

Funzioni iperboliche



Indice

Funzioni iperboliche

Principali formule iperboliche



Funzioni iperboliche

Introduzione: Funzioni iperboliche

- ▶ In questa sezione definiamo il **seno iperbolico**, il **coseno iperbolico** e la **tangente iperbolica**, costruiti a partire dalla funzione esponenziale e^x
- ▶ Ne studiamo la parità, il segno, la monotonia e i grafici
- ▶ Queste funzioni compaiono spesso nel calcolo (limiti, derivate, integrali) e hanno proprietà molto simili a quelle delle funzioni trigonometriche

Seno e coseno iperbolico

Definizione 1: funzione seno iperbolico e funzione coseno iperbolico

Le funzioni iperboliche:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto \operatorname{Sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto \operatorname{Ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

*si chiamano **seno iperbolico** e **coseno iperbolico**.*

Parità e relazioni fondamentali

- ▶ Il seno iperbolico è una funzione **dispari** mentre il coseno iperbolico è una funzione **pari**. Abbiamo quindi:

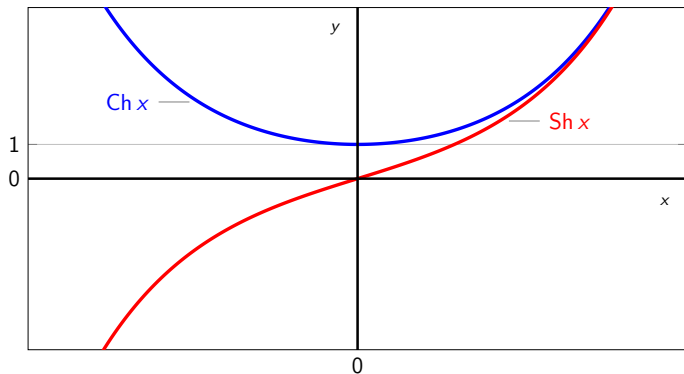
$$\operatorname{Sh}(-x) = -\operatorname{Sh} x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \operatorname{Ch}(-x) = \operatorname{Ch} x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- ▶ Abbiamo le relazioni fondamentali:

$$\operatorname{Ch}^2 x - \operatorname{Sh}^2 x = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{Sh} x \leq \frac{e^x}{2} \leq \operatorname{Ch} x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Grafici di $\text{Sh } x$ e $\text{Ch } x$



Segno e monotonia

- Per la positività e monotonicità della funzione seno iperbolico abbiamo:

$$\operatorname{Sh} x = 0 \iff x = 0 \quad \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{Sh} x > 0 & \text{se } x > 0 \\ \operatorname{Sh} x < 0 & \text{se } x < 0 \end{array} \right.$$

$$f \text{ è crescente} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Per la positività e monotonicità della funzione coseno iperbolico abbiamo:

$$\operatorname{Ch} x > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

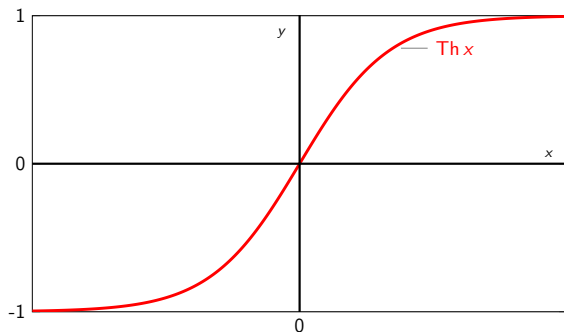
$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{se } x < 0 & f \text{ è decrescente} \\ \text{se } x > 0 & f \text{ è crescente} \end{array} \right.$$

Tangente iperbolica

La funzione iperbolica:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto \operatorname{Th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

si chiama **tangente iperbolica** ed è una funzione dispari.



Funzioni iperboliche:

- ▶ $\text{Sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ è **dispari**, crescente su $\mathbb{R}$ e si annulla solo in $x = 0$
- ▶ $\text{Ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ è **pari**, sempre positiva, decrescente per $x < 0$ e crescente per $x > 0$
- ▶ $\text{Ch}^2 x - \text{Sh}^2 x = 1$ e $\text{Sh } x \leq \frac{e^x}{2} \leq \text{Ch } x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
- ▶ $\text{Th } x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ è **dispari**, con valori in $(-1, 1)$

Principali formule iperboliche



Introduzione: Principali formule iperboliche

- ▶ In questa sezione raccogliamo le **formule di addizione** e di **duplicazione** per le funzioni iperboliche
- ▶ Sono l'analogo delle formule trigonometriche (con alcune differenze di segno) e si ricavano direttamente dalle definizioni tramite l'esponenziale
- ▶ Sono utili per semplificare espressioni e per i calcoli con limiti, derivate e integrali

Addizione

$$\operatorname{Sh}(x_1 + x_2) = \operatorname{Sh} x_1 \operatorname{Ch} x_2 + \operatorname{Sh} x_2 \operatorname{Ch} x_1$$

$$\operatorname{Ch}(x_1 + x_2) = \operatorname{Ch} x_1 \operatorname{Ch} x_2 + \operatorname{Sh} x_1 \operatorname{Sh} x_2$$

$$\operatorname{Th}(x_1 + x_2) = \frac{\operatorname{Th} x_1 + \operatorname{Th} x_2}{1 + \operatorname{Th} x_1 \operatorname{Th} x_2}$$

Duplicazione

$$\operatorname{Sh}(2x) = 2 \operatorname{Sh} x \operatorname{Ch} x$$

$$\operatorname{Ch}(2x) = \operatorname{Ch}^2 x + \operatorname{Sh}^2 x$$

Formule iperboliche:

- ▶ Addizione: $\text{Sh}(x_1 + x_2) = \text{Sh } x_1 \text{ Ch } x_2 + \text{Sh } x_2 \text{ Ch } x_1$,
 $\text{Ch}(x_1 + x_2) = \text{Ch } x_1 \text{ Ch } x_2 + \text{Sh } x_1 \text{ Sh } x_2$
- ▶ $\text{Th}(x_1 + x_2) = \frac{\text{Th } x_1 + \text{Th } x_2}{1 + \text{Th } x_1 \text{ Th } x_2}$
- ▶ Duplicazione: $\text{Sh}(2x) = 2 \text{ Sh } x \text{ Ch } x$, $\text{Ch}(2x) = \text{Ch}^2 x + \text{Sh}^2 x$

Funzioni iperboliche:

- ▶ Seno, coseno e tangente iperbolica sono definiti tramite l'esponenziale e^x
- ▶ Sh e Th sono dispari e crescenti, Ch è pari e positiva
- ▶ Relazione fondamentale: $\text{Ch}^2 x - \text{Sh}^2 x = 1$

Formule:

- ▶ Formule di addizione e duplicazione, analoghe a quelle trigonometriche ma con segni diversi (ad esempio $\text{Ch}(2x) = \text{Ch}^2 x + \text{Sh}^2 x$)