

Campi ordinati, estremo superiore/inferiore e assioma di continuità

Indice

Proprietà R_1 e R_2

Grandezze commensurabili

Rappresentazione geometrica di $\mathbb{Q}$

Relazioni di ordine totale

Proprietà R_3

Campi ordinati

Insiemi limitati, massimi e minimi

Maggioranti/minoranti e estremi superiori/inferiori

Definizione assiomatica dei numeri reali

Rappresentazione geometrica di $\mathbb{R}$

Proprietà R_1 e R_2

Introduzione: Proprietà R_1 e R_2

- ▶ Inizieremo ora a studiare più da vicino la **struttura degli insiemi numerici** che abbiamo introdotto in precedenza, ed in particolare: l'insieme $\mathbb{Q}$ dei **numeri razionali** e l'insieme $\mathbb{R}$ dei **numeri reali**.
- ▶ In questa sezione vediamo le proprietà delle operazioni di **somma** (R_1) e **prodotto** (R_2)
- ▶ Da esse discende la possibilità di eseguire le quattro operazioni fondamentali

Proprietà R_1 : la somma

Indichiamo con a, b, c tre generici numeri **razionali** o **reali**.

$R_1 \rightarrow$ È definita in $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ un'operazione (detta **addizione** o **somma**) che ha le seguenti quattro proprietà:

- 1 $\forall a, b, \quad a + b = b + a$ (**proprietà commutativa**)
- 2 $\forall a, b, c, \quad (a + b) + c = a + (b + c)$ (**proprietà associativa**)
- 3 esiste un elemento **neutro della somma**, indicato con 0 , tale che:

$$\forall a, \quad a + 0 = a$$

- 4 per ogni a esiste un elemento **inverso** di a **rispetto alla somma**, detto **opposto** di a e indicato con $-a$, tale che:

$$a + (-a) = 0$$

Proprietà R_2 : il prodotto

$R_2 \rightarrow$ È definita in $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ un'operazione (detta **moltiplicazione** o **prodotto**) che ha le seguenti quattro proprietà:

- 1 $\forall a, b, \quad a \cdot b = b \cdot a$ (**proprietà commutativa**)
- 2 $\forall a, b, c, \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (**proprietà associativa**)
- 3 esiste un elemento **neutro del prodotto**, indicato con 1, tale che:

$$\forall a, \quad a \cdot 1 = a$$

- 4 per ogni $a \neq 0$ esiste un elemento **inverso** di a **rispetto al prodotto**, detto **reciproco** di a e indicato con a^{-1} , tale che:

$$a \cdot a^{-1} = 1$$

Proprietà distributiva e quattro operazioni

- ▶ Le operazioni di somma e prodotto sono legate dalla seguente proprietà:

$$\forall a, b, c, \quad (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad (\text{proprietà distributiva})$$

- ▶ Dalle proprietà R_1 e R_2 discende la **possibilità di eseguire senza restrizioni le quattro operazioni fondamentali**:
 1. **addizione** e **moltiplicazione** (sopra definite)
 2. **sottrazione**, ponendo:

$$a - b = a + (-b)$$

3. **divisione**, ponendo:

$$a/b = a \cdot b^{-1} \text{ purché sia } b \neq 0$$

Riepilogo

- ▶ R_1 : la somma è commutativa, associativa, ha elemento neutro 0 e ogni a ha l'opposto $-a$
- ▶ R_2 : il prodotto è commutativo, associativo, ha elemento neutro 1 e ogni $a \neq 0$ ha il reciproco a^{-1}
- ▶ Proprietà distributiva: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
- ▶ In $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ si eseguono senza restrizioni somma, prodotto, sottrazione e divisione (per $b \neq 0$)

Grandezze commensurabili

Introduzione: Grandezze commensurabili

- ▶ In questa sezione introduciamo le **grandezze** geometriche e il loro confronto
- ▶ Definiamo grandezze **omogenee**, **commensurabili** e **incommensurabili**
- ▶ Le grandezze incommensurabili mostreranno che i numeri razionali non bastano a misurare tutto

Grandezze omogenee

In matematica con la parola **grandezza** si intende una **proprietà** di una **figura geometrica** che può essere **misurata**. Sono esempi di grandezze: la lunghezza di un segmento, la misura di un angolo, l'area di una figura piana o il volume di un solido.

Definizione 1: di grandezze omogenee

*Due grandezze sono **omogenee** se hanno la stessa dimensione, cioè se si possono esprimere mediante la stessa unità di misura.*

- ▶ La lunghezza di un segmento e l'altezza di un solido sono due grandezze omogenee infatti entrambe si possono esprimere con una stessa unità di misura della lunghezza.
- ▶ L'area di un quadrato e il volume di un cono non sono grandezze omogenee, infatti l'area si esprime in metri quadrati o in altre misure di superficie che però non possono essere usate per esprimere il volume.

Definizione 2: di grandezze commensurabili e incommensurabili

*Si dicono **commensurabili** due grandezze omogenee a e b il cui rapporto è un numero razionale, i.e., se $a/b \in \mathbb{Q}$. Si dicono invece **incommensurabili** se il loro rapporto non è un numero razionale, i.e., se $a/b \notin \mathbb{Q}$.*

Esempio

Grandezze commensurabili. Il volume di una sfera e il volume del cilindro circoscritto alla sfera sono commensurabili. In formule, il volume della sfera V_s in funzione del suo raggio r si ottiene con la formula:

$$V_s = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Il cilindro ad essa circoscritto ha il raggio del cerchio di base congruente al raggio r della sfera e l'altezza h congruente al doppio del raggio. Il volume V_c di questo cilindro si ottiene quindi con la formula:

$$V_c = \pi r^2 h = \pi r^2 2r = 2\pi r^3$$

Facendo il rapporto otteniamo:

$$\frac{V_s}{V_c} = \frac{\frac{4}{3} \pi r^3}{2 \pi r^3} = \frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$$

Esempio

Grandezze incommensurabili. La lunghezza della circonferenza e la lunghezza del suo diametro sono incommensurabili. In formule, denotiamo con d il diametro della circonferenza e con c la lunghezza della circonferenza, abbiamo:

$$c = \pi d$$

Ora facendo il rapporto fra la lunghezza della circonferenza e il suo diametro otteniamo:

$$\frac{c}{d} = \frac{\pi d}{d} = \pi \notin \mathbb{Q}$$

Una dimostrazione che $\pi \notin \mathbb{Q}$ verrà data in seguito.

Riepilogo

- ▶ Una **grandezza** è una proprietà misurabile di una figura geometrica
- ▶ Grandezze **omogenee**: si esprimono con la stessa unità di misura
- ▶ **Commensurabili**: rapporto razionale (sfera e cilindro circoscritto: $\frac{2}{3}$)
- ▶ **Incommensurabili**: rapporto non razionale (circonferenza e diametro: π)

Rappresentazione geometrica di $\mathbb{Q}$

Introduzione: Rappresentazione geometrica di $\mathbb{Q}$

- ▶ In questa sezione rappresentiamo i numeri razionali come punti di una retta
- ▶ Fissata un'unità di misura, i razionali corrispondono ai punti che individuano segmenti commensurabili con essa

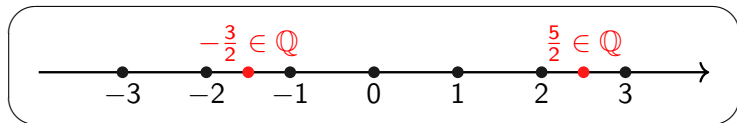
La retta euclidea

Una rappresentazione di tipo geometrico di $\mathbb{Q}$ si può ottenere associando a ogni numero razionale un punto della **retta euclidea** (immaginabile come una linea nel piano di lunghezza infinita)

- ▶ Ad un punto della retta euclidea, scelto arbitrariamente, si associa 0 e a un altro, distinto dal primo, si associa 1, individuando così il segmento orientato 01 che costituisce l'**unità di misura**
- ▶ A questo punto si ha una **corrispondenza biunivoca** tra i numeri razionali e quei punti P della retta che sono estremi dei segmenti orientati $0P$ **commensurabili** con 01 . Infatti, se al punto P è associato il numero razionale p (la sua **ascissa**), il segmento $0P$ misura p volte il segmento unitario 01 , e quindi il rapporto fra le due lunghezze è:

$$\frac{0P}{01} = \frac{p}{1} = p \in \mathbb{Q}$$

La retta euclidea



Relazioni di ordine totale

Introduzione: Relazioni di ordine totale

- ▶ In questa sezione richiamiamo che “ $\leq$ ” è una relazione d'ordine totale su $\mathbb{Q}$ e su $\mathbb{R}$
- ▶ Questo ci permette di confrontare due numeri qualsiasi, base per definire massimi, minimi ed estremi

$\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ sono totalmente ordinati

Osservazione 1

Gli insiemi dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ e dei numeri reali $\mathbb{R}$ con la relazione “minore o uguale di” (“ $\leq$ ”) sono insiemi totalmente ordinati.

- Le relazioni “minore o uguale di” (“ $\leq$ ”) per l'insieme dei numeri razionali o reali:

$$R_{\leq} = \left\{ (a, b) : a, b \in \mathbb{Q} \quad \text{e} \quad a \leq b \right\}$$

$$R_{\leq} = \left\{ (a, b) : a, b \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad a \leq b \right\}$$

sono **relazioni d'ordine parziale**.

Ordine parziale e totale

Ovvero verificano le seguenti proprietà:

$$\forall a, \quad a \leq a \quad (\text{proprietà riflessiva})$$

$$\forall a, b, \quad a \leq b \text{ e } b \leq a \Rightarrow a = b \quad (\text{proprietà antisimmetrica})$$

$$\forall a, b, c, \quad a \leq b \text{ e } b \leq c \Rightarrow a \leq c \quad (\text{proprietà transitiva})$$

Inoltre le relazioni “minore o uguale di” (“ $\leq$ ”) per $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ sono **relazioni totali** in quanto:

$$\forall a, b, \quad a \leq b \quad \text{o} \quad b \leq a$$

- Di conseguenza la coppia costituita dall'insieme $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$ e dalla corrispettiva relazione $R_{\leq}$ diventa un insieme totalmente ordinato.

La proprietà di tricotomia

Osservazione 2: proprietà di tricotomia

*Per ogni coppia di numeri a , b (razionali o reali) vale **una e una sola** delle tre relazioni:*

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b$$

- Non è una proprietà nuova: è una conseguenza del fatto che “ $\leq$ ” è una relazione d'ordine **totale**, e per questo non la contiamo fra gli assiomi R_1 , R_2 , R_3 ed R_4

Dimostrazione

Ricordiamo che $a < b$ significa $a \leq b$ e $a \neq b$.

Almeno una delle tre relazioni vale. Poiché la relazione è totale, abbiamo $a \leq b$ oppure $b \leq a$:

- ▶ se $a \leq b$ e $a \neq b$, allora $a < b$;
- ▶ se $b \leq a$ e $a \neq b$, allora $a > b$;
- ▶ se $a = b$ vale la seconda relazione.

Al più una delle tre relazioni vale. Le relazioni $a < b$ e $a = b$ non possono valere insieme, perché la prima richiede $a \neq b$; lo stesso per $a > b$ e $a = b$. Infine, se valessero insieme $a < b$ e $a > b$, avremmo $a \leq b$ e $b \leq a$, quindi $a = b$ per la proprietà antisimmetrica, contro $a \neq b$. □

Proprietà R_3

Introduzione: Proprietà R_3

- ▶ In questa sezione mettiamo in evidenza le proprietà dell'ordinamento dei numeri razionali o reali
- ▶ La proprietà R_3 lega l'ordine alle operazioni di somma e prodotto
- ▶ Da R_1 , R_2 , R_3 derivano tutte le regole del calcolo algebrico

Proprietà R_3

$R_3 \rightarrow$ È definita in $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ la relazione d'ordine totale “minore o uguale di” (“ $\leq$ ”) compatibile con la struttura algebrica¹, cioè:

1. $\forall a, b, c, \quad a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
2. $\forall a, b \text{ e } \forall c > 0, \quad a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$

- Osserviamo che tutte le regole del calcolo algebrico derivano dalle proprietà: R_1, R_2, R_3 .

¹una struttura algebrica è un insieme, chiamato insieme sostegno (della struttura), munito di una o più operazioni

Esempio

Ad esempio tutte le usuali procedure con cui si risolvono le disequazioni sono conseguenza degli assiomi e delle proprietà algebriche della somma e del prodotto, espresse da R_1 e R_2 , e **della compatibilità della relazione d'ordine con queste operazioni**, espressa da R_3 .

È infatti R_3 che permette di sommare lo stesso numero ai due membri di una disequazione e di moltiplicarli per uno stesso numero positivo senza cambiare il verso.

Campi ordinati

Introduzione: Campi ordinati

- ▶ In questa sezione definiamo i **campi** e i **campi ordinati**
- ▶ Vedremo che $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ sono entrambi campi ordinati
- ▶ Ma $\mathbb{Q}$ è inadeguato a esprimere le lunghezze: sulla retta restano dei “posti vuoti”

Definizione 3: di campo (ordinato)

*Un **campo** è un insieme in cui sono definite due operazioni (somma e prodotto) che soddisfano le proprietà R_1 ed R_2 e la **proprietà distributiva**.*

*Un **campo ordinato** è un campo in cui è definita anche una relazione d'ordine totale che soddisfa la proprietà R_3 .*

- La proprietà distributiva fa parte della definizione di campo: è l'unica proprietà che lega fra loro la somma e il prodotto.

$\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ sono campi ordinati

- ▶ Tutto ciò che abbiamo detto fin qui vale sia per l'insieme dei numeri razionali che per l'insieme dei numeri reali.

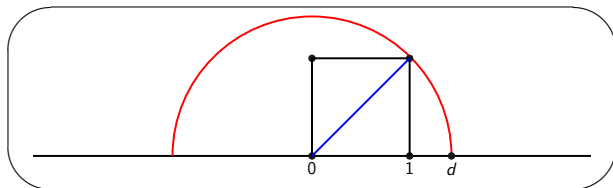
Osservazione 3

Gli insiemi dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ e dei numeri reali $\mathbb{R}$ sono campi ordinati.

- ▶ Da questo punto di vista, quindi, $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$ appaiono dotati di proprietà simili. Evidenzieremo nel seguito qual è la **proprietà che distingue sostanzialmente $\mathbb{R}$ da $\mathbb{Q}$** e che rende $\mathbb{R}$ l'ambiente giusto per sviluppare l'analisi matematica.
- ▶ Iniziamo osservando che l'**insieme dei numeri razionali è inadeguato ad esprimere le lunghezze dei segmenti** (ma anche le aree, i volumi, i tempi, le velocità ecc.)

La diagonale del quadrato

Come abbiamo visto esistono grandezze che non sono **commensurabili** tra loro. L'esempio classico è dato dalla diagonale e dal lato di un quadrato: se il lato misura 1, l'ascissa d che misura la diagonale non è un numero razionale.



I “posti vuoti” sulla retta

Infatti, per il Teorema di Pitagora abbiamo:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

ma, come abbiamo visto, non esiste un numero razionale il cui quadrato è 2.

Dunque il punto d sulla retta non è il rappresentante di alcun numero razionale. Ciò significa che, dopo aver “occupato” i punti della retta con i numeri razionali, su di essa rimangono ancora dei **posti vuoti**.

Riepilogo

- ▶ “ $\leq$ ” è una relazione d'ordine totale su $\mathbb{Q}$ e su $\mathbb{R}$
- ▶ R_3 : l'ordine è compatibile con somma e prodotto (per $c > 0$)
- ▶ **Campo**: R_1, R_2 ; **campo ordinato**: R_1, R_2, R_3
- ▶ $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ sono campi ordinati
- ▶ La diagonale del quadrato di lato 1 non ha misura razionale: in $\mathbb{Q}$ la retta ha dei “posti vuoti”

Insiemi limitati, massimi e minimi

Introduzione: Insiemi limitati, massimi e minimi

- ▶ In questa sezione definiamo gli insiemi **limitati** (superiormente, inferiormente)
- ▶ Definiamo il **massimo** e il **minimo** di un insieme
- ▶ Con molti esempi vedremo che un insieme limitato può non avere massimo o minimo

Definizione 4: di insieme limitato

*Sia E un insieme contenuto in $\mathbb{Q}$ o in $\mathbb{R}$. L'insieme E si dice **limitato** se esistono due numeri m e M , tali che:*

$$\forall x \in E, \quad m \leq x \leq M$$

- ▶ E è **limitato inferiormente** se esiste un numero m tale che:
 $\forall x \in E, \quad m \leq x$
- ▶ E è **limitato superiormente** se esiste un numero M tale che:
 $\forall x \in E, \quad x \leq M$
- ▶ Non fa differenza imporre che m e/o M appartengano a $\mathbb{Q}$ o a $\mathbb{R}$ in quanto la condizione è soltanto di esistenza di tali numeri.

Perché non fa differenza

Non è una conseguenza immediata della definizione, perché $\mathbb{Q}$ è un sottoinsieme proprio di $\mathbb{R}$: lo si ottiene dalla **proprietà di Archimede** (richiamata nel capitolo *Insieme* e dimostrata più avanti in questo capitolo).

- ▶ Se $M \in \mathbb{R}$ verifica $x \leq M$ per ogni $x \in E$, esiste un numero naturale $n > M$, e quindi $x \leq M < n$ per ogni $x \in E$, con $n \in \mathbb{Q}$
- ▶ Se $m \in \mathbb{R}$ verifica $m \leq x$ per ogni $x \in E$, esiste un numero naturale $n > -m$, cioè $-n < m$, e quindi $-n < x$ per ogni $x \in E$, con $-n \in \mathbb{Q}$
- ▶ Viceversa ogni numero razionale è anche reale: le due richieste individuano gli stessi insiemi limitati

Definizione 5: di massimo e minimo di un insieme

Un elemento $x_M \in E$ si chiama **massimo** di E se:

$$\forall x \in E, \quad x \leq x_M$$

Un elemento $x_m \in E$ si chiama **minimo** di E se:

$$\forall x \in E, \quad x_m \leq x$$

- Si noti che il massimo e il minimo, per definizione, **appartengono** all'insieme E

Unicità del massimo e del minimo

Osservazione 4

*Se un insieme E possiede massimo, questo è **unico**; allo stesso modo, se possiede minimo, questo è unico. Si scrive allora $\max E$ e $\min E$.*

Dimostrazione

Siano x_M e x'_M due massimi di E :

- ▶ poiché x'_M appartiene a E e x_M è un massimo di E , abbiamo $x'_M \leq x_M$;
- ▶ poiché x_M appartiene a E e x'_M è un massimo di E , abbiamo $x_M \leq x'_M$.

Dalla proprietà antisimmetrica della relazione d'ordine segue:

$$x'_M \leq x_M \quad \text{e} \quad x_M \leq x'_M \quad \implies \quad x_M = x'_M$$

La dimostrazione per il minimo è identica: se x_m e x'_m sono due minimi, allora $x_m \leq x'_m$ e $x'_m \leq x_m$, e quindi $x_m = x'_m$. □

Massimo, minimo e limitatezza (1/2)

L'esistenza del massimo e del minimo per un insieme implica che l'insieme è limitato, ovvero:

$$\text{esistenza di massimo e minimo} \Rightarrow \text{insieme limitato} \quad (1)$$

ma il viceversa non è vero (daremo più avanti un controesempio):

$$\text{insieme limitato} \not\Rightarrow \text{esistenza di massimo e minimo} \quad (2)$$

Quindi il fatto che un insieme sia limitato è condizione necessaria ma non sufficiente al fatto che l'insieme ammetta massimo e minimo. Inoltre l'esistenza di massimo e minimo è condizione sufficiente ma non necessaria al fatto che un insieme sia limitato.

Massimo, minimo e limitatezza (2/2)

Dalla **contronominale** di (1) abbiamo:

insieme non limitato $\Rightarrow$ non esiste il massimo **oppure** non esiste il m

ovvero se un insieme non è limitato non ha massimo o non ha minimo: può però averne uno dei due, e infatti $\mathbb{N}$ non è limitato e tuttavia ha minimo 0.

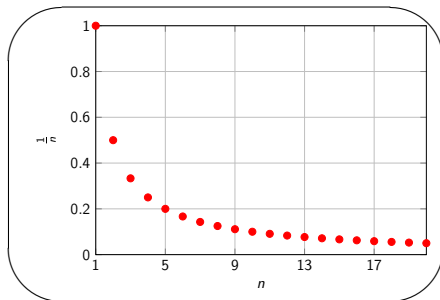
Esempio

Massimi e minimi.

Esempio	insieme E	minimo	massimo
I)	$\mathbb{N}$	0	non esiste
II)	numeri interi pari	non esiste	non esiste

Esempio

Esempio	insieme E	minimo	massimo
III)	$\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_{>0} \right\}$	non esiste	1

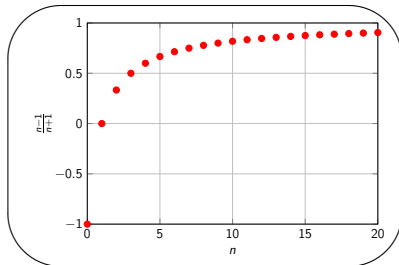


Esempio

Esempio	insieme E	minimo	massimo
IV)	$\left\{ \frac{n-1}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$	-1	non esiste

Abbiamo:

$$\frac{n-1}{n+1} = \frac{n+1-1-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}$$



Insiemi limitati senza massimo o minimo

Si osservi che talvolta, pur essendo l'insieme limitato, esso può non possedere massimo o minimo.

Esempio

Esempio	insieme E	minimo	massimo
V)	$\{x \in \mathbb{R} : 27 \leq x^3\}$	3	non esiste

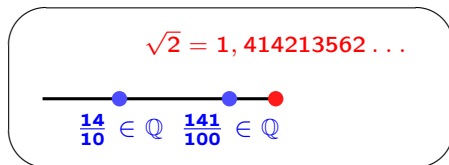
Abbiamo:

$$27 \leq x^3 \iff \sqrt[3]{27} = 3 \leq x \quad \text{e} \quad 3 \in E$$

Esempio

Esempio	insieme E	minimo	massimo
VI)	$\{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0, x < \sqrt{2}\}$	0	non esiste

Il valore $\sqrt{2}$ è irrazionale quindi troncando otteniamo numeri razionali che si avvicinano sempre di più a $\sqrt{2}$ nessuno con la proprietà di essere massimo.

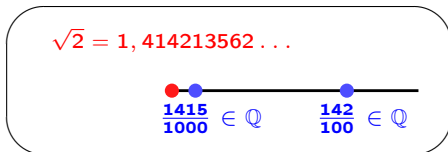


È un esempio di insieme limitato ma che non ammette massimo.

Esempio

Esempio	insieme E	minimo	massimo
VII)	$\{x \in \mathbb{Q} : x > \sqrt{2}, x \leq 4\}$	non esiste	4

Il valore $\sqrt{2}$ è irrazionale quindi troncando e maggiorando otteniamo dei numeri razionali che si avvicinano sempre di più a $\sqrt{2}$ nessuno con la proprietà di essere minimo.



È un esempio di insieme limitato ma che non ammette minimo.

Esempio

Massimi e minimi di intervalli.

Esempio	insieme E	minimo	massimo
VIII)	$[-2, 1]$	-2	1
IX)	$(-\infty, 3)$	non esiste	non esiste

- ▶ Nell'esempio VIII) l'intervallo contiene entrambi i suoi estremi:
 $-2 \in [-2, 1]$ ed è minore o uguale a ogni $x \in [-2, 1]$;
 $1 \in [-2, 1]$ ed è maggiore o uguale a ogni $x \in [-2, 1]$
- ▶ Nell'esempio IX) l'intervallo non è limitato inferiormente, quindi non ha minimo

Esempio

Perché $(-\infty, 3)$ non ha massimo. Preso un qualunque $x \in (-\infty, 3)$, il numero

$$y = \frac{x+3}{2} \quad \text{verifica} \quad x < y < 3$$

- ▶ infatti $y - x = \frac{3-x}{2} > 0$ e $y < 3 \Leftrightarrow x < 3$
- ▶ dunque $y \in (-\infty, 3)$ ed è strettamente maggiore di x : nessun elemento dell'insieme può essere il massimo

Esempio

Massimo e minimo di un insieme definito da una disequazione.

Esempio	insieme E	minimo	massimo
X)	$\{x \in \mathbb{R} : -5 \leq 3x < 4\}$	$-\frac{5}{3}$	non esiste

Convien prima **risolvere la disequazione**: dividendo per $3 > 0$, e usando la proprietà R_3 che conserva il verso,

$$-5 \leq 3x < 4 \iff -\frac{5}{3} \leq x < \frac{4}{3} \quad \text{cio} \quad E = \left[-\frac{5}{3}, \frac{4}{3} \right)$$

- ▶ $-\frac{5}{3} \in E$ ed è minore o uguale a ogni elemento di E : è il minimo
- ▶ Il massimo non esiste: come nell'esempio IX), $y = \frac{1}{2}(x + \frac{4}{3})$ verifica $x < y < \frac{4}{3}$

Riepilogo

- ▶ **E limitato**: esistono m, M con $m \leq x \leq M$ per ogni $x \in E$
- ▶ **Massimo (minimo)**: elemento di E maggiore (minore) o uguale a tutti gli altri
- ▶ Massimo e minimo $\Rightarrow$ limitato, ma non viceversa
- ▶ Esempi: $\{\frac{1}{n}\}$ non ha minimo; $\{\frac{n-1}{n+1}\}$ non ha massimo
- ▶ In $\mathbb{Q}$: $\{x \geq 0, x < \sqrt{2}\}$ è limitato ma senza massimo
- ▶ Massimo e minimo, quando esistono, sono **unici**
- ▶ $[-2, 1]$ ha massimo e minimo; $(-\infty, 3)$ e $[-\frac{5}{3}, \frac{4}{3})$ non hanno massimo

Maggioranti/minoranti e estremi superiori/inferiori

Introduzione: Maggioranti/minoranti e estremi

- ▶ In questa sezione definiamo **maggioranti** e **minoranti** di un insieme
- ▶ L'**estremo superiore** (inferiore) generalizza il massimo (minimo)
- ▶ Vedremo che in $\mathbb{Q}$ l'estremo superiore può non esistere, mentre in $\mathbb{R}$ esiste

Definizione 6: di maggioranti di un insieme

*Sia E un insieme contenuto in $\mathbb{Q}$ o in $\mathbb{R}$, un numero k appartenente a $\mathbb{Q}$ o a $\mathbb{R}$ rispettivamente, si dice un **maggiorante** di E se:*

$$\forall x \in E, \quad x \leq k$$

Definizione 7: di minorante di un insieme

*Sia E un insieme contenuto in $\mathbb{Q}$ o in $\mathbb{R}$, un numero k appartenente a $\mathbb{Q}$ o a $\mathbb{R}$ rispettivamente, si dice un **minorante** di E se:*

$$\forall x \in E, \quad k \leq x$$

Maggioranti e minoranti: due osservazioni

Osserviamo che un insieme superiormente (inferiormente) limitato ha molti maggioranti (minoranti). Inoltre i maggioranti (minoranti) non appartengono necessariamente all'insieme stesso.

Osservazione 5

*Se k è un maggiorante di E , allora ogni numero $h \geq k$ è ancora un maggiorante di E ; se k è un minorante di E , allora ogni numero $h \leq k$ è ancora un minorante di E . Quindi l'insieme dei maggioranti (minoranti) di E , se non è vuoto, è una **semiretta**.*

Dimostrazione

Sia k un maggiorante di E e sia $h \geq k$. Per ogni $x \in E$ abbiamo $x \leq k$ per definizione di maggiorante, e quindi, per la proprietà transitiva,

$$x \leq k \leq h \quad \implies \quad x \leq h$$

cioè h è un maggiorante di E .

L'insieme dei maggioranti contiene allora, insieme a ogni suo elemento k , tutti i numeri maggiori di k : è dunque una semiretta illimitata superiormente.

La dimostrazione per i minoranti è analoga: se k è un minorante di E e $h \leq k$, per ogni $x \in E$ si ha $h \leq k \leq x$ e quindi $h \leq x$. □

Maggioranti che appartengono all'insieme

Osservazione 6

*Un maggiorante di E che **appartiene** a E è il massimo di E ; un minorante di E che appartiene a E è il minimo di E .*

Dimostrazione. Sia k un maggiorante di E con $k \in E$. Per definizione di maggiorante vale $x \leq k$ per ogni $x \in E$: queste sono esattamente le due condizioni che definiscono il massimo di E , e quindi $k = \max E$. Allo stesso modo, se k è un minorante di E e $k \in E$, allora $k = \min E$. □

Definizione 8: di estremo superiore

L'estremo superiore di E (indicato con $\sup E$) è il minimo dei maggioranti di E .

Definizione 9: di estremo inferiore

L'estremo inferiore di E (indicato con $\inf E$) è il massimo dei minoranti di E .

Estremi, massimi e minimi

Osserviamo che l'estremo superiore (inferiore) può non esistere (insiemi non limitati).

Osserviamo inoltre che se l'insieme possiede massimo (minimo), questo coincide con l'estremo superiore (inferiore).

La convenzione $\sup E = +\infty$

Per gli insiemi non limitati si adotta la seguente **convenzione**: se E non è limitato superiormente si scrive

$$\sup E = +\infty$$

e se E non è limitato inferiormente si scrive

$$\inf E = -\infty$$

- I simboli $+\infty$ e $-\infty$ **non sono numeri**: la scrittura è solo un modo compatto per dire che E non ha maggioranti (minoranti)

Esempio (1/2)

Estremi superiori e inferiori.

Esempio	insieme E	$\inf E$	$\sup E$	minimo	massimo
I)	$\{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0, x < \sqrt{2}\}$	0	non esiste in $\mathbb{Q}$	0	non esiste

Qui si cercano i maggioranti **dentro** $\mathbb{Q}$. Abbiamo:

$$\sqrt{2} \notin E \quad \text{e} \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

quindi il massimo non esiste; e non esiste nemmeno il sup **in** $\mathbb{Q}$, perché i maggioranti razionali di E sono i razionali maggiori di $\sqrt{2}$ e fra questi non ce n'è uno minimo.

Esempio (2/2)

Esempio	insieme E	$\inf E$	$\sup E$	minimo	massimo
II)	$\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0, x < \sqrt{2}\}$	0	$\sqrt{2}$	0	non esiste

Abbiamo:

$$\sqrt{2} \notin E \quad \text{e} \quad \sqrt{2} \in \mathbb{R}$$

ovvero il massimo non esiste ma $\sqrt{2}$ è il minimo dei maggioranti e quindi è il sup.

Estremi superiori e inferiori di intervalli.

Esempio	insieme E	$\inf E$	$\sup E$	minimo	massimo
VIII)	$[-2, 1]$	-2	1	-2	1
IX)	$(-\infty, 3)$	$-\infty$	3	non esiste	non esiste
X)	$\{x \in \mathbb{R} : -5 \leq 3x < 4\}$	$-\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{3}$	non esiste

- ▶ Negli esempi VIII) e X) il minimo esiste e quindi coincide con l'estremo inferiore; nell'esempio VIII) anche il massimo esiste e coincide con l'estremo superiore
- ▶ Nell'esempio IX) l'insieme non è limitato inferiormente, quindi $\inf E = -\infty$ per la convenzione appena introdotta

Esempio

Perché $\sup(-\infty, 3) = 3$.

- ▶ Il numero 3 è un maggiorante, perché $x < 3$ per ogni $x \in E$
- ▶ Nessun numero $k < 3$ è un maggiorante, perché $y = \frac{k+3}{2}$ verifica $k < y < 3$ e quindi appartiene a E
- ▶ Dunque 3 è il minimo dei maggioranti, cioè $\sup E = 3$, e non è un massimo perché $3 \notin E$

Con lo stesso ragionamento, per $E = \left[-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$ si ottiene $\sup E = \frac{4}{3} \notin E$.

Esempio

Estremi di $E = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_{>0} \right\}$ (l'esempio III): si ha $\inf E = 0$ e $\sup E = \max E = 1$.

- ▶ 0 è un minorante, perché $\frac{1}{n} > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}_{>0}$
- ▶ nessun numero $k > 0$ è un minorante: per la **proprietà di Archimede** esiste $n \in \mathbb{N}_{>0}$ con $n > \frac{1}{k}$, e quindi $\frac{1}{n} < k$
- ▶ dunque 0 è il massimo dei minoranti, ma non è il minimo perché $0 \notin E$

Riepilogo

- ▶ **Maggiorante** (minorante): k con $x \leq k$ ($k \leq x$) per ogni $x \in E$
- ▶ $\sup E$: minimo dei maggioranti; $\inf E$: massimo dei minoranti
- ▶ Se esiste il massimo (minimo), coincide con $\sup$ ($\inf$)
- ▶ $\{x \geq 0, x < \sqrt{2}\}$: in $\mathbb{Q}$ non ha $\sup$, in $\mathbb{R}$ ha $\sup = \sqrt{2}$
- ▶ Un maggiorante che appartiene a E è il massimo; l'insieme dei maggioranti è una semiretta
- ▶ Convenzione: $\sup E = +\infty$ ($\inf E = -\infty$) se E non è limitato superiormente (inferiormente)

Definizione assiomatica dei numeri reali

Introduzione: Definizione assiomatica dei numeri reali

- ▶ In questa sezione introduciamo la **proprietà dell'estremo superiore** (R_4)
- ▶ È la proprietà che distingue $\mathbb{R}$ da $\mathbb{Q}$
- ▶ Definiremo $\mathbb{R}$ in modo assiomatico e vedremo la forma equivalente con le **sezioni** (assioma di Dedekind)

Proprietà dell'estremo superiore

Si dice che un insieme numerico X totalmente ordinato possiede la **proprietà dell'estremo superiore**, se:

$R_4 \rightarrow$ Ogni insieme $E \subset X$ non vuoto e limitato superiormente possiede estremo superiore in X

- ▶ Si prova facilmente che, se vale questa proprietà, allora è anche vero che ogni sottoinsieme di X non vuoto e inferiormente limitato ammette estremo inferiore.
- ▶ Non si richiede che X stesso abbia estremo superiore (ad esempio, nel caso $X = \mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$ questo è certamente falso!), ma che ogni sottoinsieme non vuoto superiormente limitato di X ne sia provvisto.

$\mathbb{Q}$ e la proprietà dell'estremo superiore

L'esempio VI mostra che certamente $\mathbb{Q}$ non ha la proprietà dell'estremo superiore. Invece, $\mathbb{R}$ ha questa proprietà.²

- Nella **definizione assiomatica** di $\mathbb{R}$, questa proprietà costituisce parte della definizione stessa di $\mathbb{R}$

Definizione 10: (assiomatica) dei numeri reali

Chiamiamo $\mathbb{R}$ un insieme che soddisfa le proprietà R_1 , R_2 (con la proprietà distributiva), R_3 ed R_4 , ossia un campo ordinato che ha la proprietà dell'estremo superiore

²Non presenteremo però una dimostrazione formale.

La proprietà di Archimede

Proposizione 1: proprietà di Archimede

Per ogni numero reale x esiste un numero naturale n tale che:

$$n > x$$

- ▶ È la proprietà che abbiamo richiamato nel capitolo *Insiemi* e usato poco sopra
- ▶ **Non è un assioma in più:** segue dalla proprietà R_4

Dimostrazione

Supponiamo per assurdo che esista un numero reale x tale che $n \leq x$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora $\mathbb{N}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente (da x), e quindi per la proprietà R_4 possiede estremo superiore in $\mathbb{R}$:

$$s = \sup \mathbb{N}$$

Poiché s è il **minimo** dei maggioranti di $\mathbb{N}$, il numero $s - 1$, più piccolo di s , non è un maggiorante di $\mathbb{N}$: esiste quindi $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$n > s - 1 \quad \implies \quad n + 1 > s$$

Ma $n + 1$ è ancora un numero naturale, e questo contraddice il fatto che s è un maggiorante di $\mathbb{N}$. □

Una forma equivalente

Per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}_{>0}$ tale che $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

- ▶ Basta scegliere $n > \frac{1}{\varepsilon}$, e allora $\frac{1}{n} < \varepsilon$
- ▶ Di conseguenza l'unico numero non negativo minore o uguale a $\frac{1}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}_{>0}$ è lo zero

Assioma di Dedekind

- ▶ La proprietà dell'estremo superiore prende anche il nome di **assioma di Dedekind**, o **assioma di continuità**, o **assioma di completezza** e si può enunciare anche nella seguente forma equivalente.

Sia $\{A, B\}$ una partizione di $\mathbb{R}$ (cioè A e B sono insiemi non vuoti e disgiunti la cui unione è $\mathbb{R}$); la partizione si chiama **sezione** se:

$$\forall a \in A \text{ e } \forall b \in B \text{ risulta } a < b.$$

Elemento separatore

Allora si dimostra che:

$R'_4 \rightarrow$ Per ogni sezione $\{A, B\}$ di $\mathbb{R}$ esiste un unico numero reale s (chiamato **elemento separatore**) tale che:

$$\forall a \in A \text{ e } \forall b \in B, \quad a \leq s \leq b$$

Tale elemento separatore è il $\sup A$ e l' $\inf B$, quindi $\sup A = \inf B$

Riepilogo

- ▶ R_4 : ogni insieme non vuoto e limitato superiormente ha estremo superiore
- ▶ $\mathbb{Q}$ non ha questa proprietà, $\mathbb{R}$ sì
- ▶ $\mathbb{R}$ è un campo ordinato con la proprietà dell'estremo superiore (R_1 – R_4)
- ▶ Forma equivalente (Dedekind): ogni sezione $\{A, B\}$ ha un unico elemento separatore $s = \sup A = \inf B$
- ▶ La **proprietà di Archimede** non è un assioma in più: segue da R_4

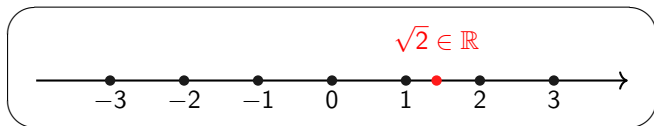
Rappresentazione geometrica di $\mathbb{R}$

Introduzione: Rappresentazione geometrica di $\mathbb{R}$

L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ può essere messo in corrispondenza biunivoca con i punti della retta euclidea?

La retta reale

- Ritorniamo ora al problema dell'incommensurabilità di lato e diagonale del quadrato. Quando, con riga e compasso, fissato il lato unitario del quadrato, ne costruiamo la diagonale e la riportiamo sulla retta di partenza, l'arco tracciato dal compasso "spezza la retta in due", generando quella che abbiamo chiamato una sezione; l'elemento separatore, che esiste per l'assioma R_4 rappresenta geometricamente il punto di intersezione, e quindi quel numero misura la diagonale.



Quindi l'interpretazione geometrica della proprietà R_4 ci mostra come l'insieme $\mathbb{R}$ sia una rappresentazione adeguata della nostra idea intuitiva di retta, così adeguata che **spesso in matematica si usa l'espressione “la retta reale” per indicare $\mathbb{R}$** , confondendo l'insieme numerico con la sua rappresentazione geometrica naturale.

Riepilogo (1/2)

Struttura algebrica e ordine:

- ▶ R_1, R_2 : proprietà di somma e prodotto (campo)
- ▶ R_3 : ordine totale compatibile con le operazioni (campo ordinato)
- ▶ $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ sono entrambi campi ordinati

Limiti di $\mathbb{Q}$:

- ▶ Esistono grandezze incommensurabili (diagonale e lato del quadrato)
- ▶ In $\mathbb{Q}$ insiemi limitati possono non avere estremo superiore

Riepilogo (2/2)

Estremi:

- ▶ Insiemi limitati, massimi e minimi, maggioranti e minoranti
- ▶ $\sup E =$ minimo dei maggioranti, $\inf E =$ massimo dei minoranti

Numeri reali:

- ▶ $\mathbb{R}$ è il campo ordinato con la proprietà dell'estremo superiore (R_4)
- ▶ Forma equivalente: assioma di Dedekind (sezioni ed elemento separatore)
- ▶ Dalla R_4 segue la **proprietà di Archimede**: per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ con $n > x$
- ▶ $\mathbb{R}$ rappresenta fedelmente la retta: “la retta reale”