

# Funzioni trigonometriche



# Indice

Funzioni trigonometriche

Valori delle funzioni trigonometriche

Principali formule trigonometriche

Un'applicazione: i fenomeni vibratori

Fenomeni vibratori

Effetti di smorzamento o di amplificazione

# Funzioni trigonometriche

# Introduzione: Funzioni trigonometriche

- ▶ In questa sezione introduciamo le funzioni **seno** e **coseno** e da esse **tangente**, **cotangente**, **secante** e **cosecante**
- ▶ Ne studiamo simmetria, periodicità, segno e monotonia, aiutandoci con i grafici e la circonferenza goniometrica
- ▶ Le funzioni trigonometriche sono lo strumento naturale per descrivere fenomeni periodici e oscillazioni

## Definizione 1: funzione seno e funzione coseno

*Le funzioni trigonometriche:*

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto \sin x$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto \cos x$$

*si chiamano **seno** e **coseno**.*

# Simmetria e periodicità

- Il seno è una funzione **dispari** mentre il coseno è una funzione **pari**. Abbiamo quindi:

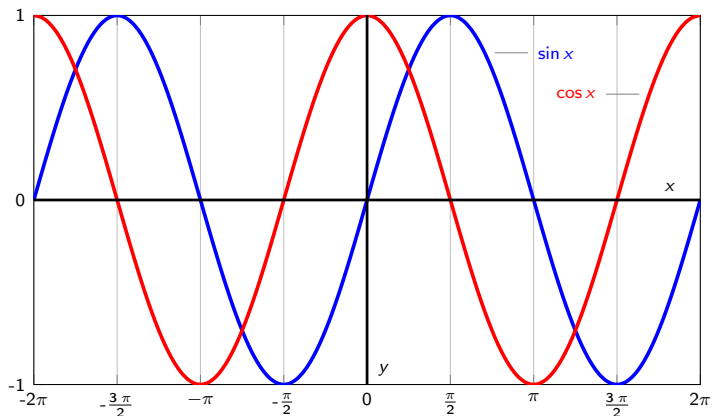
$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Il seno e il coseno sono funzioni periodiche di periodo  $T = 2\pi$  e abbiamo la relazione fondamentale

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

# Grafici di seno e coseno



Abbiamo

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

# Segno e monotonia del seno

- Per la positività e monotonicità della funzione seno abbiamo:

$$\sin x = 0 \iff x = k \pi, \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \sin x > 0 & \text{se } x \in (2k\pi, 2k\pi + \pi), \forall k \in \mathbb{Z} \\ \sin x < 0 & \text{se } x \in (2k\pi - \pi, 2k\pi), \forall k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{se } x \in (2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}), \forall k \in \mathbb{Z} & f \text{ è crescente} \\ \text{se } x \in (2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}), \forall k \in \mathbb{Z} & f \text{ è decrescente} \end{cases}$$

# Segno e monotonia del coseno

- Per la positività e monotonicità della funzione coseno abbiamo:

$$\cos x = 0 \iff x = k\pi - \frac{\pi}{2}, \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \cos x > 0 & \text{se } x \in (2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}), \forall k \in \mathbb{Z} \\ \cos x < 0 & \text{se } x \in (2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}), \forall k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{se } x \in (2k\pi + \pi, 2k\pi + 2\pi), \forall k \in \mathbb{Z} & f \text{ è crescente} \\ \text{se } x \in (2k\pi, 2k\pi + \pi), \forall k \in \mathbb{Z} & f \text{ è decrescente} \end{cases}$$

# Tangente e cotangente

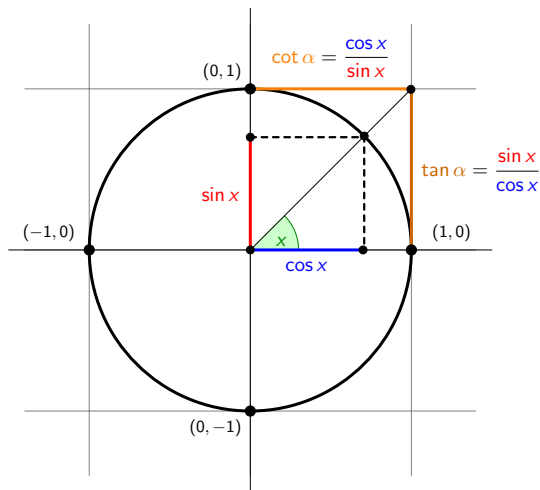
Le funzioni trigonometriche:

$$f : \mathbb{R} \setminus \left\{ k\pi - \frac{\pi}{2}, \forall k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

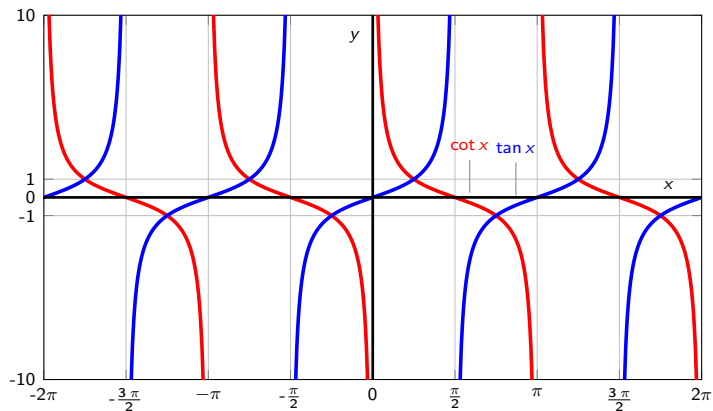
$$f : \mathbb{R} \setminus \{ k\pi, \forall k \in \mathbb{Z} \} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

si chiamano **tangente** e **cotangente** e sono entrambe dispari e periodiche di periodo  $T = \pi$ .

# La circonferenza goniometrica



# Grafici di tangente e cotangente



# Secante e cosecante

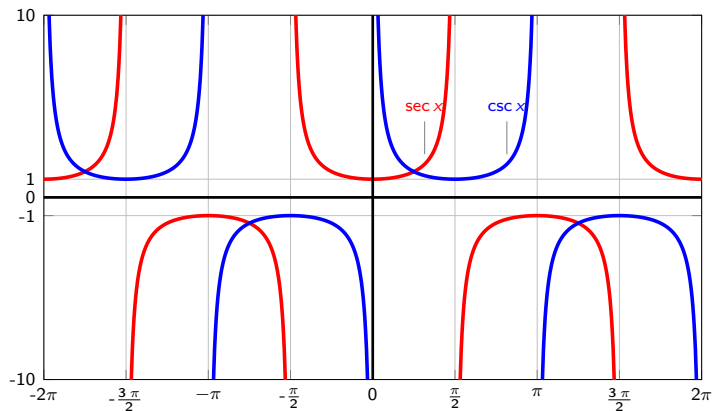
Le funzioni trigonometriche:

$$f : \mathbb{R} \setminus \left\{ k\pi - \frac{\pi}{2}, \forall k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$f : \mathbb{R} \setminus \{ k\pi, \forall k \in \mathbb{Z} \} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

si chiamano **secante** e **cosecante** e sono periodiche di periodo  $T = 2\pi$ . La funzione secante è pari mentre la funzione cosecante è dispari.

# Grafici di secante e cosecante



## Funzioni trigonometriche:

- ▶  $\sin$  (dispari) e  $\cos$  (pari) sono definite su  $\mathbb{R}$ , periodiche di periodo  $2\pi$ , con  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- ▶  $\tan = \frac{\sin}{\cos}$  e  $\cot = \frac{\cos}{\sin}$ : dispari, periodiche di periodo  $\pi$
- ▶  $\sec = \frac{1}{\cos}$  (pari) e  $\csc = \frac{1}{\sin}$  (dispari): periodiche di periodo  $2\pi$
- ▶ Segno e monotonia si leggono sulla circonferenza goniometrica

# Valori delle funzioni trigonometriche

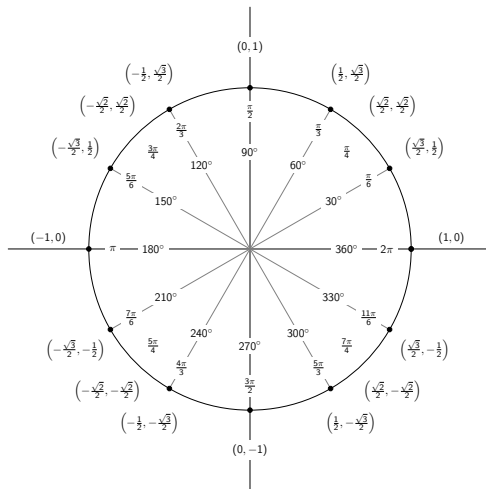
# Introduzione: Valori delle funzioni trigonometriche

- ▶ In questa sezione raccogliamo i **valori notevoli** delle funzioni trigonometriche negli angoli più usati
- ▶ Vediamo inoltre come cambiano le funzioni per **angoli associati**  $(-x, \frac{\pi}{2} \pm x, \pi \pm x)$
- ▶ Queste tabelle sono di uso continuo negli esercizi

# Valori notevoli

|                                | cos                  | sin                  | tan                  | cot                  | sec                   | csc                   |
|--------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 0                              | 1                    | 0                    | 0                    | $\pm\infty$          | 1                     | $\pm\infty$           |
| $x = \frac{\pi}{6} (30^\circ)$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$           | $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ | 2                     |
| $x = \frac{\pi}{4} (45^\circ)$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1                    | 1                    | $\sqrt{2}$            | $\sqrt{2}$            |
| $x = \frac{\pi}{3} (60^\circ)$ | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\sqrt{3}$           | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 2                     | $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ |
| $x = \frac{\pi}{2} (90^\circ)$ | 0                    | 1                    | $\pm\infty$          | 0                    | $\pm\infty$           | 1                     |
| $x = \pi (180^\circ)$          | -1                   | 0                    | 0                    | $\pm\infty$          | -1                    | $\pm\infty$           |

# Valori notevoli sulla circonferenza goniometrica



# Angoli associati

|                     | cos       | sin       | tan       | cot       |
|---------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $x$                 | $\cos x$  | $\sin x$  | $\tan x$  | $\cot x$  |
| $-x$                | $\cos x$  | $-\sin x$ | $-\tan x$ | $-\cot x$ |
| $\frac{\pi}{2} + x$ | $-\sin x$ | $\cos x$  | $-\cot x$ | $-\tan x$ |
| $\frac{\pi}{2} - x$ | $\sin x$  | $\cos x$  | $\cot x$  | $\tan x$  |
| $\pi + x$           | $-\cos x$ | $-\sin x$ | $\tan x$  | $\cot x$  |
| $\pi - x$           | $-\cos x$ | $\sin x$  | $-\tan x$ | $-\cot x$ |

## Valori delle funzioni trigonometriche:

- ▶ Valori notevoli in  $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi$  per  $\cos, \sin, \tan, \cot, \sec, \csc$
- ▶ Angoli associati: le funzioni in  $-x, \frac{\pi}{2} \pm x, \pi \pm x$  si esprimono tramite le funzioni in  $x$

# Principali formule trigonometriche



# Introduzione: Principali formule trigonometriche

- ▶ In questa sezione raccogliamo le principali **identità trigonometriche**
- ▶ Relazioni fra le funzioni, formule di addizione, duplicazione, triplicazione, bisezione, parametriche, prostaferesi e Werner
- ▶ Sono indispensabili per semplificare espressioni, risolvere equazioni e calcolare limiti e integrali

# Interdipendenze fra le funzioni trigonometriche

|          | $\sin x$                                  | $\cos x$                                  | $\tan x$                                  | $\cot x$                                  |
|----------|-------------------------------------------|-------------------------------------------|-------------------------------------------|-------------------------------------------|
| $\sin x$ | -                                         | $\pm\sqrt{1 - \cos^2 x}$                  | $\pm\sqrt{\frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}}$ | $\pm\sqrt{\frac{1}{1 + \cot^2 x}}$        |
| $\cos x$ | $\pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$                  | -                                         | $\pm\sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 x}}$        | $\pm\sqrt{\frac{\cot^2 x}{1 + \cot^2 x}}$ |
| $\tan x$ | $\pm\sqrt{\frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}}$ | $\pm\sqrt{\frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}}$ | -                                         | $\frac{1}{\cot x}$                        |
| $\cot x$ | $\pm\sqrt{\frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x}}$ | $\pm\sqrt{\frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x}}$ | $\frac{1}{\tan x}$                        | -                                         |

Dove il simbolo  $\pm$  significa che il segno dipende dal quadrante in cui si trova  $x$ .

# Addizione e sottrazione

$$\sin(x_1 \pm x_2) = \sin x_1 \cos x_2 \pm \sin x_2 \cos x_1$$

$$\cos(x_1 \pm x_2) = \cos x_1 \cos x_2 \mp \sin x_1 \sin x_2$$

$$\tan(x_1 \pm x_2) = \frac{\tan x_1 \pm \tan x_2}{1 \mp \tan x_1 \tan x_2}$$

$$\cot(x_1 \pm x_2) = \frac{\cot x_1 \cot x_2 \mp 1}{\cot x_2 \pm \cot x_1}$$

# Duplicazione

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= 2 \cos^2 x - 1$$

$$= 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\cot(2x) = \frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x}$$

# Triplicazione

$$\sin(3x) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

$$\cos(3x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

## Bisezione (1/2)

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

## Bisezione (2/2)

$$\tan \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

$$\cot \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} = \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$$

# Formule parametriche

$$\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$$

## Formule di prostaferesi

$$\sin x_1 + \sin x_2 = 2 \sin \frac{x_1 + x_2}{2} \cos \frac{x_1 - x_2}{2}$$

$$\sin x_1 - \sin x_2 = 2 \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \cos \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$\cos x_1 + \cos x_2 = 2 \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \cos \frac{x_1 - x_2}{2}$$

$$\cos x_1 - \cos x_2 = -2 \sin \frac{x_1 + x_2}{2} \sin \frac{x_1 - x_2}{2}$$

## Formule di Werner

$$\sin x_1 \sin x_2 = \frac{1}{2} \left( \cos(x_1 - x_2) - \cos(x_1 + x_2) \right)$$

$$\sin x_1 \cos x_2 = \frac{1}{2} \left( \sin(x_1 - x_2) + \sin(x_1 + x_2) \right)$$

$$\cos x_1 \cos x_2 = \frac{1}{2} \left( \cos(x_1 - x_2) + \cos(x_1 + x_2) \right)$$

# Formule aggiuntive

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\sin x \cos x = \frac{\sin(2x)}{2}$$

## Principali formule trigonometriche:

- ▶ Ogni funzione trigonometrica si esprime tramite le altre (a meno del segno, che dipende dal quadrante)
- ▶ **Addizione/sottrazione, duplicazione, triplicazione, bisezione**
- ▶ **Parametriche:**  $\sin x$  e  $\cos x$  in funzione di  $\tan \frac{x}{2}$
- ▶ **Prostaferesi** (somme in prodotti) e **Werner** (prodotti in somme)
- ▶  $\sin^2 x$ ,  $\cos^2 x$  e  $\sin x \cos x$  in funzione dell'angolo doppio

# Un'applicazione: i fenomeni vibratori

# Fenomeni vibratori

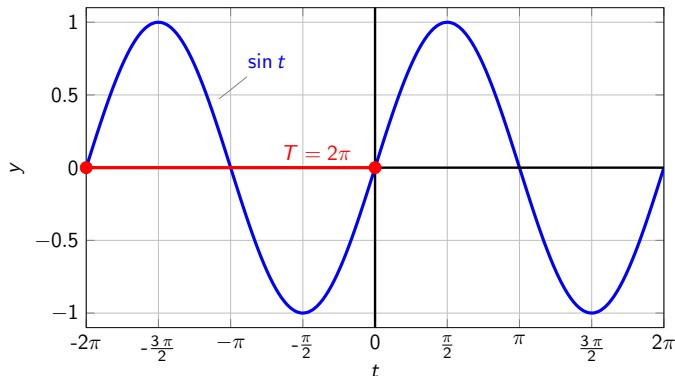


# Introduzione: Fenomeni vibratori

- ▶ In questa sezione usiamo seno e coseno per descrivere fenomeni che **oscillano nel tempo**
- ▶ Introduciamo le **vibrazioni elementari** e le grandezze che le caratterizzano: **periodo, ampiezza, pulsazione, frequenza e fase**
- ▶ Vedremo che la sovrapposizione di due vibrazioni con la stessa pulsazione è ancora una vibrazione elementare

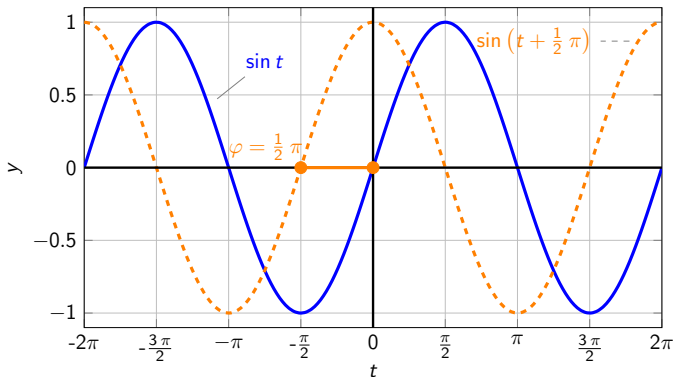
# Seno e coseno nel tempo

- Abbiamo visto che le funzioni seno e coseno sono periodiche di **periodo**  $2\pi$ . Useremo la variabile  $t$  per indicare il tempo.



# Transizione di fase

- Ricordiamo che  $\sin(t + \varphi)$  corrisponde a una **transizione di fase**  $\varphi$  (traslazione orizzontale).



# Vibrazioni elementari

Le funzioni:

$$t \mapsto a \sin(\omega t), \quad t \mapsto b \cos(\omega t)$$

dove  $a$ ,  $b$  e  $\omega$  sono numeri reali positivi, sono chiamate **vibrazioni elementari**.

Sono funzioni periodiche di

$$\text{periodo} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

## Esempio: periodo

Per esempio considerando  $t' = t + \frac{2\pi}{\omega}$ :

$$\sin \left[ \omega \underbrace{\left( t + \frac{2\pi}{\omega} \right)}_{t'} \right] = \sin(\omega t + 2\pi) = \sin(\omega t)$$

► Chiaramente abbiamo:

$$|a \sin(\omega t)| \leq a \quad \text{e} \quad |b \cos(\omega t)| \leq b$$

# Ampiezza, pulsazione e frequenza

Le vibrazioni elementari  $a \sin(\omega t)$  e  $b \cos(\omega t)$  sono caratterizzate da

**ampiezza**  $a$  e  $b$  (rispettivamente)

$$\text{pulsazione } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

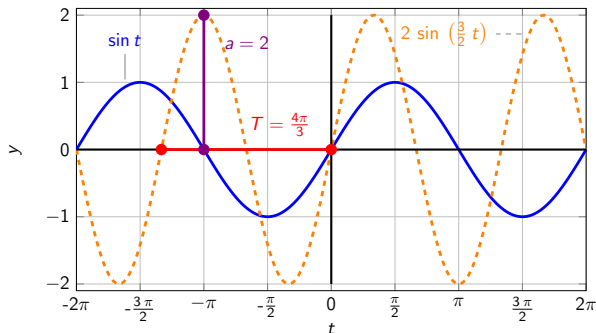
detta anche *velocità angolare*, che indica quanti periodi ci sono in un intervallo di  $2\pi$ . Inoltre sono caratterizzate dalla

$$\text{frequenza } \nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

che indica quante volte la funzione si ripete in un intervallo di lunghezza 1.

## Esempio: ampiezza, pulsazione e frequenza

$$t \mapsto 2 \sin \left( \frac{3}{2} t \right) \quad a = 2, \quad \omega = \frac{3}{2}, \quad T = \frac{4\pi}{3}$$



La pulsazione  $\omega = \frac{3}{2}$  significa che ci sono 1.5 periodi nell'intervallo  $2\pi$ . La frequenza  $\nu$  è  $\frac{3}{4\pi}$ .

# Sovrapposizione di vibrazioni (1/3)

- La funzione

$$h(t) = a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t)$$

descrive la **sovrapposizione** delle due vibrazioni elementari di **uguale pulsazione**  $\omega$ . Quest'ultima è ancora una vibrazione elementare **sfasata** rispetto alle precedenti.

- Infatti, posto  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$  si può scrivere

$$h(t) = A \underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}}_{\alpha} \sin(\omega t) + A \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}}_{\beta} \cos(\omega t)$$

## Sovrapposizione di vibrazioni (2/3)

- Osserviamo ora che i numeri

$$\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

soddisfano le condizioni

$$-1 \leq \alpha \leq 1 \quad -1 \leq \beta \leq 1 \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1$$

Esiste quindi un **unico angolo**  $\varphi$  tale che

$$\cos \varphi = \alpha \quad \sin \varphi = \beta$$

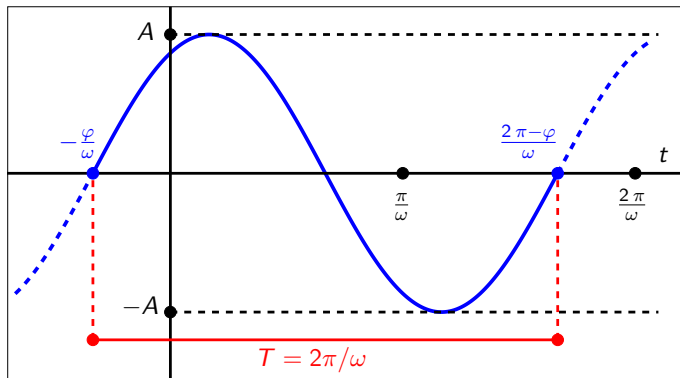
## Sovrapposizione di vibrazioni (3/3)

- Cosicché  $h(t)$  si può riscrivere nella forma seguente

$$\begin{aligned}h(t) &= A \cos \varphi \sin(\omega t) + A \sin \varphi \cos(\omega t) \\&= A \sin(\omega t + \varphi)\end{aligned}$$

- Dunque  $h(t)$  rappresenta una vibrazione elementare di ampiezza  $A$ , pulsazione  $\omega$ , sfasata di un angolo  $\varphi$ .

# Sovrapposizione di vibrazioni: grafico



$$a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \begin{cases} a = A \cos \varphi \\ b = A \sin \varphi \end{cases}$$

- Sotto condizioni abbastanza generali, un fenomeno naturale periodico si potrà scrivere come sovrapposizione di un numero finito o infinito di vibrazioni elementari di frequenza diversa (**serie di Fourier**).

## Fenomeni vibratori:

- ▶ **Vibrazioni elementari:**  $a \sin(\omega t)$  e  $b \cos(\omega t)$ , di periodo  $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- ▶ **Ampiezza**  $a$  (o  $b$ ), **pulsazione**  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , **frequenza**  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$
- ▶  $\sin(t + \varphi)$ : **transizione di fase**  $\varphi$
- ▶  $a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t) = A \sin(\omega t + \varphi)$  con  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$
- ▶ Fenomeni periodici generali: sovrapposizione di vibrazioni elementari (serie di Fourier)

# Effetti di smorzamento o di amplificazione

# Introduzione: Effetti di smorzamento o di amplificazione

- ▶ Moltiplicando una vibrazione elementare per **potenze** o **esponenziali** si possono modellizzare effetti di **smorzamento** o di **amplificazione**.
- ▶ Vediamo due esempi: una **vibrazione amplificata**  $t \sin(\omega t)$  e una **vibrazione smorzata**  $e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$
- ▶ In entrambi i casi il grafico resta compreso tra due curve che ne fanno da “involuppo”

## Primo esempio (1/3)

- Per esempio, consideriamo la funzione

$$h(t) = t \sin(\omega t)$$

modellizza una **vibrazione amplificata**.

- Essendo  $-1 \leq \sin(\omega t) \leq 1$  si ha

$$-t \leq t \sin(\omega t) \leq t$$

e quindi il grafico di  $h(t)$  si trova tra i grafici delle rette di equazione  $y = -t$ ,  $y = t$ .

## Primo esempio (2/3)

- ▶ Nei punti in cui  $\sin(\omega t) = 1$ , cioè

$$t = \frac{\pi}{2\omega} + k \frac{2\pi}{\omega} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

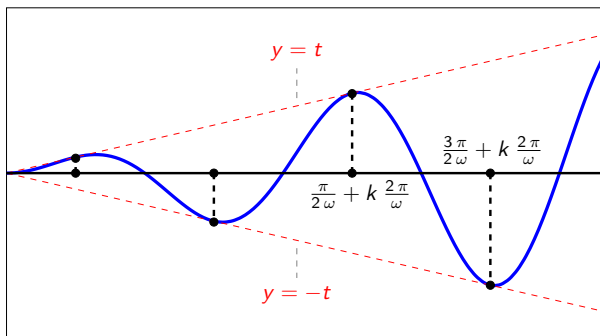
il grafico di  $h(t)$  tocca quello di  $y = t$ .

- ▶ Nei punti in cui  $\sin(\omega t) = -1$ , cioè

$$t = \frac{3\pi}{2\omega} + k \frac{2\pi}{\omega} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

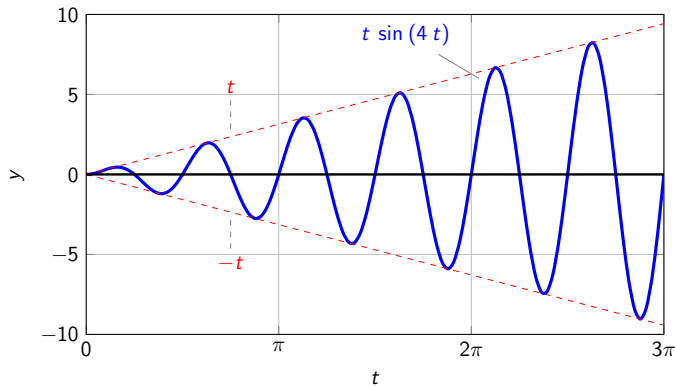
il grafico di  $h(t)$  tocca quello di  $y = -t$ .

## Primo esempio (3/3)

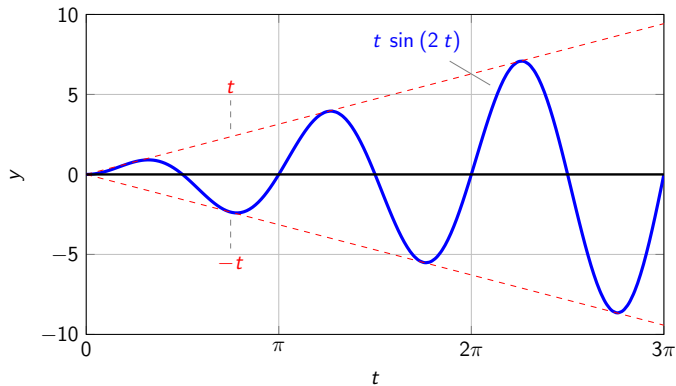


- Dal grafico si vede come la moltiplicazione per  $t$  abbia l'effetto di una moltiplicazione della vibrazione, all'aumentare di  $t$ .

## Vibrazione amplificata: grafici (1/2)



## Vibrazione amplificata: grafici (2/2)



## Secondo esempio

- Per esempio, consideriamo la funzione

$$k(t) = e^{-\alpha t} \sin(\omega t) \quad (\alpha > 0)$$

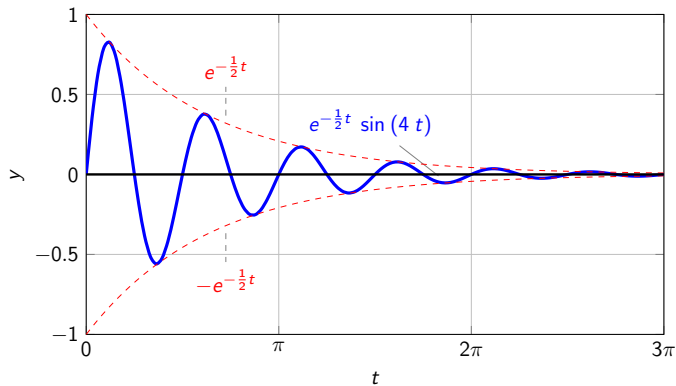
modellizza una **vibrazione smorzata**.

- Ricordando che  $e^{-\alpha t} = \left(\frac{1}{e^\alpha}\right)^t$  è un'esponenziale con base minore di 1, considerazioni analoghe a quelle svolte per la funzione  $h(t)$ , indicano che il grafico di  $k$  è compreso tra i grafici delle funzioni

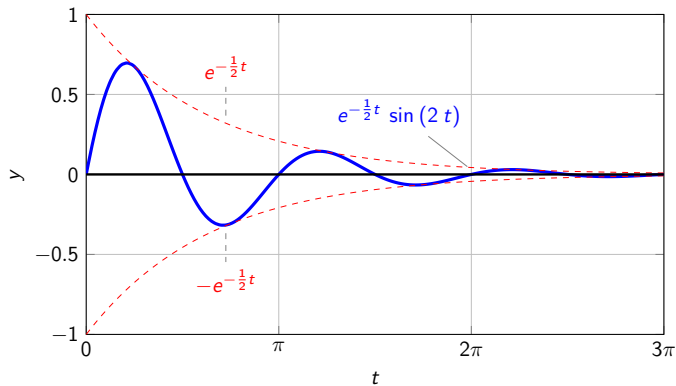
$$y_1 = e^{-\alpha t} \quad \text{e} \quad y_2 = -e^{-\alpha t}$$

come in figura.

## Vibrazione smorzata: grafici (1/2)



## Vibrazione smorzata: grafici (2/2)



## Smorzamento e amplificazione:

- ▶  $h(t) = t \sin(\omega t)$ : **vibrazione amplificata**, con grafico compreso tra  $y = -t$  e  $y = t$
- ▶  $k(t) = e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$ ,  $\alpha > 0$ : **vibrazione smorzata**, con grafico compreso tra  $-e^{-\alpha t}$  ed  $e^{-\alpha t}$
- ▶ Il grafico tocca le curve di inviluppo nei punti in cui  $\sin(\omega t) = \pm 1$

## Riepilogo: fenomeni vibratori

- ▶ Le **vibrazioni elementari**  $a \sin(\omega t)$ ,  $b \cos(\omega t)$  sono caratterizzate da ampiezza, pulsazione, periodo e frequenza
- ▶ La sovrapposizione di due vibrazioni con la stessa pulsazione è una vibrazione elementare **sfasata**:  $A \sin(\omega t + \varphi)$
- ▶ Moltiplicando per potenze o esponenziali si ottengono vibrazioni **amplificate** o **smorzate**

# Riepilogo finale

- ▶ **Seno e coseno**: periodiche di periodo  $2\pi$ , rispettivamente dispari e pari, con  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- ▶ **Tangente, cotangente** (periodo  $\pi$ ), **secante e cosecante** (periodo  $2\pi$ ) si costruiscono a partire da seno e coseno
- ▶ Tabelle dei **valori notevoli** e degli **angoli associati**
- ▶ Le **formule trigonometriche** permettono di trasformare e semplificare le espressioni
- ▶ Un'applicazione: i **fenomeni vibratori**, descritti con seno e coseno (vibrazioni elementari, sfasate, smorzate e amplificate)