

# Insiemi numerici e intervalli



# Indice

I cinque principali insiemi numerici

I numeri naturali e i numeri interi

I numeri razionali

I numeri reali

I numeri complessi

Intervalli

# I cinque principali insiemi numerici

# Introduzione: I cinque principali insiemi numerici

- ▶ In questa sezione richiamiamo i cinque insiemi numerici fondamentali:  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{C}$
- ▶ Vedremo come si scrivono i numeri razionali e i numeri reali in forma decimale
- ▶ Capiremo che esistono numeri reali non razionali e che gli insiemi numerici sono contenuti l'uno nell'altro
- ▶ Questi insiemi sono il “terreno” su cui si costruisce tutta l'Analisi Matematica

# I numeri naturali

$\mathbb{N}$  è l'insieme dei **numeri naturali**, ossia i numeri che si usano per contare:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

- ▶ Ricordiamo la convenzione adottata in queste note: lo **zero** è **un numero naturale**, ovvero  $0 \in \mathbb{N}$
- ▶ Indichiamo con  $\mathbb{N}_{>0}$  l'insieme dei **numeri naturali positivi**:

$$\mathbb{N}_{>0} = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

# Che cosa sappiamo già sui numeri naturali

Nel capitolo *Insiemi* abbiamo già introdotto, per i numeri naturali:

- ▶ le definizioni di numero **pari** ( $n = 2m$ ) e di numero **dispari** ( $n = 2m + 1$ ), con  $m \in \mathbb{N}$ , e il fatto che ogni numero naturale è pari oppure dispari, ma mai entrambe le cose
- ▶ l'**assioma del buon ordinamento**, secondo cui ogni sottoinsieme non vuoto di  $\mathbb{N}$  possiede il minimo

# I numeri interi

$\mathbb{Z}$  è l'insieme dei **numeri interi** (detti anche numeri relativi), ossia:

$$0, 1, -1, 2, -2, \dots$$

# I numeri razionali

$\mathbb{Q}$  è l'insieme dei **numeri razionali**, ossia delle frazioni:

$$\frac{n}{m}, \quad \text{dove } n, m \in \mathbb{Z}, \text{ e } m \neq 0.$$

I numeri razionali possono essere scritti anche in forma decimale.  
Ad esempio:

$$\frac{3}{4} = 0,75, \quad \text{mentre} \quad \frac{1}{3} = 0,333\cdots = 0,\overline{3}.$$

Un numero razionale, scritto in forma decimale, ha un'**espansione decimale finita o infinita periodica**: dopo la virgola compare un numero finito di cifre, oppure un numero infinito di cifre che da un certo punto in poi si ripetono *periodicamente*.

## Il numero $0,\overline{9}$

Uno stesso numero razionale può avere due espansioni decimali diverse. L'esempio classico è l'uguaglianza

$$0,\overline{9} = 1$$

di cui abbiamo dato quattro dimostrazioni diverse nel capitolo *Insieme*, e che quindi qui non ripetiamo.

# I numeri reali

$\mathbb{R}$  è l'insieme dei **numeri reali**, ossia quelli che si identificano con **espansioni decimali finite o infinite, periodiche o non periodiche**: dopo la virgola può comparire un allineamento qualsiasi di cifre, eventualmente anche *infinito* e *non periodico*.

Che esistano numeri di quest'ultimo tipo (ossia reali ma non razionali), si capisce riflettendo su esempi come:

$$0,10110111011110\dots$$

Il numero precedente dopo la virgola ha: una cifra uguale a 1, poi 0, poi due cifre uguali a 1, poi 0, poi tre cifre uguali a 1 ... e così via.

È chiaro che questo criterio definisce con precisione un numero decimale. D'altro canto, l'allineamento delle cifre dopo la virgola non è né finito né periodico: questo numero perciò è irrazionale.

# I numeri complessi

$\mathbb{C}$  è l'insieme dei **numeri complessi**, ossia del tipo

$$a + i b,$$

dove  $a$ ,  $b$  sono numeri reali, e  $i$  è l'*unità immaginaria*, ossia un numero il cui quadrato è  $-1$ .

# Inclusioni tra gli insiemi numerici

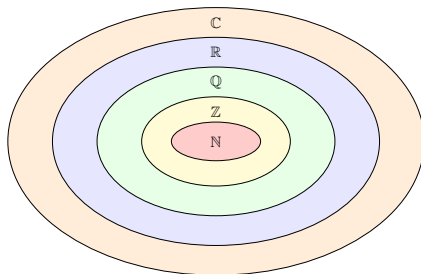
Tra gli insiemi numerici introdotti, valgono le inclusioni:

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}.$$

Come indicato dai simboli, tutte le inclusioni sono strette:

- ▶ esistono numeri interi non naturali (i numeri negativi),
- ▶ esistono numeri razionali non interi (le frazioni proprie),
- ▶ esistono numeri reali non razionali (i numeri irrazionali),
- ▶ esistono numeri complessi non reali (i numeri immaginari).

# Gli insiemi numerici uno dentro l'altro



# Numeri positivi e non negativi

Come per  $\mathbb{N}_{>0}$ , indichiamo con

$$\mathbb{Z}_{>0}, \quad \mathbb{Q}_{>0}, \quad \mathbb{R}_{>0}$$

gli insiemi dei numeri interi, razionali e reali **positivi**, e con

$$\mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \mathbb{Q}_{\geq 0}, \quad \mathbb{R}_{\geq 0}$$

gli insiemi dei numeri interi, razionali e reali **non negativi** (cioè positivi o nulli).

Ad esempio:

$$\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \quad \text{e} \quad \mathbb{Z}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{Z} : x \geq 0\} = \mathbb{N}$$

# Riepilogo

- ▶  $\mathbb{N}$ : numeri naturali, con  $0 \in \mathbb{N}$  e  $\mathbb{N}_{>0} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ;  $\mathbb{Z}$ : numeri interi
- ▶  $\mathbb{Q}$ : frazioni  $\frac{n}{m}$  con  $n, m \in \mathbb{Z}$ ,  $m \neq 0$ , cioè espansioni decimali finite o infinite periodiche
- ▶  $\mathbb{R}$ : espansioni decimali qualsiasi, anche infinite e non periodiche (esistono gli irrazionali)
- ▶  $\mathbb{C}$ : numeri  $a + i b$  con  $i^2 = -1$
- ▶  $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$
- ▶ Notazioni  $\mathbb{Z}_{>0}$ ,  $\mathbb{Q}_{>0}$ ,  $\mathbb{R}_{>0}$  e  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ ,  $\mathbb{R}_{\geq 0}$



# Intervalli

# Introduzione: Intervalli

- ▶ In questa sezione definiamo gli **intervalli**, i sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$  più usati in Analisi
- ▶ Distingueremo intervalli chiusi, aperti, limitati e illimitati
- ▶ Vedremo la proprietà di **connessione** che li caratterizza e il prodotto cartesiano di intervalli
- ▶ Gli intervalli saranno i domini naturali delle funzioni che studieremo

## Definizione 1: di intervallo limitato

*Dati due numeri reali  $a$ ,  $b$ , si chiama **intervallo limitato** di estremi  $a$  e  $b$  uno dei seguenti insiemi:*

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, \quad [a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}, \quad (a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

# Intervalli chiusi e aperti

- ▶ La parentesi quadra (tonda) in corrispondenza di uno dei due estremi indica che quest'ultimo è incluso (escluso) nell'intervallo.
- ▶ Gli intervalli  $[a, b]$  si dicono **chiusi**; quelli  $(a, b)$  si dicono **aperti**.

## Definizione 2: di intervallo illimitato

Dato un numero reale  $a$ , si chiama **intervallo illimitato** (o **semiretta**) di estremo  $a$  uno dei seguenti insiemi:

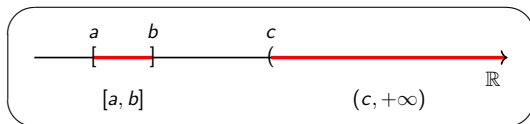
$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}, \quad (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}, \quad (-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$$

# Intervalli illimitati

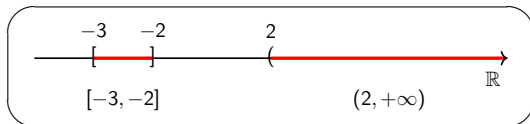
- ▶ I simboli  $-\infty$  e  $+\infty$  **non sono numeri reali**: non sono estremi che possano appartenere all'insieme, e perciò accanto a essi si scrive sempre la parentesi tonda.
- ▶ Anche l'intera retta è un intervallo illimitato:

$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$



## Esempio

**Intervalli.** La rappresentazione grafica dell'intervallo limitato chiuso  $[-3, -2]$  e dell'intervallo illimitato aperto  $(2, +\infty)$  è la seguente:



Il primo contiene i suoi due estremi, il secondo non contiene il suo estremo  $2$  e non è limitato superiormente.

# Connessione

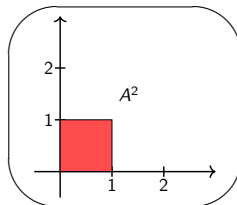
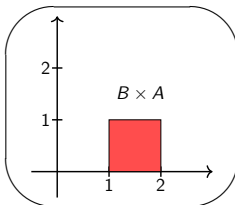
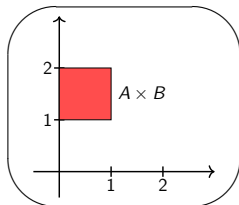
Si può dimostrare che gli intervalli, limitati o illimitati, sono tutti e soli i sottoinsiemi  $I$  di  $\mathbb{R}$  che soddisfano la seguente proprietà (detta **connessione**):

$\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$  tali che  $x_1 < x_2 < x_3$ , se  $x_1, x_3 \in I$ , allora  $x_2 \in I$

- Nel seguito ci capiterà di considerare il prodotto cartesiano di due (o più) intervalli, cui si può dare il significato geometrico di rettangolo (in due dimensioni) o parallelepipedo (in tre dimensioni).

## Esempio

**Prodotto cartesiano di intervalli.** Sia  $A = [0, 1]$ ,  $B = [1, 2]$ ; la figura



illustra gli insiemi  $A \times B$ ,  $B \times A$ ,  $A \times A$  indicato anche con  $A^2$ . In generale,  $A \times B$  è diverso da  $B \times A$ .

# Riepilogo

- ▶ Intervalli limitati di estremi  $a, b$ :  $[a, b]$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $(a, b)$
- ▶ Parentesi quadra: estremo incluso; parentesi tonda: estremo escluso
- ▶  $[a, b]$  **chiuso**,  $(a, b)$  **aperto**; le semirette  $[a, +\infty)$ ,  $(a, +\infty)$ ,  $(-\infty, a]$ ,  $(-\infty, a)$  e  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$  sono gli intervalli illimitati
- ▶ Gli intervalli sono tutti e soli i sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$  con la proprietà di **connessione**
- ▶ Il prodotto cartesiano di intervalli è un rettangolo; in generale  $A \times B \neq B \times A$

# Riepilogo

## Insiemi numerici:

- ▶  $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$ , tutte inclusioni strette
- ▶ I razionali hanno sviluppo decimale finito o periodico (ad esempio  $0, \overline{9} = 1$ )
- ▶ I reali ammettono sviluppi decimali infiniti e non periodici (irrazionali)

## Intervalli:

- ▶ Chiusi, aperti, semiaperti, limitati e illimitati
- ▶ Caratterizzati dalla proprietà di connessione
- ▶ Il loro prodotto cartesiano ha un significato geometrico (rettangoli, parallelepipedi)