Teorema fondamentale del calcolo integrale

Indice

Primitive

Funzione integrale e teorema fondamentale

Primitive immediate

Derivata di una funzione integrale

Obiettivi

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- descrivere tutte le primitive di una funzione su un intervallo
- enunciare e dimostrare le due parti del teorema fondamentale
- calcolare integrali definiti con le primitive immediate
- derivare funzioni integrali con estremi variabili

Prerequisiti

- Da questo modulo, «L'integrale di Riemann»: definizione e proprietà dell'integrale, teorema della media integrale
- Da questo modulo, «Funzione derivata», «Derivate di funzioni elementari» e «Regole di calcolo delle derivate»: derivate e regola della catena
- Da questo modulo, «Teorema del valore medio, massimi e minimi»: una funzione con derivata nulla in un intervallo è costante
- Da questo modulo, «Teorema di De l'Hospital e derivabilità»: il teorema di De l'Hospital

Primitive

Introduzione: Primitive

- Cercare una funzione conoscendone la derivata
- Su un intervallo le primitive differiscono per una costante

Primitive

Definizione 1: di primitiva

*$F : I \to \mathbb{R}$ è una **primitiva** di f nell'intervallo I se F è derivabile e $F' = f$ in I.*

- $\frac{x^3}{3}$ e $\frac{x^3}{3} + 5$ sono primitive di x^2
- Integrale indefinito: $\int f(x)\,dx = F(x) + c$

Caratterizzazione delle primitive

Teorema 1: di caratterizzazione delle primitive

Se F è una primitiva di f nell'intervallo I, allora G è una primitiva se e solo se $G = F + c$.

- $(G - F)' = 0$ in un intervallo: $G - F$ è costante (Lagrange)
- Senza intervallo è falso: $\log|x|$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Riepilogo

- Primitiva: $F' = f$
- Su un intervallo, tutte le primitive sono $F + c$

Funzione integrale e teorema fondamentale

Introduzione: Funzione integrale e teorema fondamentale

- La funzione integrale $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ è una primitiva di f continua
- Così un integrale definito si calcola con una primitiva

Funzione integrale

Definizione 2: di funzione integrale

Per f integrabile in $[a, b]$ e $x_0 \in [a, b]$: $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$.

Proposizione 1: di continuità della funzione integrale

Se $|f| \leq L$: $|F(x) - F(y)| \leq L\,|x - y|$.

Prima parte

Teorema 2: fondamentale del calcolo integrale, prima parte

Se f è continua in $[a, b]$, allora $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ è derivabile e $F'(x) = f(x)$.

- $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f = f(c_h)$ (teorema della media)
- $c_h \to x$ e f è continua: $f(c_h) \to f(x)$

□

Seconda parte

Teorema 3: fondamentale del calcolo integrale, seconda parte

Se f è continua in $[a, b]$ e G è una sua primitiva: $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$.

- $G = F + c$ con $F(x) = \int_a^x f$: $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$
- $\int_0^\pi \sin x\,dx = \big[-\cos x\big]_0^\pi = 2$

Riepilogo

- $F' = f$ per f continua: ogni funzione continua ha una primitiva
- $\int_a^b f = \left[G\right]_a^b$ per una qualunque primitiva G

Primitive immediate

Introduzione: Primitive immediate

- La tabella delle derivate letta al contrario
- Vale anche nella forma composta, con $g'(x)$

Tabella

$x^\alpha \ (\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\sin x$	$-\cos x$
$\frac{1}{x}$	$\log \lvert x \rvert$	$\cos x$	$\sin x$
e^x	e^x	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
a^x	$\frac{a^x}{\log a}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\operatorname{Sh} x$	$\operatorname{Ch} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$

- $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \log|g(x)| + c$: $\int \tan x\,dx = -\log|\cos x| + c$

Esempio

Esempio 1: primitive immediate

$$\int \left(3x^2 - \tfrac{4}{x} + 2e^x\right) dx = x^3 - 4\log|x| + 2e^x + c$$

$$\int \frac{x}{1+x^2}\, dx = \tfrac{1}{2}\log(1+x^2) + c, \qquad \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$$

Riepilogo

- Ogni riga della tabella si verifica derivando
- Le formule valgono su intervalli in cui la funzione è definita

Derivata di una funzione integrale

Introduzione: Derivata di una funzione integrale

- Funzioni definite da integrali anche senza primitiva elementare
- Servono nei limiti e negli studi di funzione

Estremi variabili

Teorema 4: di derivazione delle funzioni integrali

$$\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt = f(\beta(x))\,\beta'(x) - f(\alpha(x))\,\alpha'(x)$$

- $G = F(\beta) - F(\alpha)$ e regola della catena
- $\frac{d}{dx}\int_1^{x^2} e^{t^2}\,dt = 2x\,e^{x^4}$

Esempi

Esempio 2: limite e studio

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \sin(t^2)\, dt = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{3x^2} = \frac{1}{3} \text{ (De l'Hospital).}$$

$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$: crescente ($F' > 0$), flesso in 0, dispari.

Riepilogo

- Derivata con estremi variabili: $f(\beta)\beta' - f(\alpha)\alpha'$
- Con De l'Hospital per i limiti di funzioni integrali

Riepilogo

- Primitive e caratterizzazione su un intervallo
- Funzione integrale continua; derivabile con $F' = f$ se f è continua
- $\int_a^b f = G(b) - G(a)$
- Primitive immediate e forma composta
- Derivata di $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f$