

Funzioni invertibili e funzioni inverse



Indice

Funzioni invertibili e funzioni inverse

Grafico della funzione inversa

Le funzioni potenze inverse

Le funzioni trigonometriche inverse

Le funzioni iperboliche inverse

Funzioni invertibili e funzioni inverse

Introduzione: Funzioni invertibili e funzioni inverse

- ▶ Una funzione associa a ogni ingresso x un'unica uscita $y = f(x)$: ci chiediamo quando è possibile “tornare indietro”, cioè risalire da y all'unico x che la produce
- ▶ In questa sezione definiamo le **funzioni invertibili** e la **funzione inversa**, con un criterio grafico per riconoscerle
- ▶ Dimostreremo che le funzioni **strettamente monotone** sono invertibili, e vedremo che non è una condizione necessaria

Funzioni invertibili

- ▶ Data una funzione reale di variabile reale $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, per ogni ingresso x nel dominio D esiste un'unica uscita $y = f(x)$ nell'immagine del dominio $f(D)$.
- ▶ Se anche per ogni uscita $y = f(x) \in f(D)$ esiste un unico ingresso $x \in D$, allora f si dice **invertibile**, e realizza una **corrispondenza biunivoca** tra il dominio D di f e l'immagine del dominio $f(D)$.

Definizione 1: di funzione invertibile

Una funzione $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ è **invertibile** nel dominio D se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

$$\forall x_1, x_2 \in D, \quad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$\forall x_1, x_2 \in D, \quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

$$\forall y \in f(D), \quad \exists! x \in D : y = f(x)$$

ovvero se f è **iniettiva**.

Attenzione

- ▶ **ATTENZIONE:** la definizione di funzione invertibile data qui per funzioni reali di variabile reale è diversa dalla solita data per funzioni tra insiemi qualsiasi, che richiede anche la suriettività.
- ▶ In questo caso *basta l'iniettività* perché definiamo l'inversa sull'immagine di f e non su tutto il suo codominio.

Definizione 2: di funzione inversa

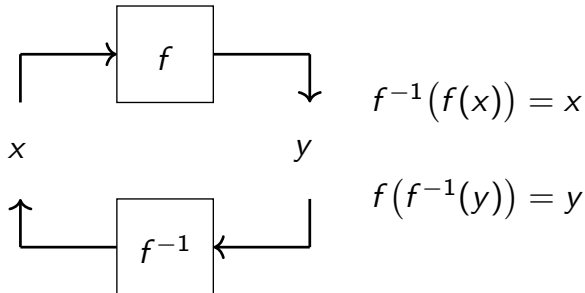
*Data una funzione invertibile $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, la funzione che associa a ogni uscita $y \in f(D)$ l'unico ingresso $x \in D$ tale che $f(x) = y$ si chiama **funzione inversa** di f e si indica con il simbolo f^{-1} .*

La coppia f e f^{-1}

La coppia f e f^{-1} si indica:

$$f : \begin{cases} y = f(x) \\ x \in D \end{cases} \qquad f^{-1} : \begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in f(D) \end{cases}$$

La scatola nera di f^{-1} lavora a ritroso rispetto a quella di f , secondo il seguente schema:



Criterio grafico di invertibilità

- ▶ La condizione di invertibilità equivale a richiedere che il grafico di f sia intersecato al massimo in un punto da ogni retta parallela all'asse delle ascisse.
- ▶ Vediamo ora un esempio di grafico di funzione invertibile e uno di funzione non invertibile

Esempio

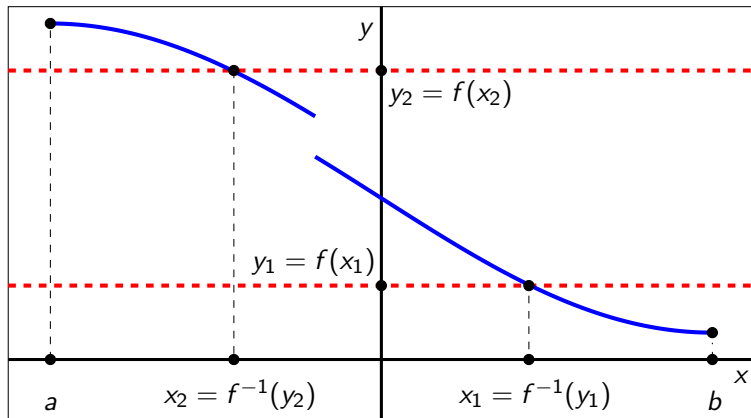


Grafico di funzione **invertibile** in $[a, b]$ in quanto ogni retta parallela all'asse delle ascisse o non interseca il grafico di f o lo interseca esattamente in un punto.

Esempio

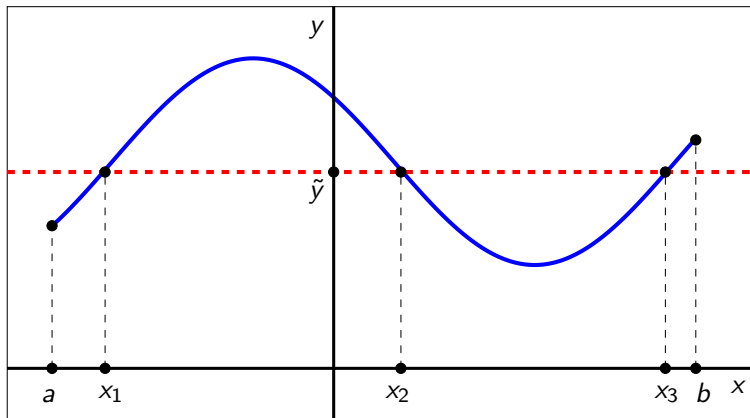


Grafico di funzione **non invertibile** in $[a, b]$ in quanto per il valore di $\tilde{y}$ indicato esistono più valori x (precisamente x_1 , x_2 e x_3) che hanno immagine $\tilde{y}$.

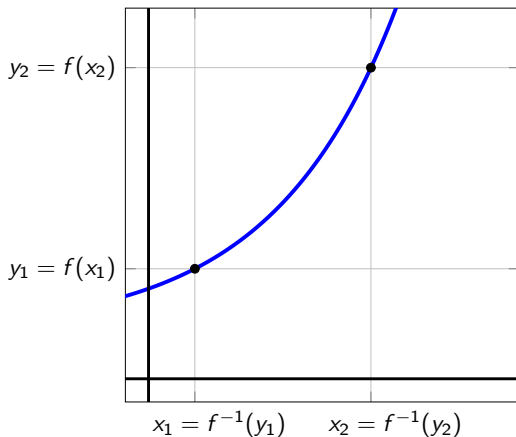
Funzioni strettamente monotone

Teorema 1

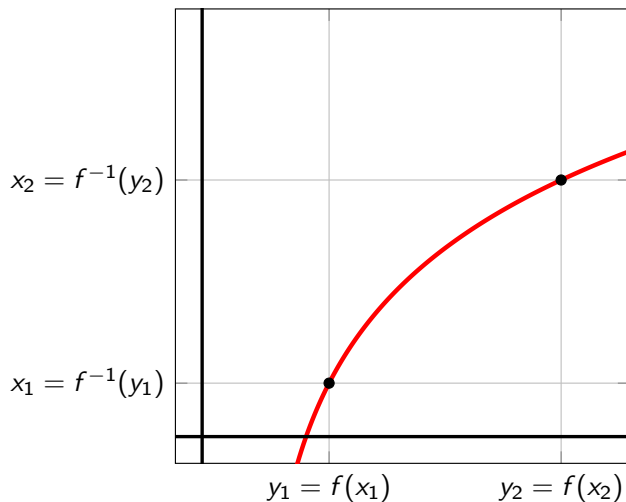
Se una funzione $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ è strettamente crescente (decreciente) in D allora è invertibile in D . Inoltre, la sua funzione inversa è strettamente crescente (decrecente).

Interpretazione grafica (1/2)

Per il caso strettamente crescente, graficamente abbiamo:



Interpretazione grafica (2/2)



Dimostrazione (1/2)

Consideriamo il caso di una funzione strettamente crescente in D e due generici valori $x_1, x_2 \in D$ (il caso strettamente decrescente è analogo).

Se $x_1 \neq x_2$, allora o $x_1 < x_2$, oppure $x_1 > x_2$. Dato che f è strettamente crescente abbiamo:

$$\text{se } x_1 < x_2, \text{ allora } f(x_1) < f(x_2)$$

$$\text{se } x_1 > x_2, \text{ allora } f(x_1) > f(x_2)$$

In entrambi i casi $f(x_1) \neq f(x_2)$, perciò f è invertibile.

Dimostrazione (2/2)

Consideriamo la funzione inversa f^{-1} , ovvero $x = f^{-1}(y)$, e proviamo che sia strettamente crescente. Consideriamo due generici valori $y_1, y_2 \in f(D)$, con $y_1 < y_2$.

Se fosse $f^{-1}(y_1) = x_1 \geq x_2 = f^{-1}(y_2)$, poiché f è strettamente crescente avremmo $y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$, ovvero $y_1 \geq y_2$. Questo caso non può accadere visto che contraddice $y_1 < y_2$ (**assurdo**).

Di conseguenza abbiamo $f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2)$, ovvero $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, e quindi f^{-1} è strettamente crescente. □

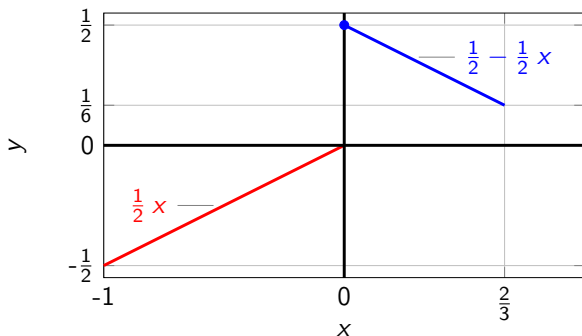
La monotonia stretta non è necessaria

- ▶ Una funzione può però essere invertibile anche senza essere strettamente crescente o decrescente.

Esempio

Ad esempio la seguente funzione definita a tratti è invertibile:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{se } -1 \leq x < 0, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{2}{3} \end{cases}$$



Funzioni non invertibili

- ▶ Due classi di funzioni che sicuramente non risultano invertibili sono:

1. le funzioni simmetriche pari, dato che:

$$f(-x) = f(x)$$

2. le funzioni periodiche, dato che:

$$f(x + T) = f(x)$$

Funzioni invertibili e inverse:

- ▶ f è invertibile in D se è iniettiva: a uscite uguali corrispondono ingressi uguali
- ▶ L'inversa f^{-1} è definita sull'immagine $f(D)$ e associa a ogni y l'unico x con $f(x) = y$
- ▶ Criterio grafico: ogni retta orizzontale interseca il grafico al massimo in un punto

Monotonia:

- ▶ Strettamente monotona $\Rightarrow$ invertibile, con inversa monotona dello stesso tipo (non vale il viceversa)
- ▶ Le funzioni pari e le funzioni periodiche non sono invertibili

Grafico della funzione inversa

Introduzione: Grafico della funzione inversa

- ▶ In questa sezione vediamo come ottenere il **grafico** di f^{-1} a partire da quello di f : basta una simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$
- ▶ Vediamo poi come trovare l'**espressione analitica** dell'inversa risolvendo l'equazione $f(x) = y$ rispetto a x
- ▶ Esempi: funzione affine, x^2 , esponenziale; e un caso in cui l'inversa esiste ma non si sa scrivere esplicitamente

Simmetria rispetto alla bisettrice

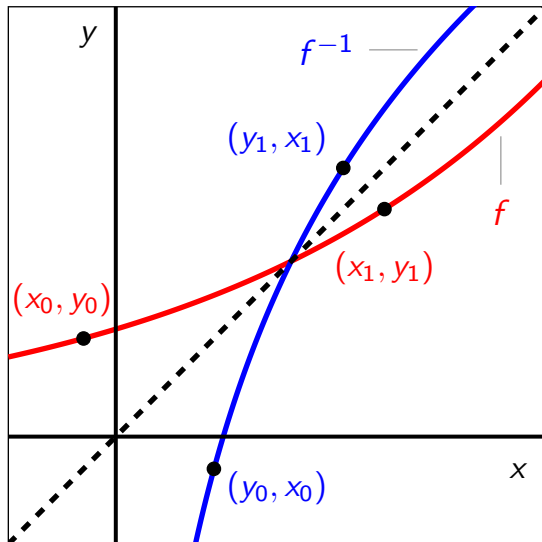
- ▶ Le relazioni tra una funzione invertibile f e la sua funzione inversa f^{-1} :

$$f : \begin{cases} y = f(x) \\ x \in D \end{cases} \qquad f^{-1} : \begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in f(D) \end{cases}$$

indicano che se il punto (x_0, y_0) è sul grafico di f allora il punto (y_0, x_0) è sul grafico di f^{-1} .

- ▶ Essendo i punti (x_0, y_0) e (y_0, x_0) **simmetrici rispetto alla bisettrice** di equazione $y = x$, il grafico di f^{-1} si ricava da quello di f per simmetria rispetto alla bisettrice.

Simmetria rispetto alla bisettrice



Espressione analitica dell'inversa

- ▶ Se è nota l'espressione analitica di f , ed è invertibile, l'**espressione analitica** di f^{-1} si trova cercando di risolvere rispetto a x l'equazione:

$f(x) = y$ ovvero trovare l'ingresso x che produce l'uscita y

- ▶ **Attenzione che non è sempre possibile trovarla anche nei casi in cui la funzione inversa esiste!**

Inversa di una funzione affine

Dati $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$, abbiamo :

$$f : \begin{cases} y = ax + b \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$f^{-1} : \begin{cases} x = \frac{y-b}{a} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Esempio (1/3)

La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 3$ è strettamente crescente quindi invertibile su $\mathbb{R}$ e l'equazione

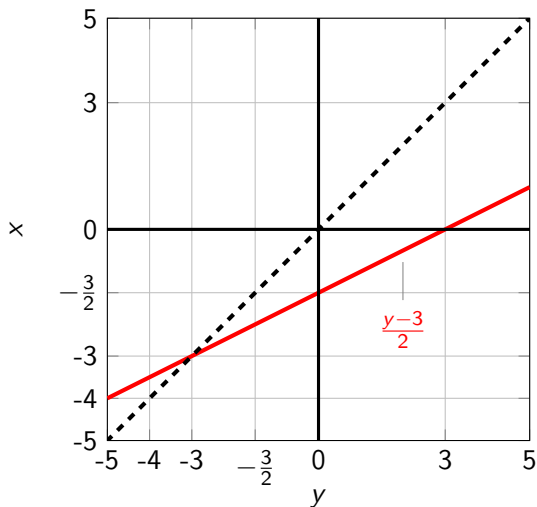
$$2x + 3 = y \text{ risolta rispetto a } x, \quad \text{ovvero } x = \frac{y - 3}{2}$$

dà per f^{-1} l'espressione analitica:

$$f^{-1}(y) = \frac{y - 3}{2}$$

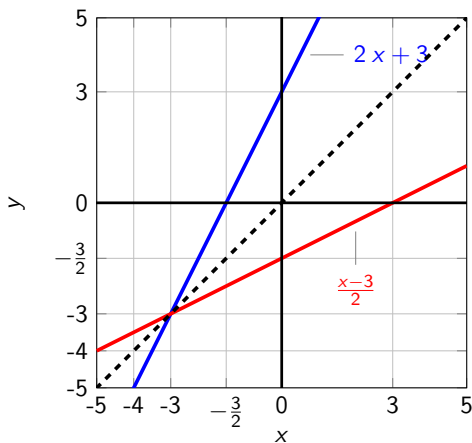
ovvero la funzione: $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto \frac{y-3}{2}$.

Esempio (2/3)



Esempio (3/3)

I grafici $y = 2x + 3$ e $y = \frac{x-3}{2}$ sono simmetrici rispetto alla bisettrice $y = x$



Inversa di x^2

Abbiamo:

$$f : \begin{cases} y = x^2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$f^{-1} : \begin{cases} x = \sqrt{y} \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Esempio (1/2)

La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ è strettamente crescente nell'intervallo $[0, +\infty)$ quindi invertibile, l'equazione

$$x^2 = y \text{ risolta rispetto a } x, \text{ ovvero } x = \sqrt{y}$$

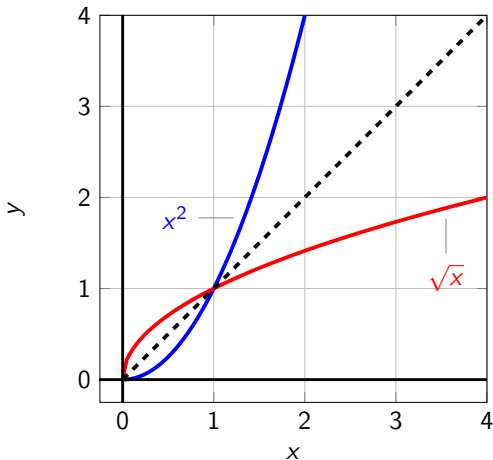
dà per f^{-1} l'espressione analitica

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

ovvero la funzione: $f^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto \sqrt{y}$.

Esempio (2/2)

I grafici $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$ sono simmetrici rispetto alla bisettrice $y = x$



Inversa dell'esponenziale

Dato $a \in \mathbb{R}_+$, $a \neq 1$, abbiamo :

$$f : \begin{cases} y = a^x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$f^{-1} : \begin{cases} x = \log_a y \\ y > 0 \end{cases}$$

Esempio (1/2)

La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^x$ è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$ e quindi invertibile, l'equazione

$$e^x = y \text{ risolta rispetto a } x, \quad \text{ovvero } x = \log y$$

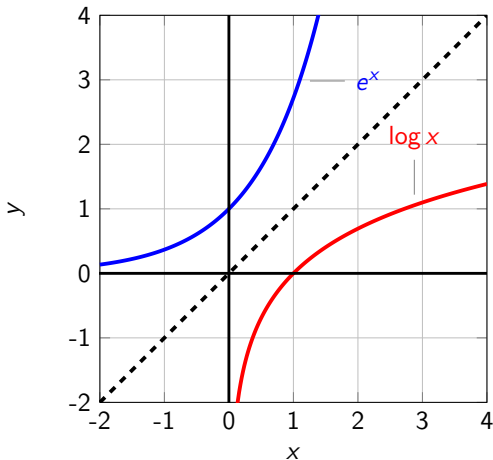
dà per f^{-1} l'espressione analitica

$$f^{-1}(y) = \log y$$

ovvero la funzione: $f^{-1} : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto \log y$.

Esempio (2/2)

I grafici $y = e^x$ e $y = \log x$ sono simmetrici rispetto alla bisettrice $y = x$



Un'inversa che non si sa scrivere

- Consideriamo ora la funzione:

$$f(x) = x + e^x$$

Essendo somma di due funzioni strettamente crescenti in tutto $\mathbb{R}$, $f(x)$ è strettamente crescente e quindi invertibile su tutto $\mathbb{R}$ (vedere il Teorema sulle funzioni strettamente monotone).

- Tuttavia, cercheremmo inutilmente di risolvere rispetto a x l'equazione $x + e^x = y$. In altre parole, f^{-1} esiste, ma non si sa scrivere esplicitamente.

Grafico ed espressione dell'inversa:

- ▶ (x_0, y_0) sta sul grafico di f se e solo se (y_0, x_0) sta sul grafico di f^{-1} : i grafici sono simmetrici rispetto alla bisettrice $y = x$
- ▶ L'espressione di f^{-1} si trova risolvendo $f(x) = y$ rispetto a x

Esempi:

- ▶ $y = ax + b \Leftrightarrow x = \frac{y-b}{a}$; $y = x^2 \ (x \geq 0) \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$;
 $y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$
- ▶ $f(x) = x + e^x$ è invertibile, ma f^{-1} non si sa scrivere esplicitamente

Le funzioni potenze inverse

Introduzione: Le funzioni potenze inverse

- ▶ In questa sezione studiamo l'inversa delle funzioni **potenza**
 $y = x^\alpha$
- ▶ L'inversa di una potenza è ancora una potenza, con esponente $\frac{1}{\alpha}$ (le **radici**)
- ▶ Il dominio su cui la potenza è invertibile dipende dall'esponente: le potenze pari vanno ristrette a $x \geq 0$, quelle dispari sono invertibili su tutto $\mathbb{R}$

Potenze e loro inverse (1/2)

Dato $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$, abbiamo :

$$f : \begin{cases} y = x^\alpha \\ x > 0 \end{cases}$$

$$f^{-1} : \begin{cases} x = y^{\frac{1}{\alpha}} \\ y > 0 \end{cases}$$

Se $\alpha > 0$ abbiamo:

$$f : \begin{cases} y = x^\alpha \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$f^{-1} : \begin{cases} x = y^{\frac{1}{\alpha}} \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Potenze e loro inverse (2/2)

Se $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}_+$ dispari e coprimi, abbiamo:

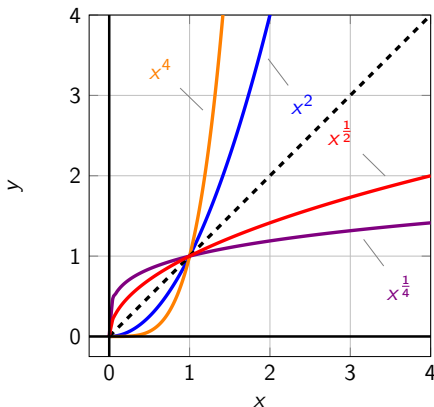
$$f : \begin{cases} y = x^{\frac{m}{n}} \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad f^{-1} : \begin{cases} x = y^{\frac{n}{m}} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Potenze pari

Le potenze pari:

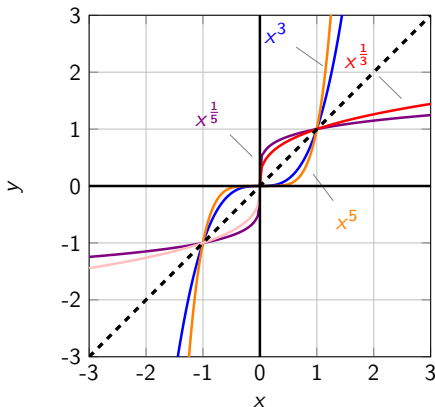
$$x^{2n} \quad \text{con } n = 1, 2, \dots$$

non sono invertibili su tutta la retta, ma solo sulla semiretta $x \geq 0$.



Potenze dispari

Le **potenze dispari** x^{2n+1} (con $n = 1, 2, \dots$) e le **potenze a esponente razionale** $x^{\frac{m}{n}}$ (con n, m interi positivi e dispari), essendo monotone strettamente crescenti, sono invertibili da $-\infty$ a $+\infty$.



Potenze inverse:

- ▶ L'inversa di $y = x^\alpha$ ($x > 0$) è $x = y^{\frac{1}{\alpha}}$; se $\alpha > 0$ vale anche su $[0, +\infty)$
- ▶ Potenze pari x^{2n} : invertibili solo su $x \geq 0$ (inverse: $x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{4}}, \dots$)
- ▶ Potenze dispari x^{2n+1} ed esponenti razionali con m, n dispari: strettamente crescenti, invertibili su tutto $\mathbb{R}$ (inverse: $x^{\frac{1}{3}}, x^{\frac{1}{5}}, \dots$)

Le funzioni trigonometriche inverse



Introduzione: Le funzioni trigonometriche inverse

- ▶ Le funzioni trigonometriche sono periodiche e quindi **non invertibili**: per invertirle le restringiamo a intervalli in cui sono strettamente monotone
- ▶ Otteniamo così **arcoseno**, **arcocoseno** e **arcotangente**, con i loro grafici
- ▶ Queste funzioni servono a scrivere le soluzioni di equazioni e disequazioni trigonometriche con angoli non notevoli

Le funzioni trigonometriche non sono invertibili

- ▶ Essendo periodiche, le funzioni trigonometriche non possono essere invertibili. Infatti, per esempio, l'equazione

$$y = \sin x$$

ha infinite soluzioni se $-1 \leq y \leq 1$ (l'uscita y corrisponde a infiniti ingressi) oppure non ha soluzioni reali se $|y| > 1$.

- ▶ Per parlare di funzioni inverse di seno, coseno e tangente occorrerà restringersi a intervalli nei quali queste funzioni siano strettamente monotone e perciò invertibili.

- Un intervallo nel quale la funzione seno è invertibile è $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Definizione 3: di arcoseno

*La funzione inversa del seno nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ è l'**arcoseno**:*

$$f : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad f : y \mapsto \arcsin y$$

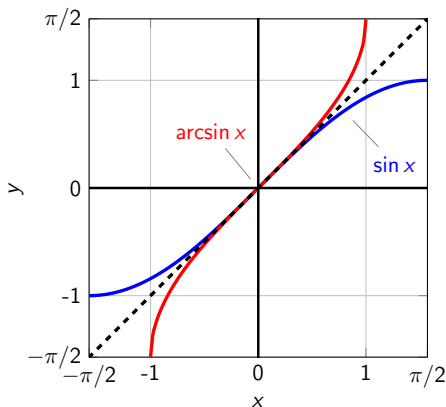
Abbiamo:

$$f : \begin{cases} y = \sin x \\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

$$f^{-1} : \begin{cases} x = \arcsin y \\ y \in [-1, 1] \end{cases}$$

Grafico dell'arcoseno

Il grafico dell'arcoseno si ottiene dall'arco di senoide del seno ristretto all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (strettamente monotono), per simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$:



- Un intervallo nel quale la funzione coseno è invertibile è $[0, \pi]$.

Definizione 4: di arcocoseno

*La funzione inversa del coseno nell'intervallo $[0, \pi]$ è l'**arcocoseno**:*

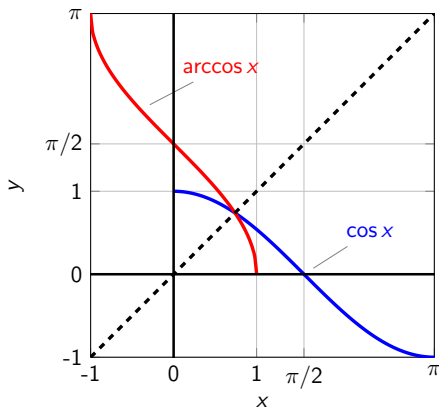
$$f : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi], \quad f : y \mapsto \arccos y$$

Abbiamo:

$$f : \begin{cases} y = \cos x \\ x \in [0, \pi] \end{cases} \qquad f^{-1} : \begin{cases} x = \arccos y \\ y \in [-1, 1] \end{cases}$$

Grafico dell'arcocoseno

Il grafico dell'arcocoseno si ottiene dall'arco di sinusoidale del coseno ristretto all'intervallo $[0, \pi]$ (strettamente monotono), per simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$:



Arcotangente

- Osserviamo che nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ la tangente è strettamente monotona e quindi invertibile. La funzione inversa si chiama arcotangente ($\arctan$), ed è definita in $\mathbb{R}$.

Definizione 5: di arcotangente

*La funzione inversa della tangente nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ è l'**arcotangente**:*

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad f : y \mapsto \arctan y$$

Arcotangente

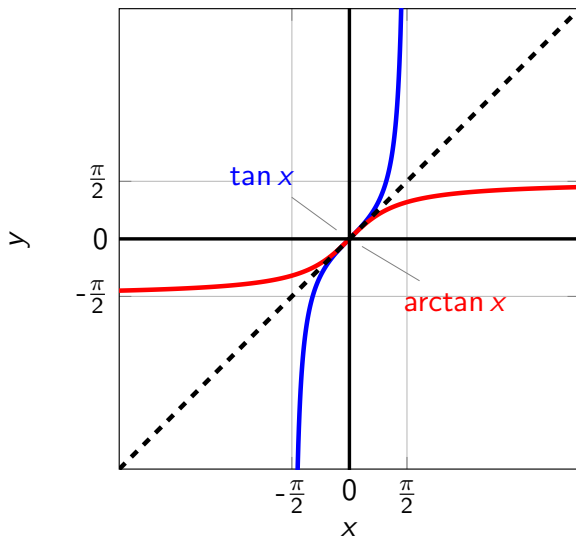
Abbiamo:

$$f : \begin{cases} y = \tan x \\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$f^{-1} : \begin{cases} x = \arctan y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- Il grafico dell'arcotangente si ottiene da quello della tangente ristretto all'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (strettamente monotono), per simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$.

Grafico dell'arcotangente



Equazioni e disequazioni trigonometriche

- Per mezzo delle funzioni trigonometriche inverse, possiamo esprimere le soluzioni di un'**equazione o disequazione trigonometrica**, quando questa coinvolge angoli non notevoli.

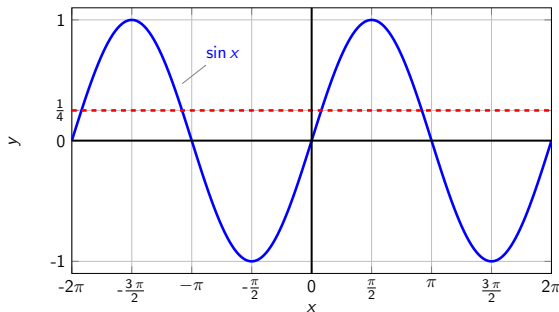
Esempio (1/3)

Le soluzioni di:

$$\sin x = \frac{1}{4}$$

sono:

$$(i) \ x = \arcsin \frac{1}{4} + 2k\pi; \quad (ii) \ x = \pi - \arcsin \frac{1}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$



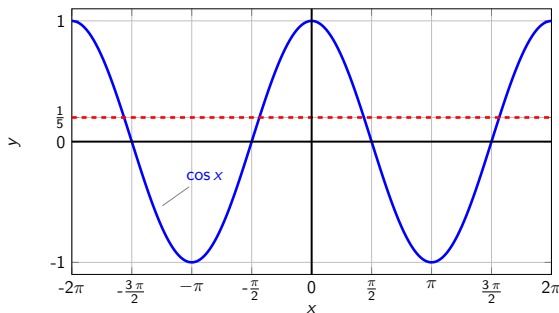
Esempio (2/3)

Le soluzioni di:

$$\cos x < \frac{1}{5}$$

sono:

$$\arccos \frac{1}{5} + 2k\pi < x < 2\pi - \arccos \frac{1}{5} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$



Esempio (3/3)

Le soluzioni di:

$$\tan x \geq 3$$

sono:

$$\arctan 3 + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Funzioni trigonometriche inverse:

- ▶ $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, inversa del seno ristretto a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- ▶ $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, inversa del coseno ristretto a $[0, \pi]$
- ▶ $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, inversa della tangente ristretta a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Applicazione:

- ▶ Permettono di scrivere le soluzioni di equazioni e disequazioni trigonometriche con angoli non notevoli

Le funzioni iperboliche inverse

Introduzione: Le funzioni iperboliche inverse

- ▶ In questa sezione invertiamo il **seno iperbolico** e il **coseno iperbolico** (quest'ultimo ristretto a $x \geq 0$)
- ▶ A differenza delle funzioni trigonometriche, qui riusciamo a trovare l'**espressione analitica** dell'inversa, risolvendo un'equazione di secondo grado in e^x
- ▶ Otteniamo il **settore seno iperbolico** e il **settore coseno iperbolico**, espressi tramite il logaritmo

Settore seno iperbolico (1/3)

- Consideriamo la funzione **seno iperbolico**:

$$y = \operatorname{Sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

È definita e strettamente crescente in tutto $\mathbb{R}$, perciò è invertibile.

- Per risolvere l'equazione rispetto alla x , moltiplicando ambo i membri per e^x otteniamo:

$$\begin{aligned} 0 &= e^x y - e^x \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= 2 e^x y - (e^x e^x - \underbrace{e^x e^{-x}}_{=e^{x-x}=e^0}) \\ &= 2 y e^x - e^{2x} + 1 \\ &= e^{2x} - 2 y e^x - 1 \end{aligned}$$

Settore seno iperbolico (2/3)

- Questa è un'equazione di secondo grado nell'incognita e^x .
Ponendo $t = e^x$ otteniamo

$$0 = t^2 - 2 y t - 1$$

Ricaviamo:

$$t = y \pm \sqrt{y^2 + 1} \quad \text{e risostituendo} \quad e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

poiché $e^x > 0$, la soluzione col segno meno va scartata.

Rimane dunque:

$$e^x = \underbrace{y + \sqrt{y^2 + 1}}_{>0, \forall y \in \mathbb{R}} \quad \text{e quindi} \quad x = \log \left(y + \sqrt{y^2 + 1} \right)$$

Settore seno iperbolico (3/3)

- Questa è l'espressione analitica della funzione inversa di $\text{Sh } x$, che prende il nome di **settore seno iperbolico**, e si indica anche con SettSh . È definita per ogni y reale.

Definizione 6: di settore seno iperbolico

*La funzione inversa del seno iperbolico è il **settore seno iperbolico**:*

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : y \mapsto \text{SettSh } y$$

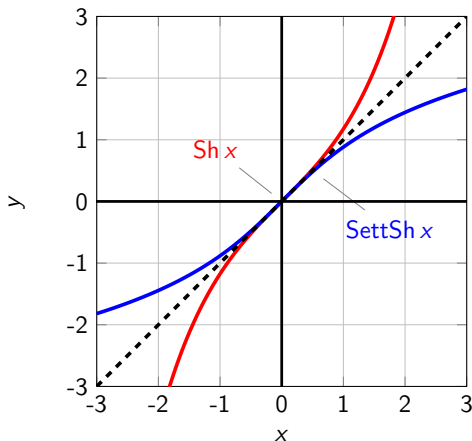
Abbiamo:

$$f : \begin{cases} y = \text{Sh } x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$f^{-1} : \begin{cases} x = \text{SettSh } y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Grafico del settore seno iperbolico

Il grafico del settore seno iperbolico si ottiene da quello del seno iperbolico su $\mathbb{R}$ (strettamente monotono), per simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$:



Settore coseno iperbolico (1/3)

- Consideriamo la funzione **coseno iperbolico**:

$$y = \operatorname{Ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

È definita in tutto $\mathbb{R}$, strettamente crescente per $x \geq 0$, decrescente per $x \leq 0$. Perciò non è invertibile su tutto $\mathbb{R}$.

- La sua restrizione a $x \geq 0$ però lo è. Vogliamo determinare l'espressione analitica della funzione inversa di questa restrizione.
- Procedendo come prima, otteniamo:

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

Settore coseno iperbolico (2/3)

- ▶ Questa volta entrambi i numeri $y \pm \sqrt{y^2 - 1}$ sono positivi; ricordiamo però che stiamo ragionando solo per $x \geq 0$, che equivale a scegliere il segno più. Pertanto:

$$x = \log \left(y + \sqrt{y^2 - 1} \right)$$

Questa è l'espressione analitica della funzione inversa di $\text{Ch } x$, che prende il nome di settore coseno iperbolico, e si indica anche con SettCh . Si noti che è definita per $y \geq 1$.

Settore coseno iperbolico (3/3)

Definizione 7: di settore coseno iperbolico

*La funzione inversa del coseno iperbolico nell'intervallo $[0, +\infty)$ è il **settore coseno iperbolico**:*

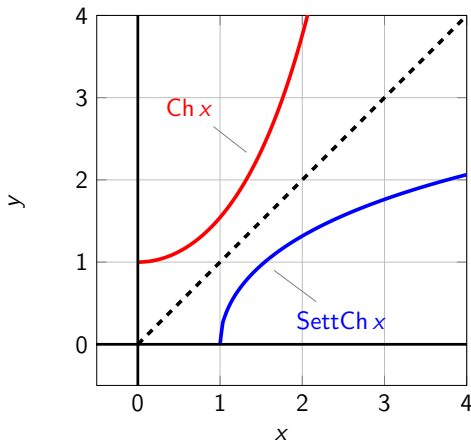
$$f : [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty), \quad f : y \mapsto \text{SettCh } y$$

Abbiamo:

$$f : \begin{cases} y = \text{Ch } x \\ x \in [0, +\infty) \end{cases} \qquad f^{-1} : \begin{cases} x = \text{SettCh } y \\ y \in [1, +\infty) \end{cases}$$

Grafico del settore coseno iperbolico

Il grafico del settore coseno iperbolico si ottiene da quello del coseno iperbolico su $[0, +\infty)$ (strettamente monotono), per simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$.



Esempio (1/2)

- L'equazione:

$$\operatorname{Sh} x = 2$$

ha l'unica soluzione:

$$x = \operatorname{SettSh} 2 = \log(2 + \sqrt{5})$$

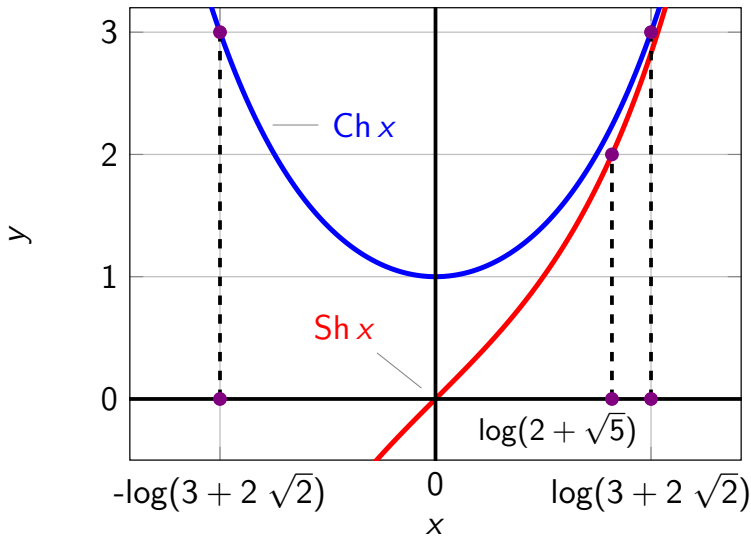
- L'equazione:

$$\operatorname{Ch} x = 3$$

ha due soluzioni:

$$x = \pm \operatorname{SettCh} 3 = \pm \log(3 + 2\sqrt{2})$$

Esempio (2/2)



Funzioni iperboliche inverse:

- ▶ Sh è strettamente crescente su $\mathbb{R}$: la sua inversa è il settore seno iperbolico $\text{SettSh } y = \log \left(y + \sqrt{y^2 + 1} \right)$, definito per ogni $y \in \mathbb{R}$
- ▶ Ch è invertibile solo se ristretto a $x \geq 0$: la sua inversa è il settore coseno iperbolico $\text{SettCh } y = \log \left(y + \sqrt{y^2 - 1} \right)$, definito per $y \geq 1$
- ▶ Le espressioni si ricavano risolvendo un'equazione di secondo grado in $t = e^x$

Riepilogo (1/2)

Funzioni invertibili:

- ▶ f è invertibile se è iniettiva; l'inversa f^{-1} è definita su $f(D)$
- ▶ Strettamente monotona $\Rightarrow$ invertibile; pari o periodica $\Rightarrow$ non invertibile
- ▶ Il grafico di f^{-1} è il simmetrico di quello di f rispetto alla bisettrice $y = x$
- ▶ L'espressione di f^{-1} si ottiene risolvendo $f(x) = y$ rispetto a x (non sempre è possibile)

Riepilogo (2/2)

Inverse delle funzioni elementari:

- ▶ Potenze: l'inversa di x^α è $y^{\frac{1}{\alpha}}$ (potenze pari solo per $x \geq 0$)
- ▶ Esponenziale e logaritmo: $y = a^x \leftrightarrow x = \log_a y$
- ▶ Trigonometriche (su intervalli di monotonia): arcsin, arccos, arctan
- ▶ Iperboliche: $\text{SettSh } y = \log \left(y + \sqrt{y^2 + 1} \right),$
 $\text{SettCh } y = \log \left(y + \sqrt{y^2 - 1} \right)$