

La successione di Fibonacci



Successione di Fibonacci

Successione di Fibonacci



Introduzione: Successione di Fibonacci

- ▶ In questa sezione definiamo la **successione di Fibonacci**, in cui ogni termine è la somma dei due precedenti
- ▶ Introduciamo la **sezione aurea** ϕ e il suo coniugato $\hat{\phi}$, radici dell'equazione $x^2 = x + 1$
- ▶ Dimostreremo per induzione una **formula esplicita** per i numeri di Fibonacci e vedremo che F_i è l'intero più vicino a $\phi^i / \sqrt{5}$

Successione di Fibonacci

Definizione 1: di successione di Fibonacci

$$F_0 = 0,$$

$$F_1 = 1,$$

$$F_i = F_{i-1} + F_{i-2}, \quad \text{con } i \geq 2, i \in \mathbb{N}$$

- ▶ Pertanto, ogni numero di Fibonacci è la somma dei due precedenti, ottenendo la successione

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

Sezione aurea

- La successione di Fibonacci è collegata alla **sezione aurea** ϕ e al **coniugato della sezione aurea** $\hat{\phi}$.

Definizione 2: di sezione aurea

*La **sezione aurea** ϕ e il **coniugato della sezione aurea** $\hat{\phi}$, sono le due radici dell'equazione:*

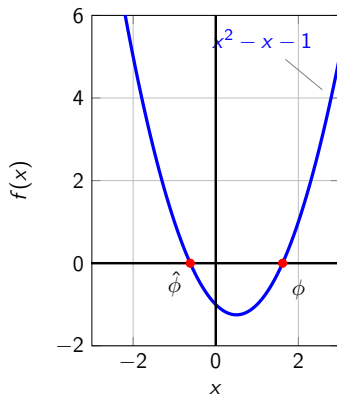
$$x^2 = x + 1$$

e sono dati dalle formule:

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} & \hat{\phi} &= \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ &\approx 1.61803 & &\approx -0.61803\end{aligned}$$

Grafico di $f(x) = x^2 - x - 1$

La seguente figura mostra il grafico della funzione $f(x) = x^2 - x - 1$ nell'intervallo $[-3, 3]$, i pallini rossi corrispondono alle radici dell'equazione $x^2 = x + 1$.



ϕ e $\hat{\phi}$ soddisfano $x^2 = x + 1$

La sezione aurea ϕ e il coniugato della sezione aurea $\hat{\phi}$ soddisfano chiaramente l'equazione $x^2 = x + 1$ in quanto:

$$\phi^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1 = \phi + 1$$

$$\hat{\phi}^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + 1 = \hat{\phi} + 1$$

Formula esplicita dei numeri di Fibonacci

Usando le proprietà di ϕ e $\hat{\phi}$, ricaviamo ora una formula esplicita per i numeri di Fibonacci.

Osservazione 1: formula chiusa della successione di Fibonacci

$$F_i = \frac{\phi^i - \hat{\phi}^i}{\sqrt{5}}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Dimostrazione (1/2)

Per induzione su i .

► Primo passo dell'induzione

Dimostriamo che la formula sia valida per $i = 0$ e $i = 1$:

$$F_0 = \frac{\phi^0 - \hat{\phi}^0}{\sqrt{5}} = \frac{1 - 1}{\sqrt{5}} = 0, \quad F_1 = \frac{\phi^1 - \hat{\phi}^1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1.$$

► Passo induttivo

Supponiamo che sia vero per $i = k$ e $i = k - 1$ con $k \geq 1$, e proviamolo per $i = k + 1$. Per definizione della successione di Fibonacci, abbiamo $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$, mentre per ipotesi induttiva abbiamo:

$$F_k = \frac{\phi^k - \hat{\phi}^k}{\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad F_{k-1} = \frac{\phi^{k-1} - \hat{\phi}^{k-1}}{\sqrt{5}}$$

Dimostrazione (2/2)

Quindi possiamo scrivere (usando $\phi + 1 = \phi^2$ e $\hat{\phi} + 1 = \hat{\phi}^2$):

$$\begin{aligned} F_{k+1} &= F_k + F_{k-1} = \frac{\phi^k - \hat{\phi}^k}{\sqrt{5}} + \frac{\phi^{k-1} - \hat{\phi}^{k-1}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{(\phi^k - \hat{\phi}^k) + (\phi^{k-1} - \hat{\phi}^{k-1})}{\sqrt{5}} = \frac{(\phi^k + \phi^{k-1}) - (\hat{\phi}^k + \hat{\phi}^{k-1})}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\phi^{k-1}(\phi + 1) - \hat{\phi}^{k-1}(\hat{\phi} + 1)}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^{k-1}(\phi^2) - \hat{\phi}^{k-1}(\hat{\phi}^2)}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\phi^{k+1} - \hat{\phi}^{k+1}}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

che è esattamente l'asserto voluto, per $i = k + 1$. □

F_i come intero più vicino a $\phi^i/\sqrt{5}$

Osservazione 2: calcolo di F_i per arrotondamento

$$F_i = \left\lfloor \frac{\phi^i}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \right\rfloor, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Dimostrazione

Dato che $|\hat{\phi}| < 1$, abbiamo

$$\frac{|\hat{\phi}^i|}{\sqrt{5}} \leq \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad -\frac{1}{2} < \frac{\hat{\phi}^i}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

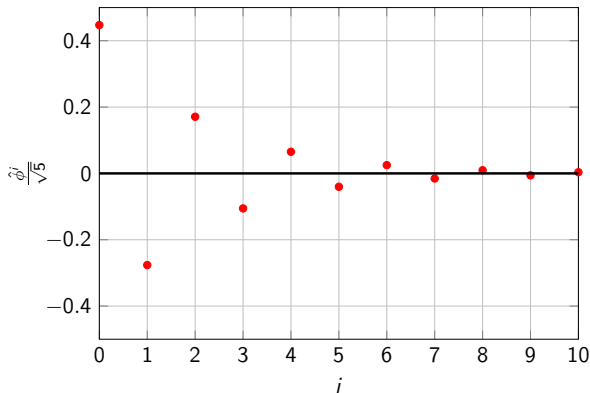
Dato che $F_i \in \mathbb{N}$ e $F_i = \frac{\phi^i}{\sqrt{5}} - \frac{\hat{\phi}^i}{\sqrt{5}}$, allora l' i -esimo numero di Fibonacci F_i è uguale a $\frac{\phi^i}{\sqrt{5}}$ arrotondato all'intero più vicino:

$$F_i = \left\lfloor \frac{\phi^i}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \right\rfloor, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$



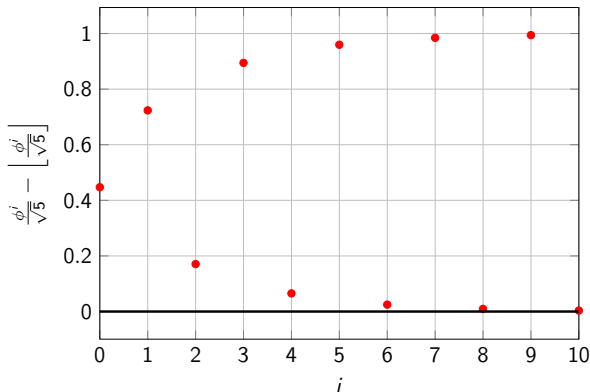
Valori di $\hat{\phi}^i/\sqrt{5}$

- I valori di $\frac{\hat{\phi}^i}{\sqrt{5}}$ con $i = 0, 1, \dots, 10$ sono:



Valori della parte frazionaria di $\phi^i/\sqrt{5}$

- I valori di $\frac{\phi^i}{\sqrt{5}} - \left\lfloor \frac{\phi^i}{\sqrt{5}} \right\rfloor$ con $i = 0, 1, \dots, 10$ sono:

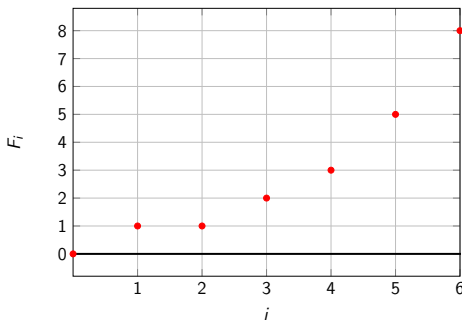


Valori di F_i

- Dato che $F_i \in \mathbb{N}$ abbiamo inoltre:

$$\left(\frac{\phi^i}{\sqrt{5}} - \left\lfloor \frac{\phi^i}{\sqrt{5}} \right\rfloor \right) - \frac{\hat{\phi}^i}{\sqrt{5}} \in \{0, 1\}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

- I valori di F_i , con $i = 0, 1, \dots, 10$, sono:



Riepilogo

Successione di Fibonacci:

- ▶ $F_0 = 0, F_1 = 1, F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ per $i \geq 2$:
 $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$

Sezione aurea:

- ▶ $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\hat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ sono le radici di $x^2 = x + 1$

Formule per F_i :

- ▶ $F_i = \frac{\phi^i - \hat{\phi}^i}{\sqrt{5}}$ (dimostrata per induzione)
- ▶ $F_i = \left\lfloor \frac{\phi^i}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \right\rfloor$, perché $\left| \frac{\hat{\phi}^i}{\sqrt{5}} \right| < \frac{1}{2}$

Riepilogo finale

- ▶ La successione di Fibonacci è definita per ricorrenza: ogni termine è la somma dei due precedenti
- ▶ È legata alla sezione aurea ϕ e al suo coniugato $\hat{\phi}$, radici di $x^2 = x + 1$
- ▶ Vale la formula esplicita $F_i = (\phi^i - \hat{\phi}^i)/\sqrt{5}$, dimostrata per induzione
- ▶ Poiché $|\hat{\phi}| < 1$, F_i è l'intero più vicino a $\phi^i/\sqrt{5}$