

Funzioni parte intera, mantissa e funzioni definite a tratti

Indice

Funzioni parte intera e mantissa

Funzioni definite a tratti

Funzione valore assoluto

Funzioni parte intera e mantissa

Introduzione: Funzioni parte intera e mantissa

- ▶ Due funzioni che tipicamente si incontrano nella scrittura di *algoritmi* sono la funzione parte intera e la funzione mantissa (o parte decimale)
- ▶ In questa sezione le definiamo, insieme alla funzione **parte intera superiore**
- ▶ Ne disegniamo i grafici: sono funzioni “a gradini”, costanti a tratti, e la mantissa è periodica

Parte intera e parte intera superiore

Definizione 1: di funzione parte intera

La funzione parte intera è:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto [x] \quad (\text{oppure } x \mapsto \lfloor x \rfloor)$$

Definizione 2: di funzione parte intera superiore

La funzione parte intera superiore è:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto \lceil x \rceil$$

Definizione 3: di funzione mantissa

La funzione mantissa è:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1), x \mapsto (x)$$

Monotonia di parte intera e parte intera superiore

Le funzioni $f(x) = \lfloor x \rfloor$ e $f(x) = \lceil x \rceil$ sono **non decrescenti** in $\mathbb{R}$, ma **non** sono crescenti.

- ▶ **Sono non decrescenti:** siano $x_1 < x_2$. Allora $\lfloor x_1 \rfloor \leq x_1 < x_2$ e, poiché $\lfloor x_2 \rfloor$ è il *più grande* intero minore o uguale a x_2 , si ha $\lfloor x_1 \rfloor \leq \lfloor x_2 \rfloor$. Analogamente $\lceil x_2 \rceil \geq x_2 > x_1$ e, poiché $\lceil x_1 \rceil$ è il *più piccolo* intero maggiore o uguale a x_1 , si ha $\lceil x_1 \rceil \leq \lceil x_2 \rceil$
- ▶ **Non sono crescenti:** sono *costanti* fra due interi consecutivi, per esempio

$$\left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor = 0 \quad \text{e} \quad \left\lceil \frac{1}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{2}{3} \right\rceil = 1$$

Grafico di $f(x) = \lceil x \rceil$

Grafici delle funzioni $f(x) = \lceil x \rceil$ e $f(x) = \lfloor x \rfloor$ nell'intervallo $[-4, 4]$.

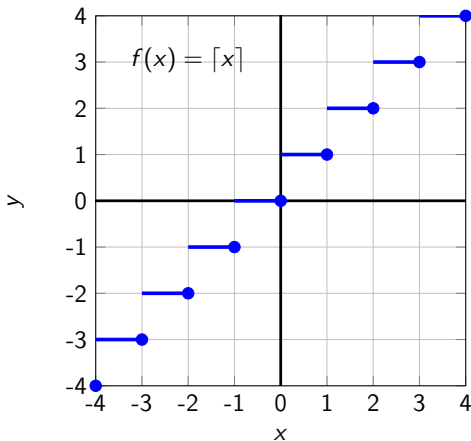


Grafico di $f(x) = \lfloor x \rfloor$

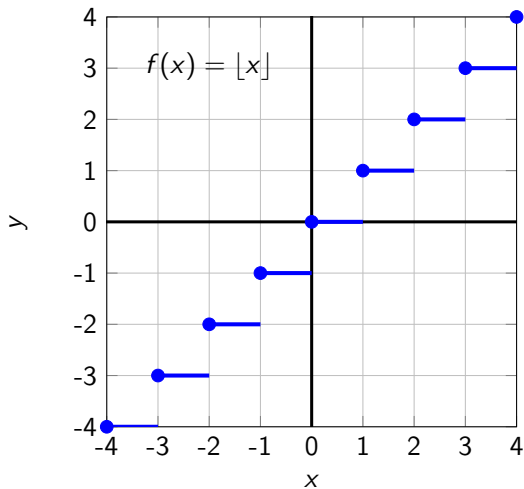
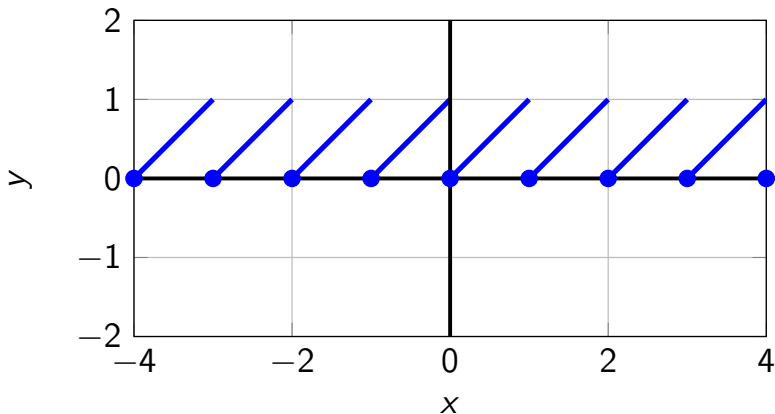


Grafico della mantissa

Si noti che la mantissa è una funzione periodica di periodo 1.



Parte intera e mantissa:

- ▶ Parte intera $\lfloor x \rfloor$ e parte intera superiore $\lceil x \rceil$: funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{Z}$, **non decrescenti** (ma non crescenti), costanti a tratti (grafici “a gradini”)
- ▶ Mantissa $\{x\}$: funzione da $\mathbb{R}$ in $[0, 1)$, periodica di periodo 1
- ▶ Sono funzioni tipiche della scrittura di algoritmi

Funzioni definite a tratti



Introduzione: Funzioni definite a tratti

- ▶ A partire dalle funzioni elementari se ne possono costruire di nuove usando **definizioni analitiche diverse su intervalli diversi**
- ▶ In questa sezione diamo la definizione di funzione definita a tratti e ne vediamo un esempio con il relativo grafico
- ▶ Le funzioni a tratti sono molto usate per modellare situazioni in cui la “regola” cambia a seconda dei valori della variabile

Definizione 4: di funzione definita a tratti

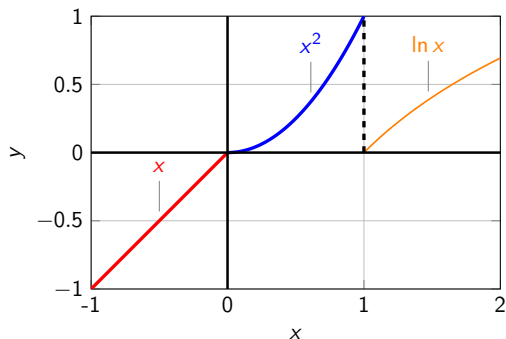
*Una funzione f il cui valore $f(x)$ è calcolato mediante “istruzioni” diverse a seconda dell'intervallo in cui cade la x si chiama **funzione definita a tratti**.*

Esempio

Consideriamo ad esempio

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{se } x > 1, \\ x^2 & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

il suo grafico è:



Funzioni a tratti e algoritmi

- Dal punto di vista *logico / algoritmico*, si può dire che una funzione di questo tipo ha la particolarità di essere costruita utilizzando non solo le funzioni matematiche ma anche la **funzione logica** “se ... allora”.

Funzioni definite a tratti:

- ▶ Il valore $f(x)$ è calcolato con “istruzioni” diverse a seconda dell’intervallo in cui cade x
- ▶ Si costruiscono a partire dalle funzioni elementari
- ▶ Usano, oltre alle funzioni matematiche, la funzione logica “se ... allora”

Funzione valore assoluto



Introduzione: Funzione valore assoluto

- ▶ Il valore assoluto di un numero reale è stato definito nella Parte 2; qui lo guardiamo come **funzione**
- ▶ È l'esempio più importante di funzione definita a tratti, e lo useremo continuamente nello studio dei limiti
- ▶ Ne studiamo segno, monotonia, limitatezza, immagine e simmetria

Funzione valore assoluto

Nel capitolo “**Fattoriali, coefficienti binomiali e disuguaglianza triangolare**” della Parte 2 il **valore assoluto** di $a \in \mathbb{R}$ è stato definito da

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Definizione 5: di funzione valore assoluto

La funzione valore assoluto è:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$$

Segno e simmetria

- La funzione valore assoluto è *non negativa* in $\mathbb{R}$ ed è *positiva* in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$|x| \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad |x| = 0 \iff x = 0$$

Infatti, se $x \geq 0$ allora $|x| = x \geq 0$, e se $x < 0$ allora $|x| = -x > 0$

- È una funzione *pari*, dato che $|-x| = |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$: il grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate

Monotonia

La funzione valore assoluto è *decescente* in $(-\infty, 0]$ ed è *crescente* in $[0, +\infty)$, ma **non** è monotona in $\mathbb{R}$.

- ▶ Se $x_1 < x_2 \leq 0$, allora $|x_1| = -x_1 > -x_2 = |x_2|$
- ▶ Se $0 \leq x_1 < x_2$, allora $|x_1| = x_1 < x_2 = |x_2|$
- ▶ Non è monotona in $\mathbb{R}$ perché $f(-1) = 1 > f(0) = 0$ e $f(0) = 0 < f(1) = 1$



Limitatezza e immagine

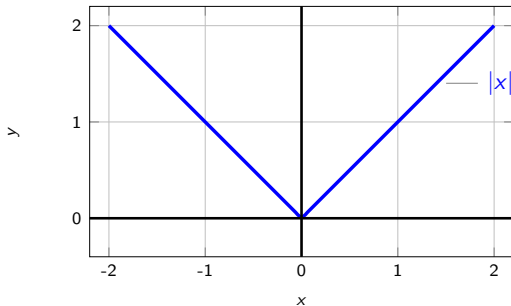
- ▶ La funzione è *limitata inferiormente* in $\mathbb{R}$: il numero 0 è un minorante dei suoi valori
- ▶ **Non** è limitata superiormente: per ogni $M \in \mathbb{R}$ con $M > 0$ si ha $f(M+1) = M+1 > M$
- ▶ La sua immagine è

$$f(\mathbb{R}) = [0, +\infty),$$

perché $|x| \geq 0$ per ogni x e, viceversa, ogni $y \geq 0$ è l'immagine di y stesso: $|y| = y$

Grafico di $f(x) = |x|$

Il grafico è formato dalle due semirette $y = -x$ per $x \leq 0$ e $y = x$ per $x \geq 0$.



Funzione valore assoluto:

- ▶ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$: funzione definita a tratti
- ▶ **Segno**: non negativa in $\mathbb{R}$, positiva in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- ▶ **Monotonia**: decrescente in $(-\infty, 0]$, crescente in $[0, +\infty)$, non monotona in $\mathbb{R}$
- ▶ **Limitatezza e immagine**: limitata inferiormente, non superiormente, $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$
- ▶ **Simmetria**: è una funzione pari

Riepilogo

- ▶ **Parte intera** $\lfloor x \rfloor$ e **parte intera superiore** $\lceil x \rceil$: funzioni a gradini, **non decrescenti**, a valori in $\mathbb{Z}$
- ▶ **Mantissa** $\{x\}$: a valori in $[0, 1)$, periodica di periodo 1
- ▶ **Funzioni definite a tratti**: definizioni analitiche diverse su intervalli diversi, costruite con la logica “se ... allora”
- ▶ **Funzione valore assoluto** $x \mapsto |x|$: l'esempio più importante di funzione definita a tratti, decrescente in $(-\infty, 0]$ e crescente in $[0, +\infty)$