Integrali impropri

Sapienza Università di Roma

Indice

Intervalli illimitati e funzioni illimitate

Criteri di convergenza

Criterio integrale per le serie

Obiettivi

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- definire e calcolare integrali impropri su intervalli illimitati e di funzioni illimitate
- usare gli integrali notevoli $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ e $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$
- usare i criteri del confronto, del confronto asintotico e della convergenza assoluta
- usare il criterio integrale per le serie

Prerequisiti

- Da questo modulo, «Teorema fondamentale del calcolo integrale» e «Tecniche di integrazione e applicazioni»: calcolo di integrali definiti con le primitive
- Da questo modulo, «Limiti notevoli e stime asintotiche» e «Funzioni monotone su un intervallo e invertibilità»: equivalenze asintotiche e limiti delle funzioni monotone
- Da questo modulo, «Serie numeriche a termini non negativi»: criteri del confronto e serie armonica generalizzata

Intervalli illimitati e funzioni illimitate

Introduzione: Intervalli illimitati e funzioni illimitate

- L'integrale di Riemann vuole funzioni limitate su intervalli limitati
- Lo estendiamo con un limite

Definizioni

Definizione 1: di integrale improprio

$$\int_a^{+\infty} f = \lim_{\omega \to +\infty} \int_a^{\omega} f \ (f \text{ continua in } [a, +\infty)); \quad \int_a^{b} f = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f \ (f \text{ continua in } (a, b]).$$

- Convergente, divergente o non esiste; più punti critici: si spezza
- $\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = 1$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$, $\int_0^{+\infty} \cos x\, dx$ non esiste

Integrali notevoli

Teorema 1: degli integrali impropri notevoli

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ converge se e solo se $p > 1$ (vale $\frac{1}{p-1}$); $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ converge se e solo se $p < 1$ (vale $\frac{1}{1-p}$).

- Per $p \neq 1$: $\int_1^{\omega} x^{-p}\,dx = \frac{\omega^{1-p}-1}{1-p}$; per $p = 1$: $\log \omega$

Attenzione

- $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -2$ è **sbagliato**
- L'integranda è illimitata in 0: si spezza, e $\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = +\infty$
- $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \log^2 x} = \frac{1}{\log 2}$ (sostituzione $t = \log x$)

Riepilogo

- Integrale improprio = limite di integrali di Riemann
- All'infinito serve $p > 1$, in zero $p < 1$

Criteri di convergenza

Introduzione: Criteri di convergenza

- Per $f \geq 0$ l'integrale converge o diverge a $+\infty$ (monotonia)
- Come per le serie: confronto e confronto asintotico

Confronto

Teorema 2: del criterio del confronto

Se $0 \leq f \leq g$ *in* $[a, +\infty)$*:* $\int g$ *converge* $\Rightarrow \int f$ *converge;* $\int f$ *diverge* $\Rightarrow \int g$ *diverge.*

- $\int_a^\omega f \leq \int_a^\omega g \leq \int_a^{+\infty} g$: limitato e monotono
- $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ converge: $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ per $x \geq 1$

□

Confronto asintotico

Teorema 3: del criterio del confronto asintotico

$f, g > 0$, $\frac{f}{g} \to \ell \in (0, +\infty)$ (per esempio $f \sim g$): stesso carattere.

- Definitivamente $\frac{\ell}{2} g \leq f \leq \frac{3\ell}{2} g$
- $\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x^3+2}\, dx$ converge ($\sim \frac{1}{x^2}$); $\int_0^1 \frac{dx}{e^x-1}$ diverge ($\sim \frac{1}{x}$)
- $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^2}\, dx$ converge se e solo se $-1 < \alpha < 1$



Convergenza assoluta

Teorema 4: della convergenza assoluta

Se $\int_a^{+\infty} |f|$ *converge, converge anche* $\int_a^{+\infty} f$ *e* $\left|\int f\right| \leq \int |f|$.

- $0 \leq f + |f| \leq 2|f|$ e $f = (f + |f|) - |f|$
- $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\, dx$ converge

□

Riepilogo

- Confronto e confronto asintotico per funzioni positive
- Convergenza assoluta per funzioni di segno variabile

Criterio integrale per le serie

Introduzione: Criterio integrale per le serie

- Una serie a termini positivi decrescenti si confronta con un integrale
- Ritroviamo la serie armonica generalizzata

Criterio integrale

Teorema 5: del criterio integrale

f continua, non negativa, non crescente in $[1, +\infty)$: $\sum f(k)$ e $\int_1^{+\infty} f$ hanno lo stesso carattere, e $\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$.

- $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f \leq f(k)$, poi si somma
- $\sum \frac{1}{k \log k}$ diverge, $\sum \frac{1}{k \log^2 k}$ converge
- $\log(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leq 1 + \log n$

□

Riepilogo

- Serie e integrale hanno lo stesso carattere per f positiva non crescente
- Le somme parziali della serie armonica crescono come $\log n$

Riepilogo

- Integrali impropri come limiti; integrali notevoli in $+\infty$ e in 0
- Confronto, confronto asintotico, convergenza assoluta
- Criterio integrale per le serie