*) ed eccessi $\xi_s \geq 0$.

Modello LP

$$\begin{aligned} \min \quad & \eta + \frac{1}{1 - \alpha} \sum_{s=1}^k \pi_s \xi_s \\ \text{soggetto a} \quad & \xi_s \geq \ell_s(\mathbf{x}) - \eta, & \forall s \in \{1, 2, \dots, k\}, \\ & \xi_s \geq 0, & \forall s \in \{1, 2, \dots, k\}. \end{aligned}$$

- All'ottimo η^* è un VaR e l'obiettivo è il CVaR: **un solo LP**, entrambe le misure.
- Stesso trucco delle parti positive del Newsvendor: solo gli scenari nella coda contribuiscono.

VaR e CVaR — portafoglio mean-CVaR vs Markowitz



220 scenari con **code grasse** (t di Student),
rendimento richiesto 8%.

- Stessa perdita media, ma CVaR₉₀:
mean-CVaR 4,89% vs Markowitz 5,31%
(-8%).
- La varianza penalizza sopra e sotto la media;
il CVaR guarda **solo dove fa male**.
- Con $\alpha = 0,99$ e 220 scenari la coda ha 2-3
punti: stime instabili — servono scenari oltre
il quantile.

VaR e CVaR — supply chain a due stadi: il costo della resilienza

Primo stadio: capacità prenotata x_a dai fornitori (F1 economico ma fragile, F2 caro ma affidabile). Secondo stadio (per scenario): flussi e shortage.

λ	prenoto F1	prenoto F2	costo medio	CVaR ₉₀
0 (neutrale)	161,5	134,2	1.724	2.902
0,5	92,7	212,7	1.803	2.217
1 (protetto)	68,5	236,9	1.906	2.139

Take-away

Al crescere dell'avversione al rischio la capacità migra verso il fornitore affidabile: +79 € di costo medio comprano -685 € di CVaR — il numero che serve nelle discussioni su dual sourcing e reshoring.

Arbitraggio e prezzatura (LP)

Arbitraggio — il problema

- Mercato a uno stadio: oggi prezzi s_i^0 ; domani uno tra m **stati del mondo**, il titolo i paga s_{ij}^1 ; il titolo 0 è privo di rischio ($s_0^0 = 1$, paga $R = 1 + r$ ovunque).
- **Arbitraggio**: incassare oggi senza rischi domani (tipo A), o gratis oggi e mai in perdita, con possibilità di guadagno (tipo B).
- Rilevarlo è un LP; la dualità è la teoria della prezzatura.

L'LP di ricerca dell'arbitraggio

Posizioni x_i libere (acquisto o vendita allo scoperto)

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=0}^n s_i^0 x_i \\ \text{soggetto a} \quad & \sum_{i=0}^n s_{ij}^1 x_i \geq 0, & \forall j \in \{1, 2, \dots, m\}, \\ & x_i \geq 0, & \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

- Il portafoglio nullo è ammissibile: ottimo sempre ≤ 0 .
- Se < 0 : tipo A e modello **illimitato** (vincoli omogenei) $\Rightarrow$ normalizzazione $\sum_i s_i^0 x_i \geq -1$ ("incasso oggi al più 1").

La dualità è la prezzatura

Ogni stato dà una $p_j \geq 0$; ogni posizione libera un vincolo duale di **uguaglianza**:

$$\sum_{j=1}^m s_{ij}^1 p_j = s_i^0 \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad p_j \geq 0.$$

Dal titolo 0: $\sum_j p_j = 1/R \Rightarrow q_j = R p_j$ sono **probabilità neutrali al rischio** e

$$s_i^0 = \frac{1}{R} \sum_{j=1}^m q_j s_{ij}^1 :$$

il prezzo di oggi è il valore atteso scontato dei payoff sotto q .

Il teorema fondamentale della prezzatura

Teorema

Nessun arbitraggio (tipo A né tipo B) $\iff$ esiste una misura neutrale al rischio con $q_j > 0$ per ogni stato $j \in \{1, 2, \dots, m\}$.

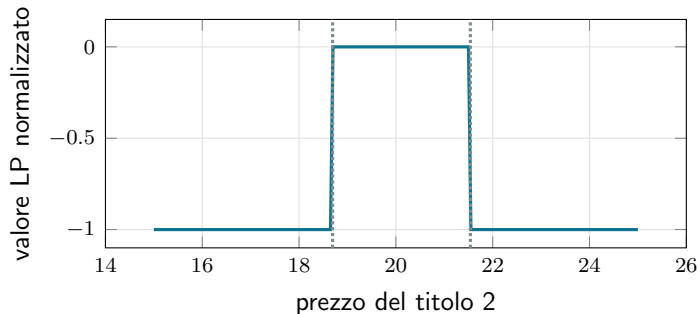
- Niente tipo A $\Rightarrow$ ottimo 0 $\Rightarrow$ per la **dualità forte** il duale è ammissibile: una misura esiste.
- Niente tipo B $\Rightarrow$ vincoli di stato tutti attivi $\Rightarrow$ per gli **scarti complementari** esiste una misura con $q > 0$.
- Viceversa, con $q > 0$ ogni strategia senza rischi ha costo ≥ 0 .

Arbitraggio — caso di studio

Tre stati, $R = 1,04$; payoff titolo 1 (10, 15, 13), titolo 2 (30, 15, 25).

- **Prezzi (6, 20)**: UNBOUNDED; normalizzato: ottimo -1 . A mano: $(-27, 1, 1)$ incassa 1 oggi, payoff $(11,92; 1,92; 9,92) \geq 0$.
- **Prezzi (13, 18,69)**: ottimo 0; dai duali dei vincoli di stato $q = (0,296; 0,704; 0)$ — e s_i^0 riprodotti esattamente.
- **Prezzatura di una call** (titolo 1, strike 12, payoff $(0, 3, 1)$): mercato completo $\Rightarrow$ prezzo unico 2,0308; incompleto (solo titoli 0 e 1) $\Rightarrow$ intervallo $[1,4615, 2,0308]$.

Arbitraggio — l'intervallo dei prezzi coerenti



- Due LP (min/max sulle misure coerenti): $s_2^0 \in [18,69, 21,54]$; dentro, valore 0; fuori, -1 : arbitraggio in una direzione o nell'altra.

Support Vector Machine (QP)

SVM — il classificatore come QP

A parole. Trovare l'iperpiano che separa due classi massimizzando il margine; le etichette $y_i \in \{-1, +1\}$ sono **dati**, le variabili ($\mathbf{w}$, b , scarti ξ_i) tutte continue.

Soft margin (primale)

$$\min_{\mathbf{w}, b, \xi} \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 + C \sum_{i=1}^n \xi_i \quad \text{soggetto a} \quad y_i \left(\sum_{j=1}^p w_j x_{ij} + b \right) \geq 1 - \xi_i, \quad \xi_i \geq 0$$

margine = $2/\|\mathbf{w}\|$; C = prezzo delle violazioni.

Esempio a mano (2 punti): $\mathbf{w} = (0,5; 0,5)$, $b = -1$, margine $2\sqrt{2}$ = distanza tra i punti; entrambi support vector.

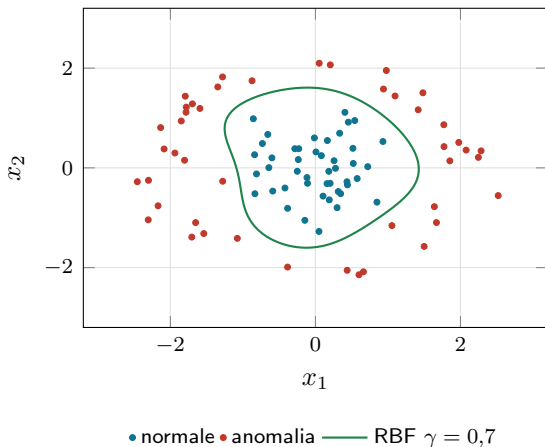
SVM — caso di studio: rischio di credito

90 clienti, due indicatori; al variare di C :

	$C = 0,05$	$C = 1$	$C = 20$
margine	2,42	1,28	0,36
errori di training	2	2	0
punti nel margine	22	7	3

- **Duale:** $\max \sum_i \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j y_i y_j \mathbf{x}'_i \mathbf{x}_j$, $0 \leq \alpha_i \leq C$, $\sum_i \alpha_i y_i = 0$: stessi $\mathbf{w}$, b e valore (dualità forte, 4,7868).
- Complementarietà: $\alpha_i = 0$ (83 punti, irrilevanti); $0 < \alpha_i < C$ (2, **sul margine**: da loro si ricava b); $\alpha_i = C$ (5, dentro il margine).
- Classi sbilanciate: costo $10\times$ sugli insolventi $\Rightarrow$ recall 100% al prezzo di precision 97%.

SVM — kernel e SVR



- Il duale dipende dai dati solo via $\mathbf{x}'_i \mathbf{x}_j$: sostituendolo con $K(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = e^{-\gamma \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2}$ si ottengono frontiere curve **restando in un QP convesso**.
- γ piccolo: frontiera regolare; $\gamma = 5$: 61 support vector su 90, il modello **memorizza** (overfitting). C e γ per cross-validation.
- **SVR**: tubo $\pm \varepsilon$ senza penalità; sui dati prezzo-domanda recupera $-10,86p + 220,3$ (vera: $-11p + 220$) usando solo i 14 punti fuori dal tubo.

Regressione robusta e quantile (LP)

Regressione — stimare i parametri con un LP

A parole. Scegliere i coefficienti di una funzione lineare che prevede la domanda; l'obiettivo paga τ gli scostamenti in eccesso e $1 - \tau$ quelli in difetto (u_i e v_i , le due parti dello scarto).

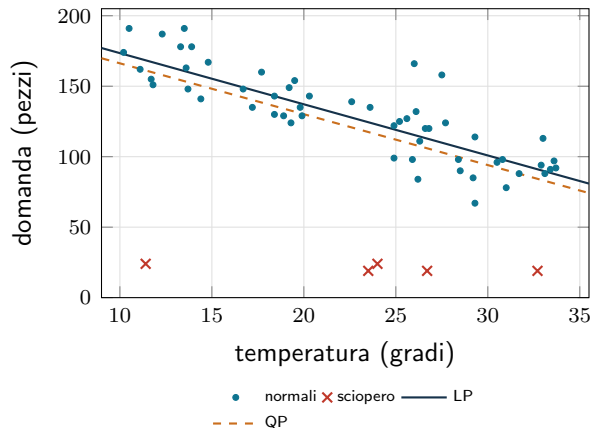
Regressione quantile

$$\min_{w,b,u,v} \sum_{i=1}^n [\tau u_i + (1 - \tau)v_i] \quad \text{soggetto a} \quad \sum_{j=1}^p w_j x_{ij} + b + u_i - v_i = y_i, \quad u_i, v_i \geq 0$$

w_j e b libere; $\tau = 1/2$ dà la mediana (scarti assoluti), τ grande una previsione prudente verso l'alto.

Senza caratteristiche ($p = 0$) l'ottimo è il **quantile empirico**: con 88, 96, 104, 112, 120, 132, 148 e $\tau = 9/13$ si ottiene $\tilde{b} = 120$ e $\tilde{z} = 680/13 = 52,31$ — è la regola del quantile del Newsvendor.

Regressione — robustezza e punti di appoggio



- Cinque giorni di sciopero su 60: i **minimi quadrati** pagano lo scarto al quadrato e l'intercetta scende di 11 pezzi; l'**LP** resta dove sono i dati normali ($209,77 - 3,63t$ contro $213,58 - 3,72t$ del QP ripulito a mano).
- **Duali**: $-(1 - \tau) \leq \tilde{\pi}_i \leq \tau$; sopra la stima $\tilde{\pi}_i = \tau$, sotto $-(1 - \tau)$, e solo i $p + 1$ **punti di appoggio** hanno duale interno — i support vector della regressione.
- $\sum_i \tilde{\pi}_i = 0$ (duale dell'intercetta) è la proprietà del quantile: 29 sopra, 29 sotto, 2 interpolati.
- Giornata tipo: mediana 126,3, quantile 9/13 **132,1** contro 148 del quantile incondizionato.

Organizzazione del laboratorio

I quattro laboratori e la consegna

Lab 1	Produzione e scorte	LP, duali, verifica dei prezzi ombra
Lab 2	Markowitz	QP, frontiera, fragilità delle stime
Lab 3	Pricing o budget	NLP, concavità, KKT numeriche
Lab 4	Progetto a scelta	presentazione manageriale

Report (max 8 pagine): problema e ipotesi → modello (vincoli spiegati) → dati → risultati → sensitività (protocollo completo) → **raccomandazione manageriale in dieci righe senza formule.**

Valutazione: formulazione 30% · implementazione e verifica 25% · sensitività 25% · interpretazione 20%.

Gli errori più comuni (checklist)

1. Leggere `.X` o `.Pi` senza controllare `m.Status`.
2. Dimenticare `lb=-GRB.INFINITY` sulle variabili libere (b, η).
3. Usare un prezzo ombra fuori dal suo intervallo di validità.
4. Sbagliare il segno dei duali nei problemi di minimo.
5. Aggiornare il RHS di un vincolo con costanti a sinistra.
6. Ottimizzare un solo obiettivo quando ce ne sono due (minimax puro).
7. Scegliere gli iperparametri guardando il test set.
8. Sei cifre decimali da stime che ballano alla seconda.

Materiali

- **Dispensa completa:** teoria, esempi svolti a mano, casi di studio, codice, sensitività, esercizi (con soluzioni per i docenti).
- **Script Python:** uno per capitolo; `python/esegui_tutti.py` rigenera dati, risultati e figure.
- **Guida al solver:** `GUIDA_GUROBI.md`.
- **Dati** in CSV con seed fissi: tutto riproducibile.

Buon laboratorio!