

Fattoriali, coefficienti binomiali e valore assoluto

Indice

Fattoriali

Coefficienti binomiali

Valore assoluto



Fattoriali



Introduzione: Fattoriali

- ▶ In questa sezione definiamo il **fattoriale** $n!$ di un numero naturale n
- ▶ Vedremo che $n!$ cresce molto rapidamente al crescere di n e studieremo alcune sue proprietà elementari
- ▶ Il fattoriale è lo strumento di base per definire i **coefficienti binomiali** nella prossima sezione

Definizione 1: di fattoriale di n

Il fattoriale di n è il prodotto dei primi n interi. Si indica con $n!$ e si legge “ n fattoriale”. In formule:

$$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$$

Si pone, per definizione, $0! = 1$.

Primi valori del fattoriale

- Il numero $n!$ cresce molto rapidamente al crescere di n . I primi valori sono:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5.040	40.320	362.880	3.628.800

Proprietà del fattoriale

- Alcune proprietà del fattoriale, di verifica immediata, sono:

$$n! = n \cdot (n - 1)!$$

$$\frac{n!}{(n - k)!} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1), \quad \text{con } k \geq 1 \quad (1)$$

Con $k \geq 1$, diventa il prodotto di k fattori, partendo da n e decrescendo di una unità alla volta.

Esempio

$$\frac{100!}{95!} = \frac{100!}{(100 - 5)!} = 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96 = 9.034.502.400$$

Conviene sempre semplificare il più possibile le espressioni che contengono il fattoriale, prima di calcolarle!



Fattoriale:

- ▶ $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$, con $0! = 1$; cresce molto rapidamente
- ▶ $n! = n \cdot (n - 1)!$
- ▶ $\frac{n!}{(n-k)!}$ è il prodotto di k fattori decrescenti a partire da n
- ▶ Conviene semplificare prima di calcolare

Coefficienti binomiali

Introduzione: Coefficienti binomiali

- ▶ In questa sezione definiamo i **coefficienti binomiali** $\binom{n}{k}$ e ne studiamo le proprietà principali
- ▶ Dimostreremo la **formula di Newton** per la potenza n -esima di un binomio $(a + b)^n$
- ▶ Vedremo infine come calcolare i coefficienti binomiali in modo ricorsivo con il **triangolo di Tartaglia**

Definizione 2: di coefficiente binomiale

Si definisce **coefficiente binomiale** il numero:

$$c_{n,k} = \frac{n!}{k! (n-k)!} \quad \text{con } 0 \leq k \leq n.$$

Il coefficiente binomiale $c_{n,k}$ si indica usualmente col simbolo: $\binom{n}{k}$ che si legge “n su k”.

- Data la regola (1), abbiamo:

$$c_{n,k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

con $k \geq 1$, espressione che è più maneggevole per il calcolo del coefficiente binomiale.

Simmetria dei coefficienti binomiali

Abbiamo:

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

Dato che:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! (n - (n-k))!} = \frac{n!}{k! (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Relazione ricorsiva (1/3)

Abbiamo:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k} \quad (2)$$

Ne segue anche:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Relazione ricorsiva (2/3)

Infatti, dato che $(n-1-(k-1))! = (n-k)! = (n-k)(n-k-1)!$
e $k! = k(k-1)!$:

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)! \underbrace{(n-1-(k-1))!}_{=(n-k)(n-k-1)!}} + \frac{(n-1)!}{k! (n-k-1)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)! (n-k)(n-k-1)!} \\ &\quad + \frac{(n-1)!}{k(k-1)! (n-k-1)!}\end{aligned}$$

Relazione ricorsiva (3/3)

Proseguendo:

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{k(n-1)! + (n-k)(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)(n-k-1)!} \\ &= \frac{\overbrace{(n-1)!}^{=n!} n}{\underbrace{k(k-1)!}_{k!} \underbrace{(n-k)(n-k-1)!}_{(n-k)!}} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}\end{aligned}$$

Formula di Newton

- La potenza n -esima di un binomio $(a + b)$ si può calcolare con la seguente formula (da cui deriva il nome di coefficiente binomiale):

Osservazione 1: formula di Newton

Per ogni intero $n \geq 0$, con $a, b \in \mathbb{R}$, vale:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Dimostrazione (1/4)

Per induzione su n .

► **Primo passo dell'induzione**

Sia $n = 0$. Allora l'asserto diventa: $(a + b)^0 = \binom{0}{0} a^0 b^0$ cioè $1 = 1$ che è evidentemente vero.

► **Passo induttivo**

Supponiamo che sia vero per n , e proviamolo per $(n + 1)$. Per ipotesi induttiva, abbiamo:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Dimostrazione (2/4)

Allora:

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b) \cdot (a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \underbrace{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}}_{= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k}\end{aligned}$$

Dimostrazione (3/4)

Isolando il termine con $k = 0$ nella prima somma e quello con $k = n + 1$ nella seconda:

$$\begin{aligned}(a + b)^{n+1} &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k \\ &\quad + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k\end{aligned}$$

Dimostrazione (4/4)

Raccogliendo e usando la relazione ricorsiva:

$$\begin{aligned}(a + b)^{n+1} &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \underbrace{\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right)}_{= \binom{n+1}{k}} a^{n-k+1} b^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k\end{aligned}$$

che è esattamente l'asserto voluto, per $n + 1$.



Osservazione 2

Per ogni intero $n \geq 0$ e k intero tale che $0 \leq k \leq n$, abbiamo:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

Dimostrazione

Scriviamo:

$$2^n = (1 + 1)^n$$

Applichiamo ora la formula di Newton:

$$(1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$



Calcolo ricorsivo: il triangolo di Tartaglia

La relazione (2) permette di calcolare i coefficienti binomiali $\binom{n}{k}$ per mezzo del cosiddetto **triangolo di Tartaglia** (o di Pascal). Le regole per la creazione del triangolo sono:

1. In cima al triangolo si pone il numero $\binom{0}{0} = 1$ (per definizione).
2. Ai lati si pongono i numeri $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ per ogni $n \geq 1$.
3. Per $0 < k < n$, il numero $\binom{n}{k}$ viene scritto all'incrocio della n -esima riga e della k -esima colonna.
4. Il numero $\binom{n}{k}$ risulta dalla somma dei due numeri che si trovano nella riga precedente, quello sulla stessa colonna e quello sulla colonna precedente.

Esempio (1/2)

Il triangolo di Tartaglia con $n \leq 10$ e $k \leq 10$ è:

	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$	$k = 9$	$k = 10$
$n = 0$	1										
$n = 1$	1	1									
$n = 2$	1	2	1								
$n = 3$	1	3	3	1							
$n = 4$	1	4	6	4	1						
$n = 5$	1	5	10	10	5	1					
$n = 6$	1	6	15	20	15	6	1				
$n = 7$	1	7	21	35	35	21	7	1			
$n = 8$	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
$n = 9$	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
$n = 10$	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Esempio (2/2)

Per calcolare il coefficiente binomiale $\binom{5}{3}$, corrispondente alla cella blu, si può usare la relazione (2) e sommare i due coefficienti binomiali $\binom{4}{2}$ e $\binom{4}{3}$, corrispondenti alle celle rosse:

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3} = 6 + 4 = 10.$$

Esempio

Grazie al precedente triangolo di Tartaglia e alla formula di Newton possiamo calcolare:

$$(a + b)^5 = a^5 + 5 a^4 b + 10 a^3 b^2 + 10 a^2 b^3 + 5 a b^4 + b^5$$

Coefficienti binomiali:

- ▶ $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, con $0 \leq k \leq n$
- ▶ Simmetria: $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$; relazione ricorsiva:
 $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

Formula di Newton e triangolo di Tartaglia:

- ▶ $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ e quindi $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$
- ▶ Il triangolo di Tartaglia calcola i coefficienti binomiali in modo ricorsivo

Valore assoluto

Introduzione: Valore assoluto

- ▶ In questa sezione definiamo il **valore assoluto** (o modulo) di un numero reale
- ▶ Dimostreremo la **disuguaglianza triangolare** e la **disuguaglianza triangolare inversa** in $\mathbb{R}$
- ▶ Queste disuguaglianze sono strumenti fondamentali per stimare distanze e saranno usate continuamente nello studio dei limiti

Definizione 3: di valore assoluto

*Il **valore assoluto** di un numero reale $a \in \mathbb{R}$ (o **modulo** di a) è il numero non negativo così definito:*

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Una conseguenza della definizione

Dalla definizione di valore assoluto segue immediatamente che:

$$\forall \varepsilon \geq 0, a \in \mathbb{R}, \quad |a| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq a \leq \varepsilon \quad (3)$$

Disuguaglianza triangolare in $\mathbb{R}$

Osservazione 3: disuguaglianza triangolare in $\mathbb{R}$

$$|b + c| \leq |b| + |c| \quad \forall b, c \in \mathbb{R} \quad (4)$$

Dimostrazione

Scriviamo le due relazioni:

$$-|b| \leq b \leq |b|, \quad -|c| \leq c \leq |c|$$

e sommiamo membro a membro:

$$-(|b| + |c|) \leq b + c \leq |b| + |c|$$

Quindi per la (3), con $\varepsilon = |b| + |c| \geq 0$ e $a = b + c$, segue la (4).



Altre forme della disuguaglianza triangolare (1/2)

- La disuguaglianza triangolare è usata anche nella forma seguente:

$$|d - e| \leq |d - f| + |e - f| \quad \forall d, e, f \in \mathbb{R}$$

Per ottenerla basta porre nella (4):

$$b = d - f, \quad c = f - e$$

otteniamo:

$$|d - f + f - e| = |d - e| \leq |d - f| + |f - e| = |d - f| + |e - f|$$

in quanto:

$$|f - e| = |e - f| \quad \forall e, f \in \mathbb{R}$$

Altre forme della disuguaglianza triangolare (2/2)

- Inoltre la disuguaglianza triangolare si può anche scrivere nella forma seguente:

$$|g| \leq |g - h| + |h| \quad \text{cioè} \quad |g| - |h| \leq |g - h| \quad \forall g, h \in \mathbb{R} \quad (5)$$

Per ottenerla basta porre nella (4):

$$b = g - h, \quad c = h$$

Disuguaglianza triangolare inversa in $\mathbb{R}$

Osservazione 4: disuguaglianza triangolare inversa in $\mathbb{R}$

$$||g| - |h|| \leq |g - h|, \quad \forall g, h \in \mathbb{R}.$$

Dimostrazione

Dalla (5) abbiamo

$$|g| - |h| \leq |g - h| \quad \forall g, h \in \mathbb{R}$$

Analogamente scambiando g con h nella (5) otteniamo:

$$|h| - |g| \leq |h - g| = |g - h| \quad \text{ovvero} \quad |g| - |h| \geq -|g - h|$$

dunque abbiamo

$$-(|g - h|) \leq |g| - |h| \leq |g - h| \quad \forall g, h \in \mathbb{R}$$

Quindi per la (3), con $\varepsilon = |g - h| \geq 0$ e $a = |g| - |h|$ segue la disuguaglianza triangolare inversa. □

Ulteriori proprietà del valore assoluto

- La (4) può facilmente estendersi al caso di k addendi:

$$\left| \sum_{i=1}^k b_i \right| \leq \sum_{i=1}^k |b_i|.$$

- Valgono anche le seguenti proprietà immediate:

$$|b c| = |b| |c|, \quad |-b| = |b| \quad \forall b, c \in \mathbb{R},$$

$$\left| \frac{b}{c} \right| = \frac{|b|}{|c|} \quad \forall b, c \in \mathbb{R}, \quad c \neq 0.$$

Valore assoluto:

- ▶ $|a| = a$ se $a \geq 0$, $|a| = -a$ se $a < 0$
- ▶ $|a| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq a \leq \varepsilon$

Disuguaglianze:

- ▶ Triangolare: $|b + c| \leq |b| + |c|$, estendibile a k addendi
- ▶ Triangolare inversa: $||g| - |h|| \leq |g - h|$
- ▶ $|bc| = |b| |c|$, $|b/c| = |b|/|c|$, $|-b| = |b|$

Riepilogo finale

- ▶ Il fattoriale $n!$ è il prodotto dei primi n interi ($0! = 1$) e cresce molto rapidamente
- ▶ I coefficienti binomiali $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ sono simmetrici e soddisfano la relazione ricorsiva del triangolo di Tartaglia
- ▶ La formula di Newton: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$
- ▶ Il valore assoluto soddisfa la disuguaglianza triangolare e la disuguaglianza triangolare inversa