L'integrale di Riemann

Sapienza Università di Roma

Indice

Partizioni e somme di Riemann

L'integrale di Riemann

Classi di funzioni integrabili

Proprietà dell'integrale

Teorema della media integrale

Obiettivi

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- calcolare somme inferiori e superiori rispetto a una partizione
- enunciare la definizione di integrale di Riemann e interpretarlo come area con segno
- dimostrare che funzioni monotone e continue su $[a, b]$ sono integrabili
- usare linearità, additività, monotonia e $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$
- enunciare e dimostrare il teorema della media integrale

Prerequisiti

- Da questo modulo, «Campi ordinati, estremo superiore/inferiore e assioma di continuità»: estremo superiore e inferiore di un insieme e loro esistenza in $\mathbb{R}$
- Da questo modulo, «Sommatorie, progressioni geometriche e aritmetiche»: il simbolo di sommatoria e la somma dei primi n numeri naturali
- Da questo modulo, «Funzioni continue» e «Teorema di Weierstrass e teorema dei valori intermedi»: continuità, massimo e minimo su un intervallo chiuso e limitato, valori intermedi

Partizioni e somme di Riemann

Introduzione: Partizioni e somme di Riemann

- Vogliamo misurare l'area sotto il grafico di una funzione limitata
- Dividiamo $[a, b]$ in intervalli e approssimiamo l'area con rettangoli **inscritti** e **circoscritti**
- Raffinando la divisione, le due approssimazioni si avvicinano

Partizioni

Definizione 1: di partizione di un intervallo

*Una **partizione** di $[a, b]$ è un insieme finito $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ con $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Gli intervalli sono $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, di ampiezza $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.*

- **Uniforme**: $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$; **più fine**: $P \subseteq P'$

Somme inferiori e superiori

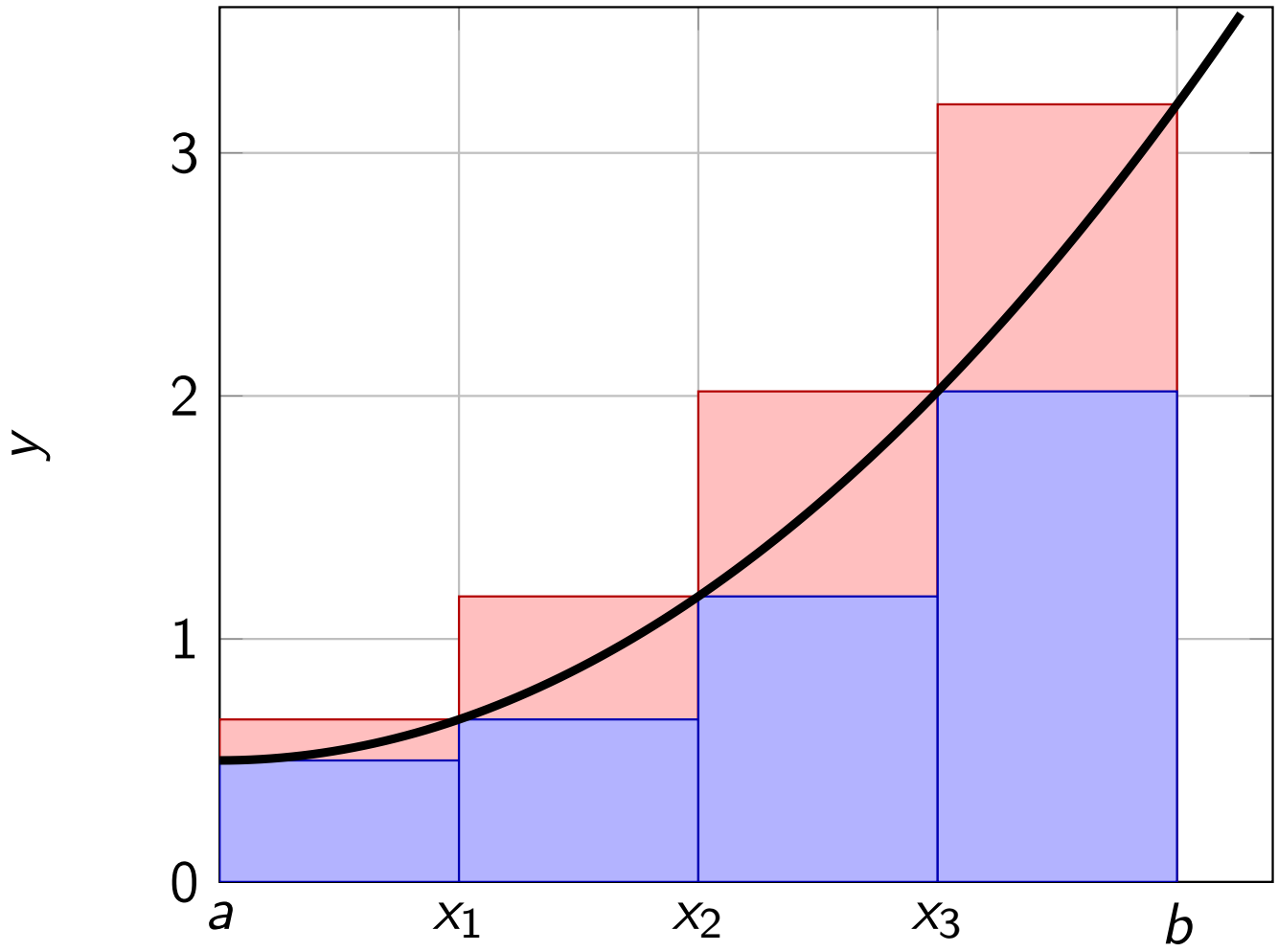
Definizione 2: di somma inferiore e superiore

Sia f limitata in $[a,b]$, $m_k = \inf_{I_k} f$, $M_k = \sup_{I_k} f$:

$$s(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \, \Delta x_k, \qquad S(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \, \Delta x_k$$

- Sempre $s(f,P) \leq S(f,P)$

Interpretazione grafica



Blu: somma inferiore; blu + rosso: somma superiore.

Esempio

Esempio 1: somme di $f(x) = x$ in $[0,1]$

Con $x_k = \frac{k}{n}$: $m_k = \frac{k-1}{n}$, $M_k = \frac{k}{n}$, $\Delta x_k = \frac{1}{n}$. Con $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$:

$$S(f, P_n) = \frac{n+1}{2n}, \qquad s(f, P_n) = \frac{n-1}{2n}$$

Entrambe tendono a $\frac{1}{2}$.

Raffinamenti

Proposizione 1: delle somme e dei raffinamenti

Se P' è più fine di P: $s(f, P) \leq s(f, P') \leq S(f, P') \leq S(f, P)$.

Corollario 1

Per ogni coppia di partizioni: $s(f, P_1) \leq S(f, P_2)$.

- Dimostrazione del corollario: $P = P_1 \cup P_2$ raffina entrambe.

Dimostrazione della proposizione

- Basta aggiungere un punto $y \in (x_{k-1}, x_k)$
- L'estremo inferiore su un sottointervallo è $\geq m_k$:

$$m'(y - x_{k-1}) + m''(x_k - y) \geq m_k \, \Delta x_k$$

- Quindi $s(f, P') \geq s(f, P)$; per le somme superiori si ragiona con gli estremi superiori

□

Riepilogo

- Somme inferiori con gli estremi inferiori, superiori con gli estremi superiori
- Raffinando, s cresce e S cala
- Ogni somma inferiore è $\leq$ di ogni somma superiore: $\sup_P s \leq \inf_P S$

L'integrale di Riemann

Introduzione: L'integrale di Riemann

- Una funzione è integrabile quando le approssimazioni dal basso e dall'alto si incontrano
- Il valore comune è l'integrale: un'area con segno
- Un criterio con ε permette di verificarlo in pratica

Definizione

Definizione 3: di funzione integrabile secondo Riemann

*f limitata in $[a,b]$ è **integrabile** se* $\sup_P s(f,P) = \inf_P S(f,P)$.
Il valore comune è $\int_a^b f(x)\,dx$.

- Se $f \geq 0$: area del trapezoide $\{a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$
- Se f cambia segno: area sopra l'asse meno area sotto

Esempi

- $\int_a^b c\,dx = c\,(b-a)$
- $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$, $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$ (con $\sum k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)
- **Dirichlet**: $D(x) = 1$ su $\mathbb{Q}$, 0 altrove. Per ogni P: $s = 0$, $S = 1$: **non** integrabile

Criterio di integrabilità

Teorema 1: criterio di integrabilità di Riemann

f limitata è integrabile in $[a, b]$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste P con $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$.

- $(\Leftarrow)$ $0 \leq \inf S - \sup s \leq S(P) - s(P) < \varepsilon$
- $(\Rightarrow)$ P_1, P_2 vicine a I entro $\frac{\varepsilon}{2}$, poi $P = P_1 \cup P_2$

□

Somme di Riemann

- Con $t_k \in I_k$: $\sigma(f, P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k$
- $s(f, P) \leq \sigma(f, P) \leq S(f, P)$: se $S - s \to 0$, $\sigma \to \int_a^b f$
- Estremo sinistro, destro o punto medio: l'app «Somme di Riemann» del laboratorio

Riepilogo

- Integrabile: $\sup_P s = \inf_P S$; l'integrale è un'area con segno
- Criterio: $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$ per qualche P
- La funzione di Dirichlet non è integrabile

Classi di funzioni integrabili

Introduzione: Classi di funzioni integrabili

- Due grandi classi di funzioni integrabili: le **monotone** e le **continue**
- Per le continue serve la **continuità uniforme** (teorema di Heine–Cantor)

Funzioni monotone

Teorema 2: di integrabilità delle funzioni monotone

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è monotona, allora è integrabile.

Per f non decrescente e P_n uniforme, la somma è telescopica:

$$S(f, P_n) - s(f, P_n) = \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{n} \to 0$$

□

Continuità uniforme

Definizione 4: di funzione uniformemente continua

f è uniformemente continua in I se $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$*:* $x, y \in I$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

- x^2 in $[0, 1]$: $|x^2 - y^2| \leq 2|x - y|$, $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$
- $\frac{1}{x}$ in $(0, 1]$ non lo è: $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n+1}$

Teorema di Heine–Cantor

Teorema 3: di Heine–Cantor

Se f è continua in $[a, b]$, allora è uniformemente continua in $[a, b]$.

- Per assurdo: $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ e $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$
- Bolzano–Weierstrass: $x_{n_j} \to c \in [a, b]$, quindi anche $y_{n_j} \to c$
- Per continuità $f(x_{n_j}) - f(y_{n_j}) \to 0$: assurdo

□

Funzioni continue

Teorema 4: di integrabilità delle funzioni continue

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua, allora è integrabile.

- Heine–Cantor: $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$
- Partizione con $\Delta x_k < \delta$: $M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}$ (Weierstrass)
- $S - s < \varepsilon$: si conclude con il criterio

□

Riepilogo

- Monotone $\Rightarrow$ integrabili (anche con discontinuità, come $[x]$)
- Continue su $[a, b] \Rightarrow$ uniformemente continue $\Rightarrow$ integrabili
- Cambiare f in un numero finito di punti non cambia l'integrale

Proprietà dell'integrale

Introduzione: Proprietà dell'integrale

- Le proprietà che useremo sempre nei calcoli: linearità, additività, monotonia
- Convenzioni: $\int_a^a f = 0$, $\int_b^a f = -\int_a^b f$

Linearità e additività

Teorema 5: di linearità dell'integrale

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

Teorema 6: di additività rispetto all'intervallo

Per $a < c < b$: $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

- Idea: $s(f) + s(g) \leq s(f+g) \leq S(f+g) \leq S(f) + S(g)$; partizioni che contengono c

Monotonia e stime

Teorema 7: di monotonia dell'integrale

Se $f \leq g$ *in* $[a, b]$, *allora* $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

- Se $m \leq f \leq M$: $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$
- Esempio: $\frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2}\, dx \leq 1$

Valore assoluto

Teorema 8: dell'integrale del valore assoluto

Se f è integrabile, anche $|f|$ lo è e $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

- $\big||f(x)| - |f(y)|\big| \leq |f(x) - f(y)|$: $S(|f|) - s(|f|) \leq S(f) - s(f)$
- $-|f| \leq f \leq |f|$ e monotonia
- $\int_{-1}^{1} x\,dx = 0 < 1 = \int_{-1}^{1} |x|\,dx$

□

Riepilogo

- Linearità, additività rispetto all'intervallo, monotonia
- Stime $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$
- $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$, a volte con disuguaglianza stretta

Teorema della media integrale

Introduzione: Teorema della media integrale

- La media integrale è l'altezza del rettangolo con la stessa area del trapezoide
- Per le funzioni continue è un valore assunto dalla funzione

Teorema della media integrale

Teorema 9: della media integrale

Se f è continua in $[a,b]$, esiste $c \in [a,b]$ con $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

- Weierstrass: $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leq M$
- Valori intermedi: la media è assunta in un punto c
- Esempio: media di x^2 in $[0,1]$ è $\frac{1}{3}$, $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Riepilogo

- Media integrale: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$
- Per f continua è assunta in almeno un punto
- Senza continuità può non esserlo (funzione a gradino)

Riepilogo

- Somme inferiori e superiori, integrale come $\sup_P s = \inf_P S$
- Criterio di integrabilità con ε
- Monotone e continue sono integrabili (Heine–Cantor)
- Linearità, additività, monotonia, $\left|\int f\right| \leq \int |f|$
- Teorema della media integrale