

Radicali, potenze, logaritmi e aritmetica modulare

Indice

Radicali, potenze, logaritmi
Radici n -esime aritmetiche
Potenze a esponente reale
Logaritmi
Approssimazioni

Aritmetica modulare

Radicali, potenze, logaritmi



Introduzione: Radicali, potenze, logaritmi

- ▶ In conseguenza della proprietà R_4 possiamo eseguire, nel campo reale, operazioni che sono solo occasionalmente possibili nel campo razionale, come l'estrazione di radice o l'elevamento a potenza.
- ▶ In questa sezione definiamo le **radici n -esime**, le **potenze a esponente reale** e i **logaritmi**, con le loro proprietà
- ▶ Discuteremo infine cosa significa **approssimare** un numero irrazionale



Teorema 1

Per ogni $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, esiste uno e un solo $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, tale che $x^n = y$.

- Tale numero si chiama radice n -esima aritmetica di y e si indica con uno dei simboli

$$\sqrt[n]{y} \text{ oppure } y^{\frac{1}{n}}.$$

Dimostrazione

La dimostrazione di questo Teorema verrà fornita utilizzando le proprietà delle funzioni continue. □

- ▶ La radice n -esima aritmetica è non negativa.

Esempio

Radice n -esima aritmetica. Ad esempio:

$$\sqrt{4} = 2, \quad \sqrt{9} = 3.$$

Abbiamo inoltre:

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Rappresentazione decimale della radice n -esima (1/3)

- Cerchiamo l'allineamento decimale di

$$\sqrt{2} \approx 1.41421356237$$

questo numero, non essendo razionale, sarà rappresentato da un allineamento infinito (non periodico).

- Si procede così: si costruisce una classe di numeri razionali della forma:

$$\begin{aligned} 0 &< a_0 < a_0, a_1 < a_0, a_1 a_2 < a_0, a_1 a_2 a_3 \\ &< \dots < a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n < \dots \end{aligned}$$

Rappresentazione decimale della radice n -esima (2/3)

La regola è: ognuno di questi numeri è il più grande tra quelli con lo stesso numero di decimali dopo la virgola il cui quadrato è minore di 2. I primi di questi numeri sono:

$$\begin{array}{rcl} 1 & 1^2 & = 1 \\ 1,4 & (1,4)^2 & = 1,96 \\ 1,41 & (1,41)^2 & = 1,9881 \\ 1,414 & (1,414)^2 & = 1,999396 \\ 1,4142 & (1,4142)^2 & = 1,99996164 \\ \dots & & \end{array}$$

- ▶ Questo insieme di numeri, che chiamiamo E_- , è limitato superiormente (ognuno è < 2); per la proprietà R_4 esso possiede estremo superiore e viene usato per la definizione di $\sqrt{2}$.
- ▶ Il numero $\sqrt{2}$ si definisce precisamente come $\sup E_-$

Rappresentazione decimale della radice n -esima (3/3)

Si sarebbe potuto anche costruire una classe di numeri E_+ come la precedente con la regola che ognuno di essi sia il più piccolo tra quelli con lo stesso numero di decimali dopo la virgola il cui quadrato è maggiore di 2; avremmo ottenuto:

$$\begin{array}{lll} 2 & 2^2 & = 4 \\ 1,5 & (1,5)^2 & = 2,25 \\ 1,42 & (1,42)^2 & = 2,0164 \\ 1,415 & (1,415)^2 & = 2,002225 \\ 1,4143 & (1,4143)^2 & = 2,00024449 \\ \dots & & \end{array}$$

Questo insieme E_+ è limitato inferiormente (ogni elemento è > 1), perciò possiede estremo inferiore; si dimostra che:

$$\sqrt{2} = \inf E_+ = \sup E_-$$

I numeri della classe E_- approssimano $\sqrt{2}$ per difetto, quelli della classe E_+ per eccesso.

Potenze a esponente razionale

L'estrazione di radice n -esima è l'operazione inversa dell'elevamento a potenza intera.

Esponente razionale

- Si può estendere l'operazione di elevamento a potenza per ogni esponente razionale se la base è positiva (utilizzando il teorema precedente).

$$\text{Se } r = \frac{m}{n} \text{ e } a > 0 \text{ allora } a^r = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

(si assume $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}$ positivo)

Potenze a esponente reale

Esponente reale

- ▶ Se l'esponente è reale $b = b_0, b_1 b_2 b_3 \dots b_n \dots$ il numero a^b ($a > 0$) sarà individuato dalla classe di numeri

$$a^{b_0} \quad a^{b_0, b_1} \quad a^{b_0, b_1 b_2} \quad \dots$$

in un modo simile a quello del caso della radice.

Base negativa

Se la base a è negativa l'operazione di elevamento a potenza a^b è definita solo in certi casi:

1. se l'esponente b è intero, oppure
2. se l'esponente $b = \frac{n}{m}$ è razionale, *ridotto ai minimi termini*, purché non sia n dispari ed m pari.

Se $c < 0$ e m dispari, si definisce

$$\sqrt[m]{c} = -\sqrt[m]{-c}$$

Esempio

Base negativa. Per esempio:

$$(-2)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(-2)^3} = \sqrt[5]{-8} = -\sqrt[5]{8}$$

$$(-2)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{(-2)^2} = \sqrt[5]{4}$$

L'ipotesi dei minimi termini è essenziale: $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$ sono lo stesso numero razionale, ma

$$\sqrt[3]{(-8)^1} = -2 \quad \text{mentre} \quad \sqrt[6]{(-8)^2} = 2$$

- Quando si dice “non esiste in $\mathbb{R}$ ” si intende che non è possibile definire tale operazione in modo da mantenere valide le usuali regole di calcolo.

Esempio

Non esistenza della potenza a esponente reale. Per esempio:

$$(-2)^{\frac{3}{4}}$$

non esiste nel campo reale!

Proprietà delle potenze (1/3)

Siano

$$a, b \in \mathbb{R}, \quad a > 0 \quad \text{e} \quad b > 0 \quad (\text{reali positivi})$$

e

$$c, d \in \mathbb{R} \quad (\text{reali qualsiasi}),$$

le proprietà principali dell'elevamento a potenza sono:

$$a^0 = 1 \quad \forall a \neq 0$$

$$1^c = 1 \quad \forall c$$

$$a^c > 0 \quad \forall c$$

$$a^c > 1 \quad \forall a > 1 \quad \text{e} \quad c > 0$$

$$a^c < 1 \quad \forall a < 1 \quad \text{e} \quad c > 0$$

Proprietà delle potenze (2/3)

$$a^{c+d} = a^c \cdot a^d$$

$$(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$$

$$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$$

Proprietà delle potenze (3/3)

$$c < d \Rightarrow a^c < a^d \quad \text{se } a > 1$$

$$c < d \Rightarrow a^c > a^d \quad \text{se } a < 1$$

$$0 < a \leq b \Rightarrow a^c \leq b^c \quad \forall c > 0$$

- Consideriamo l'equazione

$$a^x = y, \quad a > 0$$

con y assegnato e x incognito. Anzitutto, se $a = 1$, essa è risolubile solo se $y = 1$ (e in tal caso ogni numero reale x è soluzione). Sia dunque $a \neq 1$.

- Se $y \leq 0$ essa non ha alcuna soluzione, vedere la proprietà $a^c > 0 \forall c$.
- Il seguente teorema ci dice che essa ha una sola soluzione per ogni $y > 0$.

Teorema 2

Sia $a > 0$, $a \neq 1$, $y > 0$. Esiste un unico numero reale x tale che $a^x = y$.

- ▶ Tale numero prende il nome di logaritmo in base a di y e si indica col simbolo:

$$\log_a y$$

- ▶ Il logaritmo è l'operazione inversa dell'elevamento a potenza.
- ▶ Il logaritmo di un numero in una data base è l'esponente al quale la base deve essere elevata per ottenere il numero stesso.

Proprietà dei logaritmi (1/2)

Siano

$x, y, a \in \mathbb{R}, \quad x > 0, y > 0, a > 0$ (reali positivi) e $a \neq 1$,

le proprietà principali dei logaritmi sono (si deducono da quelle degli esponenziali):

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a \left(\frac{1}{y} \right) = -\log_a y$$

Proprietà dei logaritmi (2/2)

$$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R})$$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} \quad (\forall b > 0, b \neq 1)$$

$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a} = -\log_{\frac{1}{a}} x \quad (x \neq 1)$$

Notazione

- ▶ $\lg n = \log_2 n \rightarrow$ **logaritmo binario**
- ▶ $\ln n = \log_e n \rightarrow$ **logaritmo naturale** (dove $e \approx 2.718$ è il **numero di Nepero**) (a volte il logaritmo naturale $\ln$ si denota anche $\log$)
- ▶ $\lg^k n = (\lg n)^k \rightarrow$ **potenza**
- ▶ $\lg \lg n = \lg(\lg n) \rightarrow$ **composizione**

Approssimazioni

- ▶ Un numero razionale può essere sempre espresso con precisione assoluta, sia ricorrendo alla scrittura frazionaria che a quella decimale (eventualmente con cifre periodiche).
- ▶ Invece non è possibile, naturalmente, scrivere tutte le cifre decimali di un numero irrazionale, dato che queste sono infinite e si susseguono senza periodicità.
- ▶ Cosa significa allora “conoscere” o “specificare” un numero irrazionale? Significa conoscere qualche algoritmo che ci consenta (almeno teoricamente) di scrivere tante cifre decimali esatte quante ne desideriamo.

Numeri irrazionali.

- ▶ Nell'esempio (già considerato) del numero irrazionale:

$$0,101001000100001\dots$$

formato in base alla regola: scrivere una cifra 1, una cifra 0, una cifra 1, due cifre 0, una cifra 1, tre cifre 0, e così via) è chiaro che potremmo scrivere tante cifre quante ne desideriamo.

- ▶ In altri casi, come

$$\sqrt{2} \quad \text{o} \quad \log_2 3,$$

le cose sono più laboriose e richiedono l'esecuzione di calcoli iterativi per determinare ogni successiva cifra decimale; tuttavia, questi calcoli sono effettivamente eseguibili.

Numeri specificati in modo non costruttivo

- ▶ Altre volte, in Analisi matematica, un numero viene specificato in modo non costruttivo, denotandolo come l'unico numero che risolve un determinato problema (una volta che si sia dimostrato appunto che tale soluzione esiste ed è unica).
- ▶ Si tratta di un modo operativamente meno soddisfacente, ma teoricamente ineccepibile.

Aspetti pratici del calcolo di numeri irrazionali

- ▶ Ogni volta che eseguiamo calcoli con una **calcolatrice tascabile**, questa scriverà solo numeri con un numero fissato di cifre decimali dopo la virgola (tipicamente 9). Questo significa che stiamo lavorando solo con numeri razionali, anzi con un sottoinsieme finito dell'insieme $\mathbb{Q}$.
- ▶ Lavorando con un **computer** le cose migliorano un po', ma rimaniamo comunque nell'ambito di sottoinsiemi finiti di $\mathbb{Q}$. Occorre naturalmente esserne consapevoli.
- ▶ Oltre all'approssimazione generata dagli strumenti di calcolo, a volte siamo noi stessi a non essere interessati a troppe cifre decimali; introduciamo allora volutamente delle approssimazioni, scrivendo ad esempio

$$\sqrt{2} \approx 1,414$$

Regola di arrotondamento

Regola di arrotondamento: l'ultima cifra che si scrive viene arrotondata all'unità inferiore (superiore) se la prima cifra che si trascura è da 0 a 4 (rispettivamente, da 5 a 9).



Esempio

Arrotondamento. Ad esempio:

$$2,4138 \approx 2,41$$

$$2,4152 \approx 2,42$$

Riepilogo (1/2)

Radici:

- ▶ Per $y > 0$, $n \geq 1$ esiste un unico $x > 0$ con $x^n = y$: $x = \sqrt[n]{y}$; inoltre $\sqrt{x^2} = |x|$
- ▶ $\sqrt{2} = \sup E_- = \inf E_+$ (approssimazioni per difetto e per eccesso)

Potenze:

- ▶ $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ per $a > 0$; esponente reale tramite approssimazioni decimali
- ▶ Base negativa: solo esponenti interi o razionali $\frac{n}{m}$ ridotti ai minimi termini, non con n dispari ed m pari
- ▶ Proprietà: $a^{c+d} = a^c a^d$, $(ab)^c = a^c b^c$, $(a^b)^c = a^{bc}$, monotonia

Riepilogo (2/2)

Logaritmi:

- ▶ $\log_a y$ è l'unico x con $a^x = y$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $y > 0$)
- ▶ $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$, cambio di base
- ▶ Notazioni: $\lg$, $\ln$, $\lg^k n$, $\lg \lg n$

Approssimazioni:

- ▶ Un irrazionale si “conosce” tramite un algoritmo che ne produce le cifre
- ▶ Calcolatrici e computer lavorano su sottoinsiemi finiti di $\mathbb{Q}$; regola di arrotondamento

Aritmetica modulare

Introduzione: Aritmetica modulare

- ▶ In questa sezione introduciamo la **parte intera** (floor), la **mantissa** e la **parte intera superiore** (ceil)
- ▶ Vedremo alcune loro proprietà utili nei calcoli
- ▶ Definiremo divisori, multipli, l'operazione **modulo** e l'**equivalenza modulo n**
- ▶ Sono strumenti fondamentali in matematica discreta e in informatica

Definizione 1: di parte intera

*Dato un numero reale $a \in \mathbb{R}$, denotiamo con $[a]$ o $\lfloor a \rfloor$ la **parte intera** (o “*floor*”) di a :*

$$[a] = \text{intero } n \text{ tale che } n \leq a < n + 1$$

- ▶ Equivalentemente, $\lfloor a \rfloor$ è il **più grande** intero minore o uguale ad a :

$$\lfloor a \rfloor = \max \{ n \in \mathbb{Z} : n \leq a \}$$

- ▶ Mentre per i numeri positivi la parte intera si ottiene semplicemente “buttando via le cifre dopo la virgola”, per i numeri negativi occorre prendere il massimo intero $\leq a$, che è diverso da quello che si ottiene buttando via le cifre dopo la virgola (tranne nel caso in cui a sia già un intero)

Esempio

Parte intera.

$$[2, 38] = 2; \quad [3] = 3; \quad [-1, 8] = -2.$$

Definizione 2: di mantissa

*Dato un numero reale $a \in \mathbb{R}$, denotiamo con (a) la **mantissa** (o parte decimale) di a :*

$$(a) = a - [a]$$

- ▶ La mantissa quindi non è un intero ma un numero reale, compreso in $[0, 1)$.
- ▶ Per i numeri positivi, si ottiene semplicemente “buttando via le cifre prima della virgola”, per i numeri negativi la mantissa è il **complemento a uno** del numero che si ottiene buttando via le cifre prima della virgola.

Esempio

Mantissa.

$$(2, 38) = 0.38; \quad (3) = 0; \quad (-1, 8) = 0.2.$$

Definizione 3: di parte intera superiore

*Dato un numero reale $a \in \mathbb{R}$, denotiamo con $\lceil a \rceil$ la **parte intera superiore** (o “*ceil*”) di a :*

$$\lceil a \rceil = \text{intero } n \text{ tale che } n - 1 < a \leq n$$

- Equivalentemente, $\lceil a \rceil$ è il **più piccolo** intero maggiore o uguale ad a :

$$\lceil a \rceil = \min \{ n \in \mathbb{Z} : n \geq a \}$$

Esempio

Ceil.

$$\lceil 2, 38 \rceil = 3; \quad \lceil 3 \rceil = 3; \quad \lceil -1, 8 \rceil = -1.$$

Alcune proprietà (1/2)

Dato un numero reale $a \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$a - 1 < \lfloor a \rfloor \leq a \leq \lceil a \rceil < a + 1$$

Segue subito dalle due definizioni: da $\lfloor a \rfloor \leq a < \lfloor a \rfloor + 1$ e da $\lceil a \rceil - 1 < a \leq \lceil a \rceil$.

- ▶ Vediamo ora come si comportano parte intera e parte intera superiore rispetto al cambio di segno e rispetto agli interi
- ▶ Sono le proprietà che useremo per studiare le funzioni parte intera

Cambio di segno e numeri interi

Osservazione 1

Per ogni numero reale $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$-\lfloor a \rfloor = \lceil -a \rceil \quad \text{e} \quad -\lceil a \rceil = \lfloor -a \rfloor$$

e inoltre

$$\lfloor a \rfloor = a \iff a \in \mathbb{Z} \iff \lceil a \rceil = a$$

Dimostrazione

Poniamo $n = \lfloor a \rfloor$, cioè $n \leq a < n + 1$. Moltiplicando per -1 :

$$n \leq a < n + 1 \implies (-n) - 1 < -a \leq -n$$

$$\implies \lceil -a \rceil = -n = -\lfloor a \rfloor$$

La seconda identità si ottiene applicando la prima al numero $-a$.

Se $\lfloor a \rfloor = a$ allora $a \in \mathbb{Z}$, perché $\lfloor a \rfloor$ è un intero; viceversa, se $a \in \mathbb{Z}$ allora $a \leq a < a + 1$, cioè $\lfloor a \rfloor = a$. Lo stesso vale per $\lceil a \rceil$. $\square$

Osservazione 2

Per ogni $a \in \mathbb{R}$ e ogni $n \in \mathbb{Z}$ si ha:

$$\lfloor a \rfloor = n \iff n \leq a < n + 1$$

$$\lfloor a \rfloor = n \iff a - 1 < n \leq a$$

$$\lceil a \rceil = n \iff n - 1 < a \leq n$$

$$\lceil a \rceil = n \iff a \leq n < a + 1$$

Osservazione 3

Per ogni $a \in \mathbb{R}$ e ogni $n \in \mathbb{Z}$ si ha inoltre:

$$a < n \iff \lfloor a \rfloor < n$$

$$n \leq a \iff n \leq \lfloor a \rfloor$$

$$a \leq n \iff \lfloor a \rfloor \leq n$$

$$n < a \iff n < \lceil a \rceil$$

e

$$\lfloor a + n \rfloor = \lfloor a \rfloor + n$$

e

$$\lceil a + n \rceil = \lceil a \rceil + n$$

Dimostrazione

Le prime quattro equivalenze sono le due definizioni e le loro riscritture.

Per $a < n \Leftrightarrow \lfloor a \rfloor < n$: se $a < n$ allora $\lfloor a \rfloor \leq a < n$; viceversa, se $\lfloor a \rfloor < n$, essendo interi $\lfloor a \rfloor \leq n - 1$ e quindi $a < \lfloor a \rfloor + 1 \leq n$.

Per $a \leq n \Leftrightarrow \lceil a \rceil \leq n$: se $a \leq n$, allora n sta in $\{k \in \mathbb{Z} : k \geq a\}$, di cui $\lceil a \rceil$ è il minimo; viceversa $a \leq \lceil a \rceil \leq n$.

Le due equivalenze di destra si ottengono negando i due membri delle precedenti. □

Somma di floor e ceil

Dato un numero intero $n \in \mathbb{Z}$, abbiamo

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = n$$

Dimostrazione

Distinguiamo i due casi.

Se $n = 2m$ è **pari**, con $m \in \mathbb{Z}$:

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \lfloor m \rfloor + \lceil m \rceil = m + m = 2m = n$$

Se $n = 2m + 1$ è **dispari**, con $m \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil &= \left\lfloor m + \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lceil m + \frac{1}{2} \right\rceil \\ &= m + (m + 1) = 2m + 1 = n \end{aligned}$$



Alcune proprietà (2/2)

Dati due numeri interi positivi $r, s \in \mathbb{Z}$, $r, s > 0$, abbiamo

$$\left\lceil \frac{r}{s} \right\rceil \leq \frac{r + (s - 1)}{s}$$

$$\left\lfloor \frac{r}{s} \right\rfloor \geq \frac{r - (s - 1)}{s}$$

Dato inoltre anche un numero reale non negativo $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 0$, abbiamo

$$\left\lceil \frac{\left\lfloor \frac{p}{r} \right\rfloor}{s} \right\rceil = \left\lceil \frac{p}{rs} \right\rceil$$

$$\left\lfloor \frac{\left\lceil \frac{p}{r} \right\rceil}{s} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{p}{rs} \right\rfloor$$

Definizione 4: Divisore

Un **divisore** di un intero $n \in \mathbb{Z}$, chiamato anche **fattore** di n , è un intero $m \in \mathbb{Z}$ che può essere moltiplicato per un qualche intero $q \in \mathbb{Z}$ per ottenere n , i.e., se $n = q \cdot m$.

- ▶ Se m è un divisore di n , n è un **multiplo** di m .
- ▶ Un intero n è **divisibile** per un altro intero m se m è un *divisore* di n .
- ▶ Per un intero $a \in \mathbb{Z}$ e un intero positivo $n \in \mathbb{Z}, n > 0$, il valore $a \bmod n$ è il resto della divisione $\frac{a}{n}$.

Definizione 5: di modulo (remainder)

Dato $a \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}, n > 0$,

$$a \bmod n = a - n \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor$$

► Segue che $0 \leq a \bmod n < n$

Equivalenza modulo n

Se $(a \bmod n) = (b \bmod n)$, scriviamo

$$a \equiv b \pmod{n}$$

e diciamo che a è **equivalente** a b , modulo n .

- ▶ Equivalentemente, $a \equiv b \pmod{n}$ se a e b hanno lo stesso resto se divisi per n .
- ▶ Equivalentemente, $a \equiv b \pmod{n}$ se e solo se n è un divisore di $|b - a|$.

Esempio

Per esempio, 23 e 13 sono equivalenti modulo 5 e scriviamo

$$23 \equiv 13 \pmod{5}$$

Riepilogo

- ▶ **Parte intera** $\lfloor a \rfloor$: l'intero n con $n \leq a < n + 1$ (attenzione ai negativi)
- ▶ **Mantissa** $\{a\} = a - \lfloor a \rfloor \in [0, 1)$
- ▶ **Parte intera superiore** $\lceil a \rceil$: l'intero n con $n - 1 < a \leq n$
- ▶ $a - 1 < \lfloor a \rfloor \leq a \leq \lceil a \rceil < a + 1$
- ▶ $-\lfloor a \rfloor = \lceil -a \rceil$ e $\lfloor a \rfloor = a \Leftrightarrow a \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \lceil a \rceil = a$
- ▶ $\lfloor a + n \rfloor = \lfloor a \rfloor + n$ e $\lceil a + n \rceil = \lceil a \rceil + n$ per $n \in \mathbb{Z}$
- ▶ $\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil = n$ per $n \in \mathbb{Z}$
- ▶ $a \bmod n = a - n\lfloor a/n \rfloor \in [0, n)$
- ▶ $a \equiv b \pmod{n}$ se e solo se n divide $|b - a|$

Riepilogo

- ▶ Grazie alla proprietà R_4 in $\mathbb{R}$ esistono le radici n -esime aritmetiche dei numeri positivi
- ▶ Le potenze si estendono a esponenti razionali e reali (base positiva), con proprietà algebriche e di monotonia
- ▶ Il logaritmo è l'operazione inversa della potenza e trasforma prodotti in somme
- ▶ I numeri irrazionali si specificano tramite algoritmi o in modo non costruttivo; nella pratica si approssimano
- ▶ Parte intera, mantissa, ceil e modulo sono gli strumenti dell'aritmetica modulare

