

Sommatorie, progressioni geometriche e aritmetiche

Indice

Sommatorie

Progressioni geometriche

Progressioni aritmetiche



Sommatorie

Introduzione: Sommatorie

- ▶ In questa sezione introduciamo il **simbolo di sommatoria** $\sum$, una notazione compatta per scrivere somme di molti termini
- ▶ Vedremo le sue **sei proprietà principali** (prodotto per una costante, termine costante, unione di sommatorie, scomposizione, traslazione e riflessione di indici)
- ▶ Calcoleremo infine alcune **sommatorie importanti**: la somma dei primi n numeri naturali, dei primi n numeri dispari e dei primi n numeri pari

Il simbolo di sommatoria

Definizione 1: di sommatoria

Siano $a_1, a_2, \dots, a_n$, n numeri reali. La loro somma

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

si può indicare in forma compatta col simbolo di sommatoria:

$$\sum_{k=1}^n a_k$$

che si legge: “sommatoria per k da 1 a n di a_k ”. Il simbolo k si dice indice di sommatoria.

- ▶ Il simbolo di sommatoria è dunque una pura e semplice stenografia, che tuttavia risulta molto utile quando i termini a_k sono definiti esplicitamente in funzione dell'indice k .

Esempio

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$$

$$\sum_{k=3}^n k^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + \cdots + n^2$$

Indice muto

- L'indice di sommatoria è un **indice muto**. Questo vuol dire che se si sostituisce k con i , j o qualunque altro indice (in tutte le sue occorrenze) il valore della sommatoria non cambia.

Esempio

Abbiamo:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{i=1}^n i^2$$

in quanto i due simboli indicano la somma dei quadrati dei primi n numeri naturali (senza lo zero).

Invece, abbiamo:

$$\sum_{k=1}^n k^2 \neq \sum_{k=1}^m k^2$$

in quanto i due simboli indicano la somma, rispettivamente, dei primi n oppure dei primi m quadrati (se $n \neq m$ il risultato sarà diverso).

Principali proprietà delle sommatorie

Vediamo ora sei proprietà fondamentali delle sommatorie, che ci aiuteranno a manipolare e semplificare le espressioni con il simbolo $\sum$.

Prodotto per una costante

Osservazione 1: prodotto per una costante

Data una sommatoria $\sum_{k=1}^n a_k$ e un numero reale $c \in \mathbb{R}$, abbiamo:

$$\sum_{k=1}^n (c \cdot a_k) = c \sum_{k=1}^n a_k$$

Dimostrazione

Dalla proprietà distributiva abbiamo:

$$\underbrace{c a_1 + c a_2 + \cdots + c a_n}_{=\sum_{k=1}^n (c \cdot a_k)} = \underbrace{c (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)}_{=c \sum_{k=1}^n a_k}$$



Sommatoria con termine costante

Osservazione 2: sommatoria con termine costante

Per ogni numero naturale $n \geq 1$ e ogni numero reale $c \in \mathbb{R}$, abbiamo:

$$\sum_{k=1}^n c = c \cdot n$$

Dimostrazione

Abbiamo:

$$= \sum_{k=1}^n c \quad \underbrace{c + c + \cdots + c}_{\text{ovvero } c \text{ sommato } n \text{ volte}} = c n$$



Osservazione 3: unione di sommatorie

Date due sommatorie $\sum_{k=1}^n a_k$ e $\sum_{k=1}^n b_k$, abbiamo:

$$\sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)$$

Dimostrazione

Abbiamo:

$$\begin{aligned} & \underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + b_1 + b_2 + \cdots + b_n}_{=\sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k} \\ &= \underbrace{a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \cdots + a_n + b_n}_{=\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)} \end{aligned}$$



- ▶ Le tre proprietà che seguono (scomposizione, traslazione di indici e riflessione di indici) sono semplicemente differenti scritture e/o ordinamenti dei termini delle sommatorie
- ▶ Per dimostrarle basta scrivere per esteso i termini delle due sommatorie e osservare che sono gli stessi

Osservazione 4: scomposizione

Dati due numeri naturali $n \geq 1$ e $m \geq 1$, abbiamo:

$$\sum_{k=1}^{n+m} a_k = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k$$

Dimostrazione

I termini della sommatoria $\sum_{k=1}^{n+m} a_k$ si raggruppano nei primi n e negli ultimi m :

$$\begin{aligned} & \underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}_{=\sum_{k=1}^n a_k} + \underbrace{a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m}}_{=\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k} \\ &= \underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+m}}_{=\sum_{k=1}^{n+m} a_k} \end{aligned}$$



Osservazione 5: traslazione di indici

Data una sommatoria $\sum_{k=1}^n a_k$ e un numero naturale $m \geq 1$, abbiamo:

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1+m}^{n+m} a_{k-m} = \sum_{k=1-m}^{n-m} a_{k+m}$$

Dimostrazione (1/2)

Nella sommatoria $\sum_{k=1+m}^{n+m} a_{k-m}$ l'indice k varia da $1+m$ a $n+m$ e quindi l'indice $k-m$ varia da 1 a n :

$$\underbrace{a_{(1+m)-m} + a_{(2+m)-m} + \cdots + a_{(n+m)-m}}_{=\sum_{k=1+m}^{n+m} a_{k-m}}$$

$$= \underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}_{=\sum_{k=1}^n a_k}$$

Dimostrazione (2/2)

Allo stesso modo, nella sommatoria $\sum_{k=1-m}^{n-m} a_{k+m}$ l'indice k varia da $1-m$ a $n-m$ e quindi l'indice $k+m$ varia da 1 a n :

$$\begin{aligned} & \underbrace{a_{(1-m)+m} + a_{(2-m)+m} + \cdots + a_{(n-m)+m}}_{=\sum_{k=1-m}^{n-m} a_{k+m}} \\ &= \underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}_{=\sum_{k=1}^n a_k} \end{aligned}$$



Osservazione 6: riflessione di indici

Data una sommatoria $\sum_{k=1}^n a_k$, abbiamo:

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k}$$

Dimostrazione (1/2)

Nella sommatoria $\sum_{k=1}^n a_{n-k+1}$ l'indice k varia da 1 a n e quindi l'indice $n - k + 1$ varia da n a 1, cioè i termini sono gli stessi, elencati in ordine inverso:

$$\underbrace{a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1}_{=\sum_{k=1}^n a_{n-k+1}} = \underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}_{=\sum_{k=1}^n a_k}$$

Dimostrazione (2/2)

Allo stesso modo, nella sommatoria $\sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k}$ l'indice k varia da 0 a $n-1$ e quindi l'indice $n-k$ varia da n a 1:

$$\underbrace{a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1}_{=\sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k}} = \underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}_{=\sum_{k=1}^n a_k}$$



Alcune sommatorie importanti

Usando le proprietà appena viste, calcoliamo ora in forma chiusa alcune sommatorie importanti.

Somma dei primi n numeri naturali

Osservazione 7: somma dei primi n numeri naturali (senza lo zero)

Per ogni numero naturale $n \geq 1$, vale:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dimostrazione

Usando la riflessione di indici:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n k \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n (n - k + 1) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (k + n - k + 1) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$



Somma dei primi n numeri dispari

Osservazione 8: somma dei primi n numeri dispari

Per ogni numero naturale $n \geq 1$, vale:

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$$

o equivalentemente

$$\sum_{k=0}^{n-1} (2k + 1) = n^2$$

Dimostrazione (1/2)

Sfruttando le proprietà delle sommatorie abbiamo:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (2k - 1) &= 2 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 \\ &= 2 \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) - n = n^2 + n - n = n^2\end{aligned}$$

Dimostrazione (2/2)

Per la seconda forma:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} (2k + 1) &= 2 \sum_{k=0}^{n-1} k + \sum_{k=0}^{n-1} 1 \\&= 2 \sum_{k=1}^n (k - 1) + n = 2 \left(\sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 \right) + n \\&= 2 \left(\frac{n(n+1)}{2} - n \right) + n = n^2 + n - 2n + n = n^2\end{aligned}$$



Somma dei primi n numeri pari

Osservazione 9: somma dei primi n numeri pari (senza lo zero)

Per ogni numero naturale $n \geq 1$, vale:

$$\sum_{k=1}^n 2k = n(n+1)$$

Dimostrazione

$$\sum_{k=1}^n 2k = 2 \sum_{k=1}^n k = 2 \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) = n(n+1)$$



- ▶ Le tre sommatorie importanti appena viste si dimostrano anche per induzione, nel capitolo «[Principio di induzione](#)» della Parte 1
- ▶ Qui le abbiamo invece ottenute usando soltanto le proprietà delle sommatorie

Sommatorie:

- ▶ $\sum_{k=1}^n a_k$ è una notazione compatta per $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$;
l'indice k è **muto**
- ▶ Le sei proprietà: prodotto per una costante, termine costante, unione di sommatorie, scomposizione, traslazione e riflessione di indici

Sommatorie importanti ($n \geq 1$):

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2, \quad \sum_{k=1}^n 2k = n(n+1)$$

Progressioni geometriche



Introduzione: Progressioni geometriche

- ▶ In questa sezione introduciamo le **progressioni geometriche**: sequenze in cui ogni termine si ottiene dal precedente moltiplicandolo per una costante, la **ragione**
- ▶ Ricaveremo la **formula chiusa del termine k -esimo** e la formula per la **somma dei primi n termini** di una progressione geometrica
- ▶ Questa formula ritorna spesso nel corso (ad esempio nello studio delle serie geometriche)

Definizione 2: di progressione geometrica

*Una sequenza di numeri reali è in **progressione geometrica** se il rapporto tra ogni termine (a partire dal secondo) e il precedente è costante. Tale costante si dice ragione della progressione.*

Termini della progressione geometrica

Dato il primo termine $a \in \mathbb{R}$ e la ragione $q \in \mathbb{R}$, l'associata progressione geometrica è:

$$a, \quad a q, \quad a q^2, \quad a q^3, \quad a q^4, \quad \dots$$

Ogni termine (a partire dal secondo) si ottiene dal precedente moltiplicandolo per q . Il k -esimo termine ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$) si può scrivere $a q^{k-1}$ e abbiamo:

$a q^{1-1} = a q^0 = a$	primo termine, in posizione $k = 1$
$a q^{2-1} = a q^1 = a q$	secondo termine, in posizione $k = 2$
$a q^{3-1} = a q^2$	terzo termine, in posizione $k = 3$
$a q^{4-1} = a q^3$	quarto termine, in posizione $k = 4$
$\dots$	$\dots$

Osservazione 10: termine k -esimo di una progressione geometrica

Dato il primo termine $a \in \mathbb{R}$ e la ragione $q \in \mathbb{R}$, indichiamo con t_k il termine in posizione k . La relazione ricorsiva che definisce la progressione è:

$$t_1 = a \quad \text{e} \quad t_k = t_{k-1} q \quad \text{per ogni } k \geq 2$$

e la formula chiusa del termine k -esimo è:

$$t_k = a q^{k-1} \quad \text{per ogni } k \geq 1$$

Dimostrazione

Applichiamo ripetutamente la relazione ricorsiva:

$$t_1 = a = a q^0$$

$$t_2 = t_1 q = a q = a q^1$$

$$t_3 = t_2 q = a q q = a q^2$$

$$t_4 = t_3 q = a q^2 q = a q^3$$

$$\vdots$$

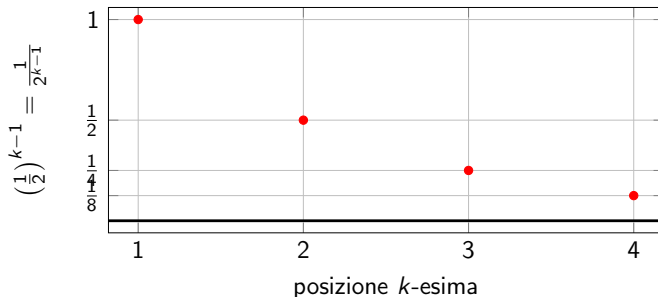
$$t_k = t_{k-1} q = a q^{k-2} q = a q^{k-1}$$



Esempio (1/3)

- Con $a = 1$ e $q = \frac{1}{2}$, i primi 4 termini sono:

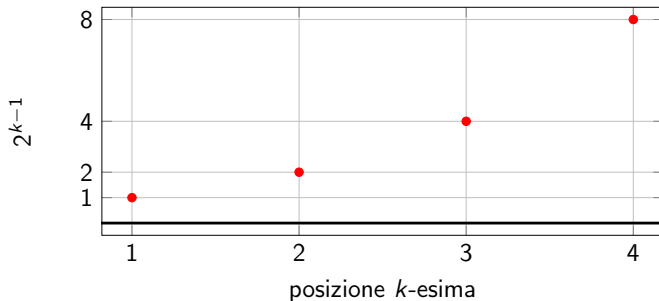
$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{8}$$



Esempio (2/3)

- Con $a = 1$ e $q = 2$, i primi 4 termini sono:

1, 2, 4, 8

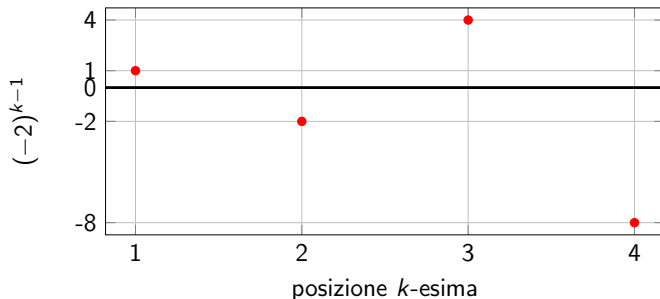


Esempio (3/3)

- ▶ Con $a = 1$ e $q = -2$, i primi 4 termini sono:

$$1, \quad -2, \quad 4, \quad -8$$

- ▶ Con ragione negativa i termini cambiano di segno a ogni passo



Sommatorie dei termini delle progressioni geometriche

Vediamo ora come calcolare in forma chiusa la somma dei primi n termini di una progressione geometrica.

Somma dei primi n termini

Osservazione 11: somma dei primi n termini della progressione geometrica ($a = 1$)

Dato $q \in \mathbb{R}$, per ogni numero naturale $n \geq 1$ vale:

$$\sum_{k=1}^n q^{k-1} = \begin{cases} \frac{q^n - 1}{q - 1} & \text{se } q \neq 1 \\ n & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dimostrazione (1/2)

Se $q \neq 1$, proviamo l'equazione nella seguente forma equivalente:

$$(q - 1) \sum_{k=1}^n q^{k-1} = q^n - 1$$

Applicando le proprietà delle sommatorie, in particolare il prodotto per una costante e la traslazione di indici, si ha:

$$\begin{aligned}(q - 1) \sum_{k=1}^n q^{k-1} &= q \sum_{k=1}^n q^{k-1} - \sum_{k=1}^n q^{k-1} = \\&= \sum_{k=1}^n q^k - \sum_{k=1}^n q^{k-1} = \sum_{k=1}^n q^k - \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \\&= \sum_{k=1}^{n-1} q^k + q^n - \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} q^k \right) = q^n - 1\end{aligned}$$

Dimostrazione (2/2)

Dividendo per $q - 1 \neq 0$ otteniamo:

$$\sum_{k=1}^n q^{k-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Se $q = 1$, abbiamo invece:

$$\sum_{k=1}^n q^{k-1} = \sum_{k=1}^n 1 = n$$



La ragione può essere negativa o nulla

- ▶ La dimostrazione non usa mai il segno della ragione: la formula vale per ogni $q \in \mathbb{R}$
- ▶ L'unico caso da precisare è $q = 0$: il primo addendo è $q^{1-1} = 0^0$, che qui si intende uguale a 1 (convenzione $0^0 = 1$)
- ▶ Con questa convenzione, per ogni $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^n 0^{k-1} = 1 + 0 + \cdots + 0 = 1 \quad \text{e} \quad \frac{0^n - 1}{0 - 1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

Estensione al caso $a \in \mathbb{R}$

- Dati $q \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ e $a \in \mathbb{R}$, la formula si estende come segue:

$$\sum_{k=1}^n a q^{k-1} = \begin{cases} a \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} \right) & \text{se } q \neq 1 \\ a n & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dato che

$$\sum_{k=1}^n a q^{k-1} = a \sum_{k=1}^n q^{k-1}$$

Forma equivalente

► Chiaramente:

$$\frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

e quindi abbiamo anche:

$$\sum_{k=1}^n a q^{k-1} = \begin{cases} a \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right) & \text{se } q \neq 1 \\ a n & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- ▶ La formula della somma dei primi n termini si dimostra anche per induzione, nel capitolo «[Principio di induzione](#)» della Parte 1
- ▶ Vediamo ora tre esempi numerici, che verificano la formula con un conto diretto

Esempio (1/4)

- Con $a = 2$ e $q = \frac{1}{2}$, i primi 4 termini sono:

$$2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad 2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{8+4+2+1}{4} = \frac{15}{4}$$

la somma dei primi $n = 4$ termini è data dalla formula:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} &= \sum_{k=1}^4 \frac{2}{2^{k-1}} = 2 \frac{1 - \frac{1}{2^4}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 2 \frac{1 - \frac{1}{16}}{\frac{1}{2}} = \frac{15}{16} \cdot 4 = \frac{15}{4} \end{aligned}$$

Esempio (2/4)

- Con $a = 1$ e $q = \frac{1}{2}$, i primi 4 termini sono:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \quad \text{e} \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{8 + 4 + 2 + 1}{8} = \frac{15}{8}$$

la somma dei primi $n = 4$ termini è data dalla formula:

$$\sum_{k=1}^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \sum_{k=1}^4 \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1 - \frac{1}{2^4}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{16}}{\frac{1}{2}} = \frac{15}{16} \cdot 2 = \frac{15}{8}$$

Esempio (3/4)

- Con $a = 1$ e $q = 2$, i primi 4 termini sono:

$$1, \quad 2, \quad 4, \quad 8 \quad \text{e} \quad 1 + 2 + 4 + 8 = 15$$

la somma dei primi $n = 4$ termini è data dalla formula:

$$\sum_{k=1}^4 2^{k-1} = \frac{2^4 - 1}{2 - 1} = 16 - 1 = 15$$

Esempio (4/4)

- Con $a = 1$ e $q = -2$, i primi 4 termini sono:

$$1, \quad -2, \quad 4, \quad -8 \quad \text{e} \quad 1 - 2 + 4 - 8 = -5$$

la somma dei primi $n = 4$ termini è data dalla formula:

$$\sum_{k=1}^4 (-2)^{k-1} = \frac{(-2)^4 - 1}{-2 - 1} = \frac{15}{-3} = -5$$

Progressioni geometriche:

- ▶ Primo termine a , ragione q : termini $a, aq, aq^2, \dots$
- ▶ Relazione ricorsiva $t_1 = a, t_k = t_{k-1} q$; formula chiusa $t_k = a q^{k-1}$

Somma dei primi n termini:

- ▶ Se $q \neq 1$: $\sum_{k=1}^n a q^{k-1} = a \frac{q^n - 1}{q - 1} = a \frac{1 - q^n}{1 - q}$
- ▶ Se $q = 1$: $\sum_{k=1}^n a q^{k-1} = a n$

Progressioni aritmetiche



Introduzione: Progressioni aritmetiche

- ▶ In questa sezione introduciamo le **progressioni aritmetiche**: sequenze in cui ogni termine si ottiene dal precedente sommandogli una costante, la **ragione**
- ▶ Sono l'analogo additivo delle progressioni geometriche: là si moltiplica per q , qui si somma d
- ▶ Ricaveremo anche qui la **formula chiusa del termine k -esimo** e la formula per la **somma dei primi n termini**, che useremo nello studio delle serie

Definizione 3: di progressione aritmetica

*Una sequenza di numeri reali è in **progressione aritmetica** se la differenza tra ogni termine (a partire dal secondo) e il precedente è costante. Tale costante si dice ragione della progressione.*

Termini della progressione aritmetica

Dato il primo termine $a \in \mathbb{R}$ e la ragione $d \in \mathbb{R}$, l'associata progressione aritmetica è:

$$a, \quad a + d, \quad a + 2d, \quad a + 3d, \quad a + 4d, \quad \dots$$

Ogni termine (a partire dal secondo) si ottiene dal precedente sommandogli d . Il k -esimo termine ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$) si può scrivere $a + (k - 1)d$ e abbiamo:

$a + (1 - 1)d = a + 0d = a$	primo termine ($k = 1$)
$a + (2 - 1)d = a + 1d = a + d$	secondo termine ($k = 2$)
$a + (3 - 1)d = a + 2d$	terzo termine ($k = 3$)
$a + (4 - 1)d = a + 3d$	quarto termine ($k = 4$)
$\dots$	$\dots$

Osservazione 12: termine k -esimo di una progressione aritmetica

Dato il primo termine $a \in \mathbb{R}$ e la ragione $d \in \mathbb{R}$, indichiamo con t_k il termine in posizione k . La relazione ricorsiva che definisce la progressione è:

$$t_1 = a \quad \text{e} \quad t_k = t_{k-1} + d \quad \text{per ogni } k \geq 2$$

e la formula chiusa del termine k -esimo è:

$$t_k = a + (k - 1) d \quad \text{per ogni } k \geq 1$$

Dimostrazione

Applichiamo ripetutamente la relazione ricorsiva:

$$t_1 = a = a + 0 d$$

$$t_2 = t_1 + d = a + d = a + 1 d$$

$$t_3 = t_2 + d = a + d + d = a + 2 d$$

$$t_4 = t_3 + d = a + 2 d + d = a + 3 d$$

$$\vdots$$

$$t_k = t_{k-1} + d = a + (k-2) d + d = a + (k-1) d$$



La stessa formula si ottiene con un secondo ragionamento, che non usa i puntini di sospensione: si sommano tutte le differenze consecutive e la somma risulta **telescopica**.

Dimostrazione alternativa (1/2)

Scriviamo la relazione ricorsiva nella forma $t_j - t_{j-1} = d$ per ogni posizione j da 2 a k :

$$t_2 - t_1 = d$$

$$t_3 - t_2 = d$$

$$t_4 - t_3 = d$$

$$\vdots$$

$$t_k - t_{k-1} = d$$

Sommiamo ora tutte queste $k - 1$ uguaglianze: a destra sommiamo d con sé stesso $k - 1$ volte e otteniamo $d(k - 1)$.

Dimostrazione alternativa (2/2)

A sinistra la somma è **telescopica**: ogni termine compare due volte, una con il segno $+$ e una con il segno $-$, tranne t_k e t_1 :

$$\underbrace{(t_2 - t_1) + (t_3 - t_2) + \cdots + (t_k - t_{k-1})}_{=\sum_{j=2}^k (t_j - t_{j-1})} = t_k - t_1 = t_k - a$$

Uguagliando i due membri abbiamo $t_k - a = d(k - 1)$, cioè:

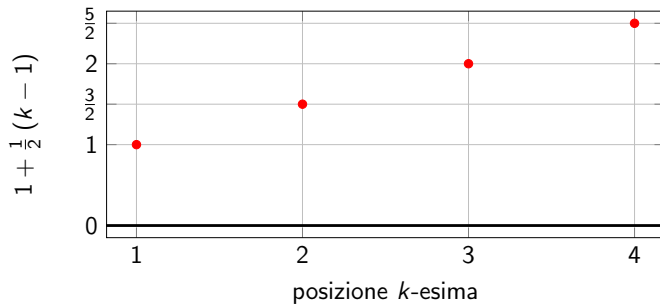
$$t_k = a + (k - 1) d \quad \text{per ogni } k \geq 1$$



Esempio (1/2)

- Con $a = 1$ e $d = \frac{1}{2}$, i primi 4 termini sono:

$$1, \quad \frac{3}{2}, \quad 2, \quad \frac{5}{2}$$

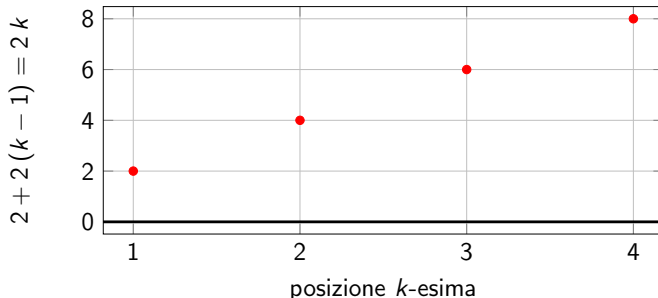


Esempio (2/2)

- Con $a = 2$ e $d = 2$, i primi 4 termini sono:

$$2, 4, 6, 8$$

cioè i primi 4 numeri pari (senza lo zero)



Sommatorie dei termini delle progressioni aritmetiche

Vediamo ora come calcolare in forma chiusa la somma dei primi n termini di una progressione aritmetica: si usa la riflessione di indici, la stessa tecnica della somma dei primi n numeri naturali.



Somma dei primi n termini

Osservazione 13: somma dei primi n termini della progressione aritmetica ($a = 0$)

Dato $d \in \mathbb{R}$, per ogni numero naturale $n \geq 1$ vale:

$$\sum_{k=1}^n d(k-1) = d \left(\frac{n(n-1)}{2} \right)$$

Dimostrazione

Usando il prodotto per una costante e la riflessione di indici:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n d(k-1) &= \frac{d}{2} \left(\sum_{k=1}^n (k-1) + \sum_{k=1}^n (k-1) \right) \\&= \frac{d}{2} \left(\sum_{k=1}^n (k-1) + \sum_{k=1}^n (n-k) \right) \\&= \frac{d}{2} \sum_{k=1}^n (k-1 + n-k) = \frac{d}{2} \sum_{k=1}^n (n-1) \\&= d \left(\frac{n(n-1)}{2} \right)\end{aligned}$$

(il termine di posto k è $a_k = k-1$, quindi $a_{n-k+1} = n-k$) □

Estensione al caso $a \in \mathbb{R}$

- Dati $d \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ e $a \in \mathbb{R}$, la formula si estende come segue:

$$\sum_{k=1}^n (a + d(k-1)) = a n + d \left(\frac{n(n-1)}{2} \right)$$

dato che

$$\sum_{k=1}^n (a + d(k-1)) = \underbrace{\sum_{k=1}^n a}_{=a n} + \sum_{k=1}^n d(k-1)$$

Forma equivalente

- Riflettendo l'indice, il termine di posto k e quello di posto $n - k + 1$ hanno somma costante $t_k + t_{n-k+1} = t_1 + t_n$, e quindi:

$$\sum_{k=1}^n (a + d(k-1)) = \frac{n}{2} \left(\underbrace{a}_{=t_1} + \underbrace{a + (n-1)d}_{=t_n} \right) = n \left(\frac{t_1 + t_n}{2} \right)$$

- La somma dei primi n termini è quindi n volte la media tra il primo e l'ultimo termine

Casi particolari già noti

- ▶ Con $a = 1$ e $d = 1$ la progressione è $1, 2, 3, \dots$ e la formula dà

$$n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

cioè la somma dei primi n numeri naturali (senza lo zero)

- ▶ Con $a = 1$ e $d = 2$ la progressione è $1, 3, 5, \dots$ e la formula dà

$$n + 2 \frac{n(n-1)}{2} = n^2$$

cioè la somma dei primi n numeri dispari

Esempio (1/2)

- Con $a = 1$ e $d = \frac{1}{2}$, i primi 4 termini sono:

$$1, \quad \frac{3}{2}, \quad 2, \quad \frac{5}{2} \quad \text{e} \quad 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

la somma dei primi $n = 4$ termini è data dalla formula:

$$\sum_{k=1}^4 \left(1 + \frac{1}{2} (k-1) \right) = 1 \cdot 4 + \frac{1}{2} \left(\frac{4 \cdot 3}{2} \right) = 4 + 3 = 7$$

Esempio (2/2)

- Con $a = 2$ e $d = 2$, i primi 4 termini sono:

$$2, 4, 6, 8 \quad \text{e} \quad 2 + 4 + 6 + 8 = 20$$

la somma dei primi $n = 4$ termini è data dalla formula:

$$\sum_{k=1}^4 (2 + 2(k-1)) = 2 \cdot 4 + 2 \left(\frac{4 \cdot 3}{2} \right) = 8 + 12 = 20$$

e con la forma equivalente: $4 \left(\frac{2+8}{2} \right) = 20$

Progressioni aritmetiche:

- ▶ Primo termine a , ragione d : termini $a, a + d, a + 2d, \dots$
- ▶ Relazione ricorsiva $t_1 = a, t_k = t_{k-1} + d$; formula chiusa $t_k = a + (k - 1) d$

Somma dei primi n termini:

- ▶
$$\sum_{k=1}^n (a + d(k - 1)) = a n + d \frac{n(n - 1)}{2} = n \frac{t_1 + t_n}{2}$$
- ▶ Casi particolari: somma dei primi n naturali ($a = d = 1$) e dei primi n dispari ($a = 1, d = 2$)

Riepilogo finale

- ▶ Il simbolo $\sum$ permette di scrivere in modo compatto somme di molti termini; il suo indice è muto
- ▶ Le sei proprietà delle sommatorie (prodotto per una costante, termine costante, unione, scomposizione, traslazione e riflessione di indici) permettono di calcolare somme in forma chiusa

- ▶ Sommatorie importanti:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2, \quad \sum_{k=1}^n 2k = n(n+1)$$

- ▶ In una progressione geometrica di ragione $q \neq 1$:

$$\sum_{k=1}^n a q^{k-1} = a \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

- ▶ In una progressione aritmetica:

$$\sum_{k=1}^n (a + d(k-1)) = a n + d \frac{n(n-1)}{2}$$