

Funzioni composte

Indice

Funzioni composte



Funzioni composte

Introduzione: Funzioni composte

- ▶ In questa sezione introduciamo la **composizione** di due funzioni: si applica prima una funzione e poi un'altra al risultato
- ▶ Vedremo quando la composizione è ben definita e alcuni esempi con i relativi grafici
- ▶ Studieremo le proprietà della composizione: **non è commutativa**, ma è **associativa**; infine introdurremo le funzioni **iterate**

Definizione 1: di funzione composta

Date due funzioni:

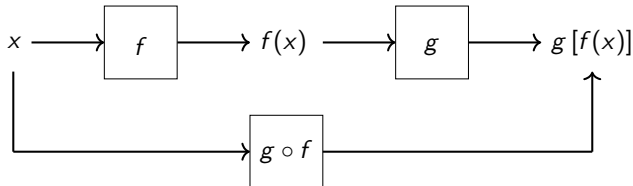
$$f : E \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad g : F \rightarrow \mathbb{R},$$

*se $f(E) \subseteq F$ (cioè se per ogni $x \in E$ si ha che $f(x) \in F$) si può definire la funzione $h : E \rightarrow \mathbb{R}$ **composta** di f e g (nell'ordine), denotata col simbolo $g \circ f$, mediante la formula*

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

Schema di composizione

Lo schema di composizione è il seguente:

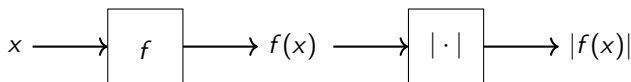


Esempio

La funzione $x \mapsto |f(x)|$ è in realtà “composta” di due funzioni:

1. dato x , si calcola $f(x)$
2. calcolato $f(x)$, si calcola $|f(x)|$

Si tratta di operare in serie con due scatole nere, la prima corrispondente a f , la seconda al suo valore assoluto, secondo lo schema seguente:



La composizione non è commutativa

- Può accadere che risultino ben definite sia la composizione $(g \circ f)$ che $(f \circ g)$ ma in generale

$$(f \circ g) \neq (g \circ f)$$

In altre parole **non vale la proprietà commutativa**.

- Vediamo ora due esempi in cui confrontiamo $g \circ f$ e $f \circ g$

Esempio (1/3)

Consideriamo le funzioni:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto x^2 \quad \text{e} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g : x \mapsto \cos x$$

ovvero $f(x) = x^2$ e $g(x) = \cos x$.

1. Poiché g è definita su tutto $\mathbb{R}$, $h = g \circ f$ è ben definita su $\mathbb{R}$ e vale la formula

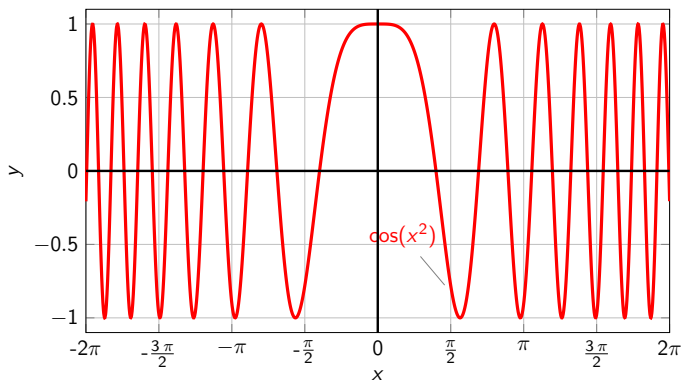
$$h(x) = (g \circ f)(x) = g[f(x)] = \cos(x^2)$$

2. Poiché f è definita su tutto $\mathbb{R}$, $k = f \circ g$ è ben definita su $\mathbb{R}$ e vale la formula

$$k(x) = (f \circ g)(x) = f[g(x)] = \cos^2 x$$

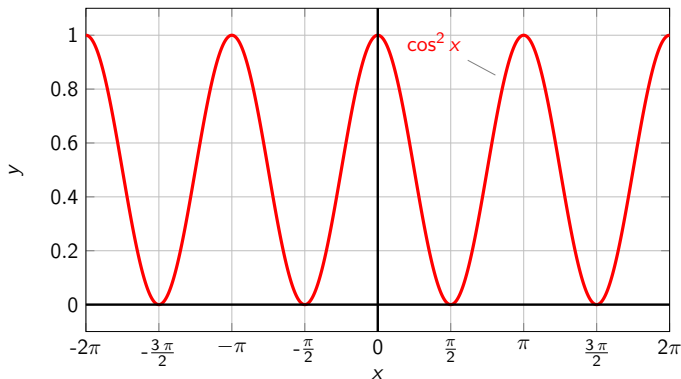
Esempio (2/3)

Grafico di $h(x) = (g \circ f)(x) = \cos(x^2)$:



Esempio (3/3)

Grafico di $k(x) = (f \circ g)(x) = \cos^2 x$:



Esempio (1/3)

Consideriamo le funzioni:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto e^x \qquad g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g : x \mapsto \sqrt{x}$$

ovvero $f(x) = e^x$ e $g(x) = \sqrt{x}$.

1. Poiché g è definita su $[0, +\infty)$ e $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, $h = g \circ f$ è ben definita su $\mathbb{R}$ e vale la formula

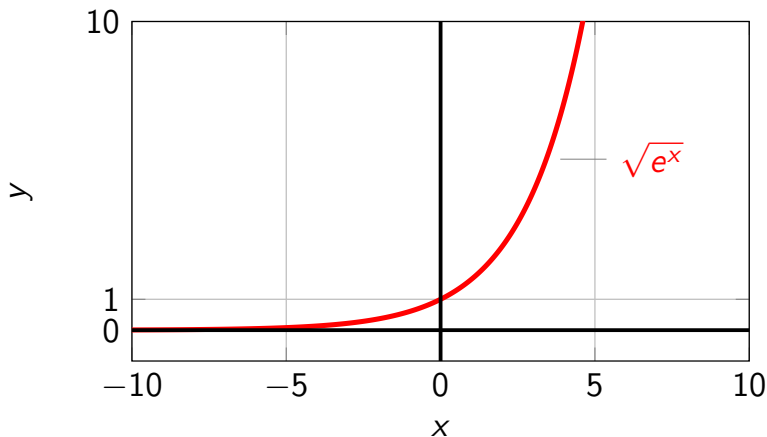
$$h(x) = (g \circ f)(x) = g[f(x)] = \sqrt{e^x}$$

2. Poiché g è definita solo su $[0, +\infty)$, $k = f \circ g$ è ben definita solo su $\mathbb{R}_+$ e vale la formula

$$k(x) = (f \circ g)(x) = f[g(x)] = e^{\sqrt{x}}$$

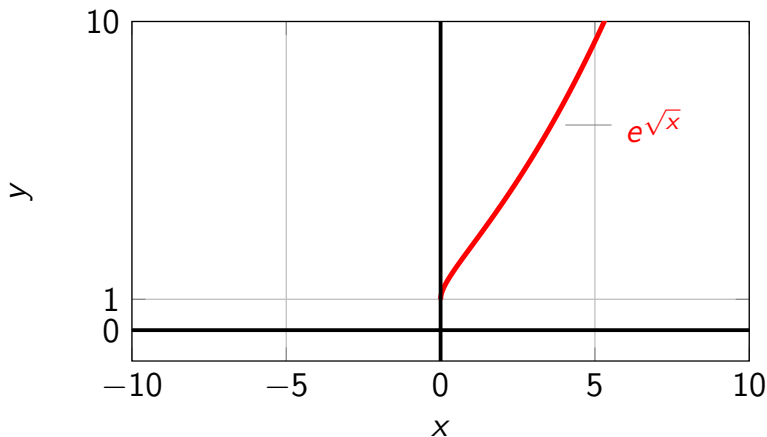
Esempio (2/3)

Grafico di $h(x) = (g \circ f)(x) = \sqrt{e^x}$:



Esempio (3/3)

Grafico di $k(x) = (f \circ g)(x) = e^{\sqrt{x}}$:



Proprietà associativa

- L'operazione di composizione si può estendere a tre o più fattori. Si verifica che se la composizione $(f \circ g) \circ r$ esiste, allora esiste anche $f \circ (g \circ r)$ e sono uguali

$$(f \circ g) \circ r = f \circ (g \circ r)$$

In altre parole **vale la proprietà associativa.**

Funzioni iterate

- Se una funzione $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ è tale che $f(D) \subseteq D$, allora si può comporre con sé stessa

$$f^2 = f \circ f \quad \text{ossia} \quad f^2(x) = f[f(x)]$$

f^2 viene detta **iterata seconda** di f . Analogamente, f^n si dice **funzione iterata n -esima** di f .

Funzioni composte:

- ▶ Se $f(E) \subseteq F$, la composta $g \circ f$ è definita da $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$: si applica prima f , poi g
- ▶ Il dominio va controllato: ad esempio $e^{\sqrt{x}}$ è definita solo per $x \geq 0$, mentre $\sqrt{e^x}$ su tutto $\mathbb{R}$

Proprietà:

- ▶ **Non commutativa**: in generale $f \circ g \neq g \circ f$ (es. $\cos(x^2) \neq \cos^2 x$)
- ▶ **Associativa**: $(f \circ g) \circ r = f \circ (g \circ r)$
- ▶ Se $f(D) \subseteq D$ si definiscono le **iterate** $f^2 = f \circ f, \dots, f^n$