

Il principio di induzione



Indice

Il principio di induzione

Dimostrazioni basate sul principio di induzione



Il principio di induzione



Introduzione: Il principio di induzione

- ▶ In questa sezione presentiamo la **dimostrazione per induzione**, un metodo per provare proprietà che valgono per tutti i numeri naturali da un certo n_0 in poi
- ▶ Vedremo i due passi della dimostrazione: il **primo passo dell'induzione** e il **passo induttivo**
- ▶ Capiremo perché il metodo funziona e quale è il punto delicato, spesso fonte di equivoci

La dimostrazione per induzione

- Presentiamo ora un metodo dimostrativo, detto dimostrazione per induzione. Questo procedimento si può applicare a teoremi con la struttura seguente:

“ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, vale la proprietà $p(n)$ ”

- Il numero n_0 è il più piccolo intero per cui si vuole che la proprietà sia vera; se $n_0 = 0$ il teorema afferma semplicemente che la proprietà è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

I due passi della dimostrazione per induzione

La dimostrazione per induzione consiste nei due passi seguenti:

1. Si dimostra che $p(n)$ sia vero per $n = n_0$ (**primo passo dell'induzione**).
2. Si dimostra che, se n è un generico numero naturale $\geq n_0$, dal fatto che $p(n)$ sia vero segue che $p(n+1)$ sia vero (**passo induttivo**).

Si può allora concludere che per ogni $n \geq n_0$, $p(n)$ è vero.

Perché il metodo funziona

- ▶ La validità di questo metodo dimostrativo, *intuitivamente*, si basa su questo fatto:
 1. Per il punto 1, sappiamo che $p(n_0)$ è vera. Supponiamo ad esempio $n_0 = 1$: sappiamo quindi che $p(1)$ è vera (questo va dimostrato esplicitamente).
 2. Per il punto 2, poiché è vera $p(1)$, sarà vera $p(2)$: infatti abbiamo dimostrato che qualunque sia n , se è vera $p(n)$ è vera anche $p(n+1)$. Ma allora, poiché è vera $p(2)$, sarà vera $p(3)$; ma allora è vera $p(4)$, ... e così via, dunque è vera $p(n)$ per ogni $n \geq 1$.

Le due fasi della dimostrazione

- Concretamente, la dimostrazione si articola in due fasi.
 1. Dimostrare direttamente $p(n_0)$;
 2. Assumere come ipotesi $p(n)$ (**ipotesi induttiva**) e provare $p(n+1)$.

Il punto delicato

- ▶ È questo il punto delicato, spesso soggetto a equivoci.
“Assumere per ipotesi” $p(n)$ non significa assumere come ipotesi la tesi. Quello che si deve provare è che:
“ per ogni $n \geq n_0$, se è vera $p(n)$ allora è vera anche $p(n+1)$ ”
e non
“ se per ogni n è vera $p(n)$, allora è vera anche $p(n+1)$ ”

Dimostrazione per induzione:

- ▶ Si applica a enunciati del tipo “per ogni $n \geq n_0$ vale $p(n)$ ”
- ▶ **Primo passo:** si dimostra direttamente $p(n_0)$
- ▶ **Passo induttivo:** assumendo $p(n)$ (ipotesi induttiva) si dimostra $p(n+1)$, per un generico $n \geq n_0$

Attenzione:

- ▶ Si prova l'implicazione “ $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ ”, non si assume la tesi

Dimostrazioni basate sul principio di induzione



Introduzione: Dimostrazioni per induzione

- ▶ In questa sezione applichiamo il principio di induzione ad alcuni risultati importanti
- ▶ Dimostreremo la **disuguaglianza di Bernoulli**, che useremo spesso nello studio dei limiti
- ▶ Ritroveremo poi, questa volta per induzione, le formule della **somma dei primi n numeri naturali, dispari e pari** e quella della **somma dei termini di una progressione geometrica**
- ▶ Infine dimostreremo la **disuguaglianza tra media aritmetica e media geometrica**

Disuguaglianza di Bernoulli

Osservazione 1: disuguaglianza di Bernoulli

Per ogni intero $n \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$, vale:

$$(1 + x)^n \geq 1 + n x$$

Dimostrazione (1/3)

Per induzione su n .

► **Primo passo dell'induzione**

Sia $n = 0$. Allora l'asserto diventa:

$$(1 + x)^0 \geq 1 + 0x \quad \text{cioè} \quad 1 \geq 1$$

che è evidentemente vero.

Dimostrazione (2/3)

► Passo induttivo

Supponiamo che sia vero per n , e proviamolo per $(n + 1)$. Per ipotesi induttiva, abbiamo:

$$(1 + x)^n \geq 1 + n x$$

e inoltre abbiamo

$$(1 + x) \geq 0 \quad \text{dato che} \quad x \geq -1.$$

Dimostrazione (3/3)

Allora possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x) \cdot (1+x)^n \\ &\geq (1+x) \cdot (1+nx) \\ &= 1 + (n+1)x + nx^2 \\ &\geq 1 + (n+1)x\end{aligned}$$

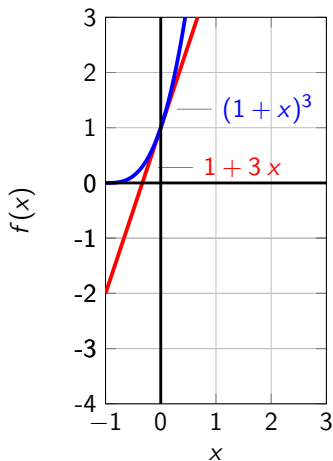
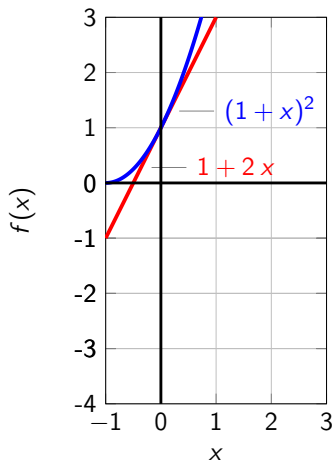
dove nell'ultima disuguaglianza si è sfruttato il fatto che $nx^2 \geq 0$.
La catena di disuguaglianze mostra che, per $n+1$, abbiamo

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$$

che è esattamente l'asserto voluto, per $n+1$. □

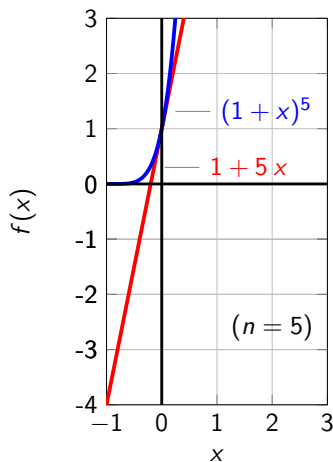
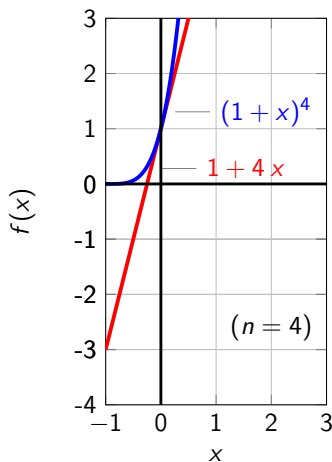
Esempio (1/2)

Disuguaglianza di Bernoulli per $n = 2$ e $n = 3$:



Esempio (2/2)

Disuguaglianza di Bernoulli per $n = 4$ e $n = 5$:



Alcune sommatorie importanti

Usiamo ora il principio di induzione per dimostrare di nuovo la formula della somma dei primi n numeri naturali.

Somma dei primi n numeri naturali

Osservazione 2: somma dei primi n numeri naturali

Per ogni intero $n \geq 1$, vale:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dimostrazione (1/2)

Per induzione su n .

► Primo passo dell'induzione

Sia $n = 1$. Allora l'asserto diventa:

$$\sum_{k=1}^1 k = \frac{1(1+1)}{2} \quad \text{cioè} \quad 1 = 1$$

che è evidentemente vero.

► Passo induttivo

Supponiamo che sia vero per n , e proviamolo per $(n+1)$. Per ipotesi induttiva, abbiamo:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dimostrazione (2/2)

Quindi possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^n k + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\end{aligned}$$

che è esattamente l'asserto voluto, per $n+1$.



Somma dei primi n numeri dispari

Osservazione 3: somma dei primi n numeri dispari

Per ogni intero $n \geq 1$, vale:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n^2 \quad \text{o equivalentemente} \quad \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$$

Dimostrazione

Per induzione su n .

- ▶ **Primo passo dell'induzione:** per $n = 1$ l'asserto diventa $\sum_{k=0}^0 (2k+1) = 1^2$, cioè $1 = 1$
- ▶ **Passo induttivo:** per ipotesi induttiva $\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n^2$, quindi

$$\sum_{k=0}^{(n+1)-1} (2k+1) = \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) + 2n+1 = n^2 + 2n+1 = (n+1)^2$$

La seconda sommatoria coincide con la prima ($k \rightarrow k+1$):

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = \sum_{k=0}^{n-1} (2(k+1)-1) = \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)$$



Somma dei primi n numeri pari

Osservazione 4: somma dei primi n numeri pari

Per ogni intero $n \geq 1$, vale:

$$\sum_{k=1}^n 2k = n(n+1)$$

Dimostrazione

Per induzione su n .

- ▶ **Primo passo dell'induzione:** per $n = 1$ l'asserto diventa $\sum_{k=1}^1 2k = 1 \cdot 2$, cioè $2 = 2$
- ▶ **Passo induttivo:** per ipotesi induttiva $\sum_{k=1}^n 2k = n(n+1)$, quindi

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} 2k &= \sum_{k=1}^n 2k + 2(n+1) = n^2 + n + 2(n+1) \\ &= (n+1)^2 + (n+1) = (n+1)((n+1) + 1)\end{aligned}$$

che è esattamente l'asserto voluto, per $n+1$. □

Somma dei termini della progressione geometrica

Con lo stesso metodo ritroviamo la formula della somma dei primi n termini di una progressione geometrica.

Somma dei primi n termini della progressione geometrica

Osservazione 5: somma dei primi n termini della progressione geometrica ($a = 1$)

Dato $q \in \mathbb{R}_+$, per ogni intero $n \geq 1$ vale:

$$\sum_{k=1}^n q^{k-1} = \begin{cases} \frac{q^n - 1}{q - 1} & \text{se } q \neq 1 \\ n & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dimostrazione (1/2)

Per induzione su n .

► Primo passo dell'induzione

Sia $n = 1$. Allora l'asserto diventa:

$$\sum_{k=1}^1 q^{k-1} = \frac{q^1 - 1}{q - 1} \quad \text{cioè} \quad 1 = 1$$

che è evidentemente vero.

► Passo induttivo

Supponiamo che sia vero per n , e proviamolo per $(n + 1)$. Per ipotesi induttiva, abbiamo:

$$\sum_{k=1}^n q^{k-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Dimostrazione (2/2)

Quindi possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} q^{k-1} &= \sum_{k=1}^n q^{k-1} + q^n = \frac{q^n - 1}{q - 1} + q^n \\ &= \frac{q^n - 1 + q^{n+1} - q^n}{q - 1} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}\end{aligned}$$

che è esattamente l'asserto voluto, per $n + 1$.



Media aritmetica e media geometrica

Con l'induzione dimostriamo infine che la media aritmetica di numeri non negativi è sempre maggiore o uguale alla loro media geometrica.

Disuguaglianza tra media aritmetica e media geometrica

Osservazione 6: disuguaglianza tra media aritmetica e media geometrica

Per ogni intero $n \geq 2$ e per ogni vettore $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$, vale:

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}$$

- ▶ La *media aritmetica* è maggiore o uguale alla *media geometrica*
- ▶ Se $a_i = a$ per ogni $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, le due medie valgono entrambe a : è l'unico caso di uguaglianza

Dimostrazione (1/4)

Per induzione su n .

► **Primo passo dell'induzione**

Sia $n = 2$. Poiché entrambi i membri sono non negativi, possiamo elevarli al quadrato:

$$\begin{aligned}\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2} &\iff \frac{a_1^2 + 2 a_1 a_2 + a_2^2}{4} \geq a_1 a_2 \\ &\iff (a_1 - a_2)^2 \geq 0\end{aligned}$$

che è evidentemente vero.

Dimostrazione (2/4)

► Passo induttivo

Supponiamo che sia vero per n , e proviamolo per $(n + 1)$. Sia

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} a_i}{n+1}$$

Se $a_i = \alpha$ per ogni i , vale l'uguaglianza. Altrimenti, riordinando i valori, possiamo supporre

$$a_n > \alpha \quad \text{e} \quad a_{n+1} < \alpha \quad \implies \quad (a_n - \alpha)(\alpha - a_{n+1}) > 0$$

Dimostrazione (3/4)

Poniamo $y = a_n + a_{n+1} - \alpha \geq a_n - \alpha > 0$ (dato che $a_{n+1} \geq 0$).

Allora:

$$n \alpha = \sum_{i=1}^{n-1} a_i + y \iff \alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i + y}{n}$$

cioè α è la media aritmetica degli n numeri non negativi $a_1, \dots, a_{n-1}$ e y .

Per ipotesi induttiva:

$$\alpha^{n+1} = \alpha^n \alpha \geq \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i \right) y \alpha$$

Dimostrazione (4/4)

Inoltre:

$$(a_n - \alpha)(\alpha - a_{n+1}) = y \alpha - a_n a_{n+1} > 0 \implies y \alpha > a_n a_{n+1}$$

Quindi, poiché $\prod_{i=1}^{n-1} a_i \geq 0$:

$$\alpha^{n+1} \geq \prod_{i=1}^{n+1} a_i \iff \frac{\sum_{i=1}^{n+1} a_i}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{\prod_{i=1}^{n+1} a_i}$$

che è esattamente l'asserto voluto, per $n+1$. □

Successione di Fibonacci

Chiudiamo con un'applicazione dell'induzione in cui il primo passo verifica **due** casi base.

La successione di Fibonacci

- La **successione di Fibonacci** è definita da:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{per } n \geq 2$$

- I primi termini sono 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...
- Le soluzioni di $x^2 - x - 1 = 0$ sono la **sezione aurea** e il suo **coniugato**:

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad \hat{\phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

- Essendo soluzioni di $x^2 = x + 1$: $\phi^2 = \phi + 1$ e $\hat{\phi}^2 = \hat{\phi} + 1$

Osservazione 7: formula chiusa della successione di Fibonacci

Per ogni intero $n \geq 0$, vale:

$$F_n = \frac{\phi^n - \hat{\phi}^n}{\sqrt{5}}$$

- Il termine n -esimo si calcola direttamente, senza passare per tutti i precedenti

Dimostrazione (1/2)

Per induzione su n . La ricorrenza lega F_{n+1} ai **due** termini precedenti: il primo passo verifica $n = 0$ e $n = 1$, il passo induttivo suppone l'asserto vero per n e $n - 1$.

► Primo passo dell'induzione

Siano $n = 0$ e $n = 1$. Allora l'asserto diventa:

$$F_0 = \frac{\phi^0 - \hat{\phi}^0}{\sqrt{5}} = 0 \quad \text{e} \quad F_1 = \frac{\phi^1 - \hat{\phi}^1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

che è evidentemente vero.

Dimostrazione (2/2)

► Passo induttivo

Per definizione $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, e per ipotesi induttiva valgono le formule chiuse per F_n e F_{n-1} . Quindi:

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= \frac{\phi^n - \hat{\phi}^n}{\sqrt{5}} + \frac{\phi^{n-1} - \hat{\phi}^{n-1}}{\sqrt{5}} = \frac{(\phi^n + \phi^{n-1}) - (\hat{\phi}^n + \hat{\phi}^{n-1})}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\phi^{n-1}(\phi + 1) - \hat{\phi}^{n-1}(\hat{\phi} + 1)}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^{n-1} \phi^2 - \hat{\phi}^{n-1} \hat{\phi}^2}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^{n+1} - \hat{\phi}^{n+1}}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

che è esattamente l'asserto voluto, per $n + 1$. □

Riepilogo

Risultati dimostrati per induzione:

- ▶ **Disuguaglianza di Bernoulli:** $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ per ogni $n \geq 0$ e $x \geq -1$
- ▶ $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ per ogni $n \geq 1$
- ▶ $\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n^2$ e $\sum_{k=1}^n 2k = n(n+1)$ per ogni $n \geq 1$
- ▶ $\sum_{k=1}^n q^{k-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$ per ogni $n \geq 1$ e $q \neq 1$
- ▶ **Media aritmetica $\geq$ media geometrica** per $n \geq 2$ numeri reali non negativi
- ▶ **Formula chiusa di Fibonacci:** $F_n = (\phi^n - \hat{\phi}^n)/\sqrt{5}$, con due casi base

Schema comune:

- ▶ Verifica del primo passo, poi passo induttivo da n a $n+1$ usando l'ipotesi induttiva.

Riepilogo finale

- ▶ La dimostrazione per induzione prova enunciati del tipo “per ogni $n \geq n_0$ vale $p(n)$ ”
- ▶ Servono due passi: il **primo passo** ($p(n_0)$ vera) e il **passo induttivo** ($p(n) \Rightarrow p(n+1)$)
- ▶ L'ipotesi induttiva non è la tesi: si dimostra un'implicazione valida per ogni $n \geq n_0$
- ▶ Con l'induzione abbiamo dimostrato la disuguaglianza di Bernoulli, la somma dei primi n naturali, la somma dei termini di una progressione geometrica e la disuguaglianza tra media aritmetica e media geometrica