

Insiemi infiniti



Indice

Potenza del numerabile

Potenza del continuo



Potenza del numerabile



Introduzione: Potenza del numerabile

- ▶ In questa sezione ci chiediamo come confrontare la “numerosità” di insiemi infiniti
- ▶ Introduciamo la nozione di **cardinalità** tramite le **corrispondenze biunivoche** e quella di insieme **numerabile**
- ▶ Scopriremo che $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, pur essendo uno contenuto nell'altro, hanno tutti la stessa cardinalità



Una domanda

È possibile confrontare la “numerosità” degli insiemi infiniti?



Gli insiemi numerici notevoli

- ▶ Affrontiamo il discorso a partire dagli insiemi numerici notevoli che abbiamo introdotto: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e chiediamoci: quanti sono gli elementi di ciascuno di questi insiemi?
- ▶ Intuitivamente, la risposta sembra ovvia: ciascuno di questi insiemi ha infiniti elementi; tuttavia i numeri razionali sono più numerosi dei numeri interi, essendo $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, e per lo stesso motivo i numeri reali sono più numerosi dei numeri razionali, essendo $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- ▶ Come possiamo affermare, al tempo stesso, che due insiemi sono entrambi infiniti, ma uno è più numeroso dell'altro?

La domanda generale

Com'è possibile, in generale, confrontare la numerosità degli insiemi infiniti?

- ▶ Per dar senso a queste domande, prima ancora che per sapervi rispondere, occorre definire cosa si intenda per uguale numerosità di due insiemi.
- ▶ Astraendo dall'esperienza del contare gli elementi di un insieme finito, si è giunti a identificare l'idea di **uguale numerosità** con quella di **corrispondenza biunivoca**.

Definizione 1: di uguale cardinalità di due insiemi

*Due insiemi A , B si dicono di **uguale cardinalità** (o potenza) se possono essere messi in corrispondenza biunivoca tra loro, cioè se esiste una legge che associa ad ogni elemento di A uno e un solo elemento di B , e viceversa.*

- La cardinalità (o potenza) di un insieme traduce l'idea intuitiva di numerosità

$\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$ hanno la stessa cardinalità

Osservazione 1

L'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$ e l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ hanno la stessa cardinalità

Dimostrazione

La seguente legge mette in corrispondenza biunivoca i numeri interi e i numeri naturali:

$\mathbb{Z}$	0	1	-1	2	-2	...	n	$-n$	...
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$		$\updownarrow$	$\updownarrow$	
$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	...	$2n-1$	$2n$	...



Insiemi equipotenti

- ▶ Quindi, anche se dal punto di vista dell'inclusione $\mathbb{Z}$ ha “più elementi” di $\mathbb{N}$ (nel senso che ha tutti gli elementi di $\mathbb{N}$ più altri), gli insiemi hanno la stessa cardinalità.

Due insiemi che hanno la stessa cardinalità si dicono anche **equipotenti** e vanno pensati come ugualmente numerosi.

Definizione 2: di insieme numerabile

*Si dice **numerabile** un insieme che ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$.*

- Il termine numerabile indica che gli elementi dell'insieme si possono enumerare, ossia disporre in un elenco numerato (posto 1, posto 2, posto 3, ...)

La cardinalità di $\mathbb{N}$ prende il nome di **potenza del numerabile**.

$\mathbb{Q}$ è numerabile

Teorema 1

L'insieme $\mathbb{Q}$ è numerabile

Dimostrazione (1/3)

- ▶ Cominciamo a dimostrare che l'insieme dei numeri razionali positivi è numerabile.
- ▶ Per far questo, rappresentiamo i numeri razionali positivi come frazioni n/m , con n, m interi positivi, e disponiamo queste frazioni in una **tabella triangolare infinita**, al modo seguente:

$\frac{n}{m}$, con $n + m = \dots$				
2	$\frac{1}{1}$			
3	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$		
4	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{1}$	
5	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{1}$
...	...			

Dimostrazione (2/3)

- ▶ Si noti che: tutte le frazioni che rappresentano numeri razionali positivi compaiono in questa tabella almeno una volta; alcuni sono ripetuti più volte (ad es. $\frac{1}{1} = \frac{2}{2}$). Ogni riga ha lunghezza finita.
- ▶ Quindi possiamo mettere in corrispondenza biunivoca $\mathbb{N}$ con l'insieme dei razionali positivi, percorrendo la tabella, riga dopo riga (e saltando un elemento quando è uguale ad uno già incontrato). Ad esempio:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{1}$	...

(si noti che abbiamo saltato $\frac{2}{2}$ perché uguale a $\frac{1}{1}$, già incontrato).

Dimostrazione (3/3)

- ▶ Questo dimostra che l'insieme dei razionali positivi è numerabile.
- ▶ Allora anche $\mathbb{Q}$ è numerabile, e questo si può provare con una dimostrazione analoga a quella con cui abbiamo provato che $\mathbb{Z}$ è numerabile: detti $q_1, q_2, q_3, \dots$ i razionali positivi, si pone:

$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6	...
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	
$\mathbb{Q}$	0	q_1	$-q_1$	q_2	$-q_2$	q_3	$-q_3$	...

che realizza una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$. □

Tutti gli insiemi infiniti sono numerabili?

- ▶ Aver scoperto che diversi insiemi infiniti, uno propriamente contenuto nell'altro ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$), hanno la stessa cardinalità, potrebbe far pensare che questo sia vero per tutti gli insiemi infiniti. Ciò non è vero, come mostrato nella prossima sezione.

Cardinalità:

- ▶ Due insiemi hanno **uguale cardinalità** se esiste una corrispondenza biunivoca tra essi
- ▶ Un insieme è **numerabile** se ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$ (potenza del numerabile)

Risultati:

- ▶ $\mathbb{Z}$ è numerabile: $0, 1, -1, 2, -2, \dots$
- ▶ $\mathbb{Q}$ è numerabile: tabella triangolare delle frazioni percorsa riga per riga

Potenza del continuo

Introduzione: Potenza del continuo

- ▶ In questa sezione dimostriamo che l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ **non è numerabile**, con il **procedimento diagonale di Cantor**
- ▶ Vedremo che ogni intervallo di $\mathbb{R}$ ha la stessa cardinalità di $\mathbb{R}$: la **potenza del continuo**
- ▶ Capiremo che esistono infiniti livelli gerarchici di infinito

$\mathbb{R}$ non è numerabile

Teorema 2

L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ non è numerabile

- ▶ La tecnica di dimostrazione prende il nome di **procedimento diagonale di Cantor**

Dimostrazione (1/4)

- ▶ Proveremo che l'intervallo $[0, 1]$ ha una cardinalità non numerabile, da cui ovviamente segue la non numerabilità di $\mathbb{R}$
- ▶ Supponiamo dunque **per assurdo** che $[0, 1]$ sia numerabile e disponiamo **tutti** i numeri reali dell'intervallo $[0, 1]$ in un elenco $r_1, r_2, r_3, \dots$

Dimostrazione (2/4)

- Scriviamo ogni numero r_i in forma decimale:

$$0.a_1a_2a_3\dots$$

dove gli a_i sono cifre da 0 a 9 (se le cifre sono tutte zero si ha $r_i = 0$ e se sono tutte nove si ha $r_i = 0.\overline{9} = 1$):

$$r_1 = 0.a_{11}a_{12}a_{13}\dots$$

$$r_2 = 0.a_{21}a_{22}a_{23}\dots$$

$$r_3 = 0.a_{31}a_{32}a_{33}\dots$$

$\dots$

Dimostrazione (3/4)

- Definiamo ora il seguente numero decimale:

$$r = 0.b_1b_2b_3 \dots$$

dove le cifre b_i sono definite con la seguente regola:

$$b_i = \begin{cases} 5 & \text{se } a_{ii} \text{ è una cifra } 0, 1, 2, 3 \text{ o } 4 \\ 4 & \text{se } a_{ii} \text{ è una cifra } 5, 6, 7, 8 \text{ o } 9 \end{cases}$$

Con questa definizione risulta $b_i \neq a_{ii}$ per ogni i . Si noti che il numero r è stato costruito ragionando sulla diagonale della tabella infinita che ha per righe i numeri r_i , da cui il nome del procedimento.

Dimostrazione (4/4)

- ▶ Osserviamo ora che r è un numero reale appartenente all'intervallo $[0, 1]$ (perché è del tipo $0.b_1b_2b_3\dots$ con tutte le cifre uguali a 4 o 5) e d'altro canto non è uguale a nessuno dei numeri r_i dell'elenco, in quanto:
 - $r \neq r_1$ la prima cifra di r è diversa dalla prima cifra di r_1 ($b_1 \neq a_{11}$);
 - $r \neq r_2$ la seconda cifra di r è diversa dalla seconda cifra di r_2 ($b_2 \neq a_{22}$);
 - ...
- ▶ Ma questo porta a una **contraddizione**, avevamo supposto che gli r_i esaurissero completamente l'insieme dei numeri reali dell'intervallo $[0, 1]$. Dunque $[0, 1]$ non è numerabile.



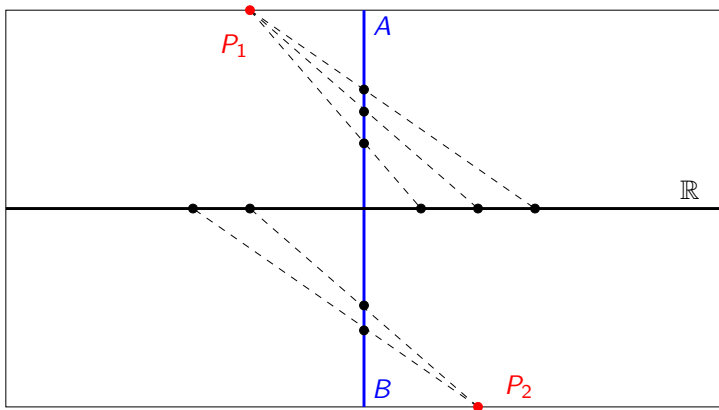
$\mathbb{N}$ ha cardinalità minore di $\mathbb{R}$

Poiché $\mathbb{N}$ non può essere messo in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}$, ma può essere messo in corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme proprio di $\mathbb{R}$ ($\mathbb{N}$ stesso!), diciamo che $\mathbb{N}$ ha **cardinalità minore** di $\mathbb{R}$.

Gli intervalli hanno la cardinalità di $\mathbb{R}$ (1/2)

- ▶ Notiamo anche che l'intervallo $[0, 1]$, e qualsiasi intervallo di $\mathbb{R}$ (aperto o chiuso, limitato o illimitato) ha la stessa cardinalità di $\mathbb{R}$.
- ▶ Questo fatto si può dimostrare ad esempio con una costruzione geometrica elementare, che realizza una corrispondenza biunivoca tra punti della retta e di un segmento $[A, B]$, tracciando opportuni segmenti dai due punti fissati P_1 , P_2 alla retta stessa (figura nella prossima slide).

Gli intervalli hanno la cardinalità di $\mathbb{R}$ (2/2)



- Questo implica che, ad esempio, i punti di una retta hanno la stessa cardinalità dei punti di un segmento.

Potenza del continuo

La cardinalità di $\mathbb{R}$ prende il nome di **potenza del continuo**.

- Non solo ogni intervallo di $\mathbb{R}$ ha questa stessa cardinalità. Si può dimostrare che lo stesso vale per il piano, per lo spazio tridimensionale e per i loro sottoinsiemi “continui”: per esempio, un piano e una sfera hanno entrambi la potenza del continuo.

Infiniti livelli di infinito

- ▶ Abbiamo incontrato fin qui solo due livelli gerarchici di infinito: la potenza del numerabile e quella del continuo. Non si deve credere che esistano solo queste due! Ad esempio, l'insieme di tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ è ancora più numeroso di $\mathbb{R}$; e con questo procedimento si può sempre costruire un insieme più numeroso di un insieme dato.
- ▶ Perciò i livelli gerarchici delle cardinalità infinite sono anch'essi infiniti.

Potenza del continuo:

- ▶ $\mathbb{R}$ non è numerabile (procedimento diagonale di Cantor su $[0, 1]$)
- ▶ $\mathbb{N}$ ha cardinalità minore di $\mathbb{R}$
- ▶ Ogni intervallo di $\mathbb{R}$, il piano e lo spazio hanno la cardinalità di $\mathbb{R}$, detta potenza del continuo

Gerarchia degli infiniti:

- ▶ L'insieme dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ è più numeroso di $\mathbb{R}$: i livelli di infinito sono infiniti

Riepilogo finale

- ▶ La numerosità di insiemi infiniti si confronta tramite le corrispondenze biunivoche (cardinalità)
- ▶ $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ sono numerabili: hanno la potenza del numerabile
- ▶ $\mathbb{R}$ non è numerabile: ha la potenza del continuo, come ogni suo intervallo
- ▶ Esistono infiniti livelli gerarchici di cardinalità infinite

