Tecniche di integrazione e applicazioni

Indice

Sostituzione e per parti

Funzioni razionali

Aree e valor medio

Obiettivi

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- usare le formule di integrazione per sostituzione e per parti
- integrare le funzioni razionali con i fratti semplici
- calcolare l'area fra due grafici e il valor medio di una funzione

Prerequisiti

- Da questo modulo, «Teorema fondamentale del calcolo integrale»: primitive, formula fondamentale del calcolo integrale, primitive immediate
- Da questo modulo, «Regole di calcolo delle derivate»: derivata del prodotto e della funzione composta
- Da questo modulo, «Limiti di polinomi e funzioni razionali»: polinomi, radici e funzioni razionali
- Da questo modulo, «L'integrale di Riemann»: area del trapezoide e media integrale

Sostituzione e per parti

Introduzione: Sostituzione e per parti

- La regola della catena letta al contrario dà la sostituzione
- La derivata del prodotto letta al contrario dà l'integrazione per parti

Sostituzione

Teorema 1: di integrazione per sostituzione

f continua, g con derivata continua:

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\, dt$$

- $F(g(x))$ è una primitiva dell'integranda (regola della catena)
- $t = g(x)$, $dt = g'(x)\, dx$; cambiano anche gli estremi

Esempi

Esempio 1: sostituzione

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{t}\,dt = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \overset{x=\sin t}{=} \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \frac{\pi}{4}$$

Per parti

Teorema 2: di integrazione per parti

$$\int_a^b f\, g'\, dx = \big[f\, g\big]_a^b - \int_a^b f'\, g\, dx$$

- $(fg)' = f'g + fg'$ e formula fondamentale
- $\int x\, e^x\, dx = (x-1)e^x + c$, $\int \log x\, dx = x \log x - x + c$
- $\int e^x \sin x\, dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + c$ (l'integrale ritorna)



Riepilogo

- Sostituzione: integranda, differenziale ed estremi cambiano insieme
- Per parti: si deriva il fattore che si semplifica

Funzioni razionali

Introduzione: Funzioni razionali

- Divisione se $\deg P \geq \deg Q$
- Poi fratti semplici secondo i fattori del denominatore

Denominatore di secondo grado

- $\Delta > 0$: $\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$
- $\Delta = 0$: $\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{(x-x_1)^2}$
- $\Delta < 0$: numeratore $=$ multiplo di $2x + p +$ costante; logaritmo e arcotangente

Esempio 2: fratti semplici

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c, \qquad \int \frac{x+3}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\log(x^2+2x+5) + \arctan\frac{x+1}{2} + c$$

Riepilogo

- Divisione, poi fratti semplici
- Fattori ripetuti: un termine per ogni potenza

Aree e valor medio

Introduzione: Aree e valor medio

- L'area fra due grafici è un integrale della differenza
- Il valor medio estende la media aritmetica

Area fra due grafici

Proposizione 1: dell'area fra due grafici

Se $f \leq g$ in $[a, b]$, l'area fra i grafici è $\int_a^b (g - f)\, dx$.

- Fra $y = x^2$ e $y = x + 2$: intersezioni -1, 2; area $\int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\, dx = \frac{9}{2}$
- Se i grafici si incrociano: $\int_a^b |g - f|$, fra $\sin x$ e $\cos x$ in $[0, \frac{\pi}{2}]$ vale $2\sqrt{2} - 2$

Valor medio

- $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$
- Media di $\sin x$ in $[0,\pi]$: $\frac{2}{\pi}$
- Velocità $v(t)=3t^2$ in $[0,2]$: spazio 8, velocità media 4

Riepilogo

- Area: $\int_a^b |g - f|$ dopo le intersezioni
- Valor medio: $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$

Riepilogo

- Sostituzione e cambio di variabile
- Per parti, anche con l'integrale che ritorna
- Funzioni razionali: divisione e fratti semplici
- Aree fra grafici e valor medio