

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Analisi Matematica 1

Esercizi, volume 7 — Integrali

Gli esercizi svolti sul calcolo integrale, con la soluzione subito dopo ogni testo: primitive, integrali definiti e impropri, somme di Riemann e proprietà dell'integrale, funzioni integrali e teorema fondamentale, integrali definiti e aree, convergenza degli integrali impropri. Le schede sono di Fabio Furini e Gianluca Priori; molti esercizi sono tratti da M. Bramanti, *Esercitazioni di Analisi matematica 1*, Esculapio.

Fabio Furini
fabiofurini.github.io
Dipartimento di Ingegneria informatica, automatica e gestionale — Sapienza Università di Roma

Versione online e materiale scaricabile:
fabiofurini.github.io/analisi-matematica-1/
github.com/fabiofurini/analisi-matematica-1

Anno accademico 2026–2027

Indice

1 **Primitive** **2**

2 **Integrali** **16**

3 **Integrale di Riemann e proprietà** **34**

4 **Funzioni integrali e teorema fondamentale** **38**

5 **Integrali definiti, aree e valor medio** **42**

6 **Integrali impropri** **45**

Primitive

Esercizio 1.1

Calcolare le primitive indicate negli intervalli in cui risultano definite

$$\text{(a)} \int \left(2x + \sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx, \quad \text{(b)} \int \frac{x - x^4}{\sqrt{x}} dx$$

$$\text{(c)} \int \tan^2 x \; dx, \quad \text{(d)} \int (3-x)^5 dx$$

$$\text{(e)} \int \frac{1}{2-3x} dx, \quad \text{(f)} \int x^2 e^{x^3+1} dx$$

$$\text{(g)} \int x\sqrt{x^2+1} dx, \quad \text{(h)} \int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} dx$$

$$\text{(i)} \int \frac{e^x}{e^x+3} dx, \quad \text{(j)} \int \frac{1}{\tan x} dx$$

Soluzione

(a)

$$\int \left(2x + \sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx = \int (2x + x^{1/3} - 2x^{-1/2}) dx$$

$$= x^2 + \frac{3}{4}x^{4/3} - 4x^{1/2} + c = x^2 + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} - 4\sqrt{x} + c$$

in un qualunque intervallo I tale che $I \subset (0, +\infty)$.

Soluzione

(b)

$$\int \frac{x - x^4}{\sqrt{x}} dx = \int (x^{1/2} - x^{7/2}) dx =$$

$$\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{9}x^{9/2} + c = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{2}{9}x^4\sqrt{x} + c$$

in un qualunque intervallo I tale che $I \subset (0, +\infty)$.

Soluzione

(c)

$$\int \tan^2 x \; dx = \int [(1 + \tan^2 x) - 1] dx = \tan x - x + c$$

in un qualunque intervallo I che non contenga punti del tipo $\pi/2 + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Soluzione

(d)

$$\int (3 - x)^5 dx = -\int (x - 3)^5 dx = -\frac{1}{6}(x - 3)^6 + c$$

in un qualunque intervallo I di $\mathbb{R}$.

Soluzione

(e)

$$\int \frac{1}{2 - 3x} dx = -\int \frac{1}{3x - 2} dx = -\frac{1}{3} \log |3x - 2| + c$$

in un qualunque intervallo I tale che $2/3 \notin I$.

Soluzione

(f)

$$\int x^2 e^{x^3+1} dx = \frac{1}{3} e^{x^3+1} + c$$

in un qualunque intervallo I di $\mathbb{R}$.

Soluzione

(g)
$$\int x\sqrt{x^2+1}dx = \frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2}+c = \frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}+c$$
in un qualunque intervallo I di $\mathbb{R}$.

Soluzione

(h)
$$\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx = \int \frac{2\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}dx = \log(1+\sin^2 x)+c$$
in un qualunque intervallo I di $\mathbb{R}$.

Soluzione

(i)
$$\int \frac{e^x}{e^x+3}dx = \log(e^x+3)+c$$
in un qualunque intervallo I di $\mathbb{R}$.

Soluzione

(j)
$$\int \frac{1}{\tan x}dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \log|\sin x|+c$$
in un qualunque intervallo I che non contenga punti del tipo $k\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$.

Esercizio 1.2

Calcolare le seguenti primitive integrando per parti

$$\text{(a)} \int x\sin x\ dx, \quad \text{(b)} \int x^2\cos x\ dx$$

$$\text{(c)} \int \arcsin x\ dx, \quad \text{(d)} \int \sin^2 x\ dx$$

Soluzione

(a)

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + c$$

in un qualunque intervallo I di $\mathbb{R}$.

Soluzione

(b) Integrando per parti due volte di seguito, si ha

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx =$$

$$x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \int \cos x \, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c$$

in un qualunque intervallo I di $\mathbb{R}$.

Soluzione

(c) Prendendo la funzione costante 1 come fattore da integrare, si ha

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$$

in un qualunque intervallo $I \subset (-1, 1)$.

Soluzione

(d) Integrando per parti ed utilizzando $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, si ottiene

$$\int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx$$

$$= -\sin x \cos x + \int 1 \, dx - \int \sin^2 x \, dx$$

da cui

$$\int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x \, dx + c$$

quindi, portando $\int \sin^2 x \, dx$ a primo membro,

$$2 \int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + x + c$$

ed infine, denotando ancora con c la costante arbitraria $c/2$,

$$\int \sin^2 x \, dx = -\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} x + c$$

in un qualunque intervallo I di $\mathbb{R}$.

Esercizio 1.3

Calcolare le seguenti primitive integrando per sostituzione

$$\text{(a)} \int \frac{e^x-1}{e^x+1}dx, \quad \text{(b)} \int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx, \quad \text{(c)} \int x\sqrt{x+1}dx$$

Soluzione

(a) Ponendo $y = e^x$, $y > 0, x \in \mathbb{R}$, si ha $x = \log y$ e si scrive $dx = \frac{1}{y}dy$, quindi

$$\int \frac{e^x-1}{e^x+1}dx = \int \frac{y-1}{y(y+1)}dy.$$

Coi fratti semplici, otteniamo

$$\frac{y-1}{y(y+1)} = -\frac{1}{y} + \frac{2}{y+1}$$

da cui, tenendo conto di $y > 0$,

$$\int \frac{y-1}{y(y+1)}dy = -\log y + 2\log(y+1) + c.$$

Ne segue, sostituendo di nuovo $y = e^x$,

$$\int \frac{e^x-1}{e^x+1}dx = -\log e^x + 2\log(e^x+1) + c = -x + 2\log(e^x+1) + c$$

in un qualunque intervallo I di $\mathbb{R}$.

Soluzione

(b) Ponendo $y = \sqrt{x}$, $x, y > 0$, si ha $x = y^2$ e si scrive $dx = 2y\ dy$, quindi

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx = 2\int \frac{y^2}{1+y^2}dy.$$

Da

$$\frac{y^2}{y^2+1} = \frac{y^2+1-1}{y^2+1} = 1 - \frac{1}{y^2+1}$$

si ha poi

$$2\int \frac{y^2}{1+y^2}dy = 2y - 2\arctan y + c.$$

Ne segue, sostituendo di nuovo $y = \sqrt{x}$,

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx = 2\sqrt{x} - 2\arctan\sqrt{x} + c$$

in un qualunque intervallo $I \subset (0, +\infty)$.

Soluzione

(c) Ponendo $y = \sqrt{x+1}$, $x > -1, y > 0$, si ha $x = y^2 - 1$ e si scrive $dx = 2y\ dy$, quindi

$$\int x\sqrt{x+1}dx = 2\int (y^2-1)y^2\ dy = 2\int (y^4 - y^2)dy = \frac{2}{5}y^5 - \frac{2}{3}y^3 + c.$$

Ne segue, sostituendo di nuovo $y = \sqrt{x+1}$,

$$\int x\sqrt{x+1}dx = \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + c$$

in un qualunque intervallo $I \subset (-1, +\infty)$.

Esercizio 1.4

Calcolare le seguenti primitive di funzioni razionali

(a) $\int \frac{5}{x^2+2x+1}dx$, (b) $\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$, (c) $\int \frac{x}{x^2+x+1}dx$, (d) $\int \frac{x^3+1}{x^2-3x+2}dx$

(e) $\int \frac{x}{x^3+3x^2+3x+1}dx$, (f) $\int \frac{1}{x^4-1}dx$, (g) $\int \frac{x+1}{x^3-x^2}dx$, (h) $\int \frac{1}{x^3+1}dx$

Soluzione

(a) L'integrale dato è immediato:

$$\int \frac{5}{x^2+2x+1}dx = \int \frac{5}{(x+1)^2}dx = -\frac{5}{x+1} + c$$

in un qualunque intervallo I tale che $-1 \notin I$.

Soluzione

(b) Scrivendo il denominatore, irriducibile, come somma di quadrati:

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{1}{(x+1/2)^2+3/4}dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]+c$$

in un qualunque intervallo I di $\mathbb{R}$.

Soluzione

(c) Utilizzando anche l'esercizio precedente:

$$\int \frac{x}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}dx =$$

$$\frac{1}{2}\log(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]+c$$

in un qualunque intervallo I di $\mathbb{R}$.

Soluzione

(d) Eseguiamo la divisione euclidea:

$$\frac{x^3+1}{x^2-3x+2} = x+3+\frac{7x-5}{x^2-3x+2}.$$

Impostando i fratti semplici

$$\frac{7x-5}{x^2-3x+2} = \frac{7x-5}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2},$$

si ottiene

$$A=-2,\ B=9.$$

Concludendo:

$$\int \frac{x^3+1}{x^2-3x+2}dx = \int \left(x+3-\frac{2}{x-1}+\frac{9}{x-2}\right)dx =$$

$$\frac{1}{2}x^2+3x-2\log|x-1|+9\log|x-2|+c$$

in un qualunque intervallo I tale che $1\notin I$, $2\notin I$.

Soluzione

(e) Impostiamo i fratti semplici:

$$\frac{x}{x^3+3x^2+3x+1} = \frac{x}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}.$$

Si ottiene

$$A = 0,\ B = 1,\ C = -1.$$

Concludendo

$$\int \frac{x}{x^3+3x^2+3x+1}dx = \int \left(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3}\right) dx$$

$$= -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2} + c$$

in un qualunque intervallo I tale che $-1 \notin I$.

Soluzione

(f) Impostiamo i fratti semplici:

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Si ottiene

$$A = \frac{1}{4},\ B = -\frac{1}{4},\ C = 0,\ D = -\frac{1}{2}.$$

Concludendo

$$\int \frac{1}{x^4-1}dx = \int \left(\frac{1}{4}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\log|x-1| - \frac{1}{4}\log|x+1| - \frac{1}{2}\arctan x + c$$

in un qualunque intervallo I tale che $\pm 1 \notin I$.

Soluzione

(g) Impostiamo i fratti semplici:

$$\frac{x+1}{x^3-x^2} = \frac{x+1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}.$$

Si ottiene

$$A = -2,\ B = -1,\ C = 2.$$

Concludendo

$$\int \frac{x+1}{x^3-x^2}dx = \int \left(-\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-1}\right) dx$$

$$= -2\log|x| + \frac{1}{x} + 2\log|x-1| + c$$

in un qualunque intervallo I tale che $0, 1 \notin I$.

Soluzione

(h) Impostiamo i fratti semplici:

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

Si ottiene

$$A = \frac{1}{3},\ B = -\frac{1}{3},\ C = \frac{2}{3}.$$

Quindi

$$\int \frac{1}{x^3+1}dx = \int \left(\frac{1}{3}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3}\frac{-x+2}{x^2-x+1}\right) dx$$

$$= \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}dx$$

$$= \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{6}\log(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-1/2)^2+3/4}dx$$

$$= \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{6}\log(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right] + c$$

in un qualunque intervallo I tale che $-1 \notin I$.

Esercizio 1.5

Calcolare le seguenti primitive

$$\text{(a)} \int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}dx, \quad \text{(b)} \int x^2\log(x+1)dx, \quad \text{(c)} \int \frac{\tan x}{\sin^2 x - \cos^2 x}dx$$

$$\text{(d)} \int \frac{x+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}dx, \quad \text{(e)} \int \frac{1}{\cos x}dx, \quad \text{(f)} \int \sqrt{4-x^2}dx$$

Soluzione

(a) Con la sostituzione $y = e^x$, $y > 0$, $x \in \mathbb{R}$, si ha $x = \log y$, si scrive $dx = \frac{1}{y}dy$, e si ottiene

$$\int \frac{e^x + 1}{e^{2x} + 1} dx = \int \frac{y + 1}{y(y^2 + 1)} dy.$$

Impostiamo i fratti semplici:

$$\frac{y + 1}{y(y^2 + 1)} = \frac{A}{y} + \frac{By + C}{y^2 + 1}.$$

Si ha

$$A = 1,\ B = -1,\ C = 1,$$

da cui, tenendo conto anche di $y > 0$,

$$\int \frac{y + 1}{y(y^2 + 1)} dy = \int \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{y^2 + 1} + \frac{1}{y^2 + 1} \right) dy$$

$$= \log y - \frac{1}{2} \log(y^2 + 1) + \arctan y + c.$$

Sostituendo poi di nuovo $y = e^x$, si ha

$$\int \frac{e^x + 1}{e^{2x} + 1} dx = x - \frac{1}{2} \log(e^{2x} + 1) + \arctan e^x + c$$

in un qualunque intervallo I di $\mathbb{R}$.

Soluzione

(b) Integrando per parti e calcolando poi l'integrale di una funzione razionale, si ha

$$\int x^2 \log(x + 1) dx = \frac{1}{3} x^3 \log(x + 1) - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{x + 1} dx$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \log(x + 1) - \frac{1}{3} \int (x^2 - x + 1) dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{x + 1} dx$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \log(x + 1) - \frac{1}{9} x^3 + \frac{1}{6} x^2 - \frac{1}{3} x + \frac{1}{3} \log(x + 1) + c$$

in un qualunque intervallo $I \subset (-1, +\infty)$.

Soluzione

(c) Da $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ e $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, si ha

$$\int \frac{\tan x}{\sin^2 x - \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos x (1 - 2\cos^2 x)} dx.$$

Ponendo ora $y = \cos x$, si scrive $dy = -\sin x\, dx$ e si ottiene

$$\int \frac{\sin x}{\cos x(1-2\cos^2 x)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{y(y-\sqrt{1/2})(y+\sqrt{1/2})}dy.$$

Coi fratti semplici, si ha poi

$$\frac{1}{y(y-\sqrt{1/2})(y+\sqrt{1/2})} = -\frac{2}{y} + \frac{1}{y-\sqrt{1/2}} + \frac{1}{y+\sqrt{1/2}},$$

da cui

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{y(y-\sqrt{1/2})(y+\sqrt{1/2})} = -\log|y| + \frac{1}{2}\log|y^2-1/2| + c.$$

Concludendo,

$$\int \frac{\tan x}{\sin^2 x - \cos^2 x}dx = -\log|\cos x| + \frac{1}{2}\log|\cos^2 x - 1/2| + c$$

in un qualunque intervallo I che non contiene punti del tipo $x = \pi/2 + k\pi$ oppure del tipo $x = \pi/4 + k\pi/2$ con k intero.

Soluzione

(d) Con la sostituzione $y = \sqrt{x}$, $x, y > 0$, si ha $x = y^2$, si scrive $dx = 2y\, dy$ e si ottiene

$$\int \frac{x+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{y^3+y^2}{y+2}dy.$$

Integrando la funzione razionale, si ha

$$2\int \frac{y^3+y^2}{y+2}dy = 2\int (y^2-y+2)dy - 8\int \frac{1}{y+2}dy$$

$$= \frac{2}{3}y^3 - y^2 + 4y - 8\log(y+2) + c.$$

Sostituendo di nuovo $y = \sqrt{x}$, si conclude

$$\int \frac{x+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - x + 4\sqrt{x} - 8\log(\sqrt{x}+2) + c$$

in un qualunque intervallo $I \subset (0, +\infty)$.

Soluzione

(e) Operando la sostituzione razionalizzante $y = \tan\frac{x}{2}$, $dx = \frac{2}{1+y^2}dy$ e tenendo conto di $\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$, si ha

$$\int \frac{1}{\cos x}dx = -2\int \frac{1}{y^2-1}dy.$$

Coi fratti semplici, si ha poi

$$-2\int \frac{1}{y^2-1}dy = \int \left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y-1}\right) dy = \log\left|\frac{y+1}{y-1}\right| + c.$$

Tornando a $y = \tan\frac{x}{2}$, si conclude

$$\int \frac{1}{\cos x}dx = \log\left|\frac{\tan(x/2)+1}{\tan(x/2)-1}\right| + c$$

in un qualunque intervallo I che non contiene punti del tipo $x = \pi/2 + k\pi$ con k intero.

Soluzione

(f) Operando la sostituzione razionalizzante $x = 2\sin y$, $-\pi/2 < y < \pi/2$, $-2 < x < 2$, $dx = 2\cos y\ dy$, tenendo conto anche di $\cos y > 0$, si ottiene

$$\int \sqrt{4-x^2}dx = 4\int \cos^2 y\ dy.$$

Da $4\cos^2 y = 2 + 2\cos(2y)$, si ha poi

$$4\int \cos^2 y\ dy = 2y + \sin(2y) = 2y + 2\sin y\cos y + c.$$

Usando ora $\sin y = x/2$, $y = \arcsin(x/2)$, $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$, si conclude

$$\int \sqrt{4-x^2}dx = 2\arcsin(x/2) + (x/2)\sqrt{4-x^2} + c$$

in un qualunque intervallo $I \subset (-2, 2)$.

Esercizio 1.6

Calcolare i seguenti limiti

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3}\int_0^{x^2}\log(1+\sqrt{t})dt, \quad \text{(b)}\ \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^4}\int_0^{x^2}(1-\cos\sqrt{t})dt$$

$$\text{(c)}\ \lim_{k\to+\infty}\left(2\int_4^{4e}\frac{\log(kx)}{x}dx - \log(k(k+1))\right),$$

$$\text{(d)}\ \lim_{k\to+\infty}\left(\int_1^3 \log(k(x+2))dx - 3\log(k+1)\right)$$

Soluzione

(a) Ponendo $f(x) = \int_0^{x^2} \log(1+\sqrt{t})dt$, il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ data da $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^3}$. Siamo nelle ipotesi di utilizzo delle regole di De L'Hospital e possiamo passare al calcolo del limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{3x^2}.$$

Calcoliamo la derivata $f'(x)$ con il Teorema fondamentale del calcolo integrale e la regola della derivata di funzione composta:

$$f'(x) = 2x \log(1+\sqrt{x^2}) = 2x \log(1+x), \quad x > 0.$$

Concludendo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3} \int_0^{x^2} \log(1+\sqrt{t})dt = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x\log(1+x)}{3x^2}$$

$$= \frac{2}{3} \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x)}{x} = \frac{2}{3}.$$

Soluzione

(b) Ponendo $f(x) = \int_0^{x^2} (1-\cos\sqrt{t})dt$, il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ data da $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^4}$. Siamo nelle ipotesi di utilizzo delle regole di De L'Hospital e possiamo passare al calcolo del limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{4x^3}.$$

Calcoliamo la derivata $f'(x)$ con il Teorema fondamentale del calcolo integrale e la regola della derivata di funzione composta:

$$f'(x) = 2x(1-\cos\sqrt{x^2}) = 2x(1-\cos x), \quad x > 0.$$

Concludendo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^4} \int_0^{x^2} (1-\cos\sqrt{t})dt = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x(1-\cos x)}{4x^3}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{4}.$$

Soluzione

(c) Calcoliamo

$$2\int_4^{4e}\frac{\log(kx)}{x}dx = [\log^2(kx)]_4^{4e} = \log^2(4ke) - \log^2(4k)$$

$$= (\log(4ke) - \log(4k))(\log(4ke) + \log(4k))$$

$$= \log\frac{4ke}{4k}\log(16k^2e) = \log(16k^2e).$$

Ne segue

$$\lim_{k\to+\infty}\left(2\int_4^{4e}\frac{\log(kx)}{x}dx - \log(k(k+1))\right) = \lim_{k\to+\infty}\log(16k^2e) - \log(k(k+1))$$

$$= \lim_{k\to+\infty}\log\frac{16k^2e}{k^2+k} = \log(16e) = 1 + \log 16.$$

Soluzione

(d) Calcoliamo

$$\int_1^3\log(k(x+2))dx = [x\log(kx+2k)]_1^3 - \int_1^3\frac{x}{x+2}dx$$

$$= 3\log(5k) - \log(3k) - \int_1^3\left(1 - \frac{2}{x+2}\right)dx$$

$$= 3\log(5k) - \log(3k) - 2 + 2\log\frac{5}{3}.$$

Ne segue

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\int_1^3\log(k(x+2))dx - 3\log(k+1)\right)$$

$$= \lim_{k\to+\infty}3\log(5k) - \log(3k) - 2 + 2\log\frac{5}{3} - 3\log(k+1)$$

$$= \lim_{k\to+\infty}3\log\frac{5k}{k+1} - \log(3k) - 2 + 2\log\frac{5}{3} = -\infty.$$

Integrali

Esercizio 2.1

Determinare la misura dell'insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ così definito:

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; -1 < x < 1, x^2 - 1 \leq y \leq \frac{x+1}{x+2}\right\}$$

Soluzione

Si tratta di calcolare

$$\int_{-1}^{1} \left(\frac{x+1}{x+2} - (x^2-1)\right) dx.$$

Si ha

$$\int_{-1}^{1} \left(\frac{x+1}{x+2} + 1 - x^2\right) dx = \int_{-1}^{1} \left(2 - \frac{1}{x+2} - x^2\right) dx$$

$$= \left[2x - \log(x+2) - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{10}{3} - \log 3.$$

Esercizio 2.2

Calcolare

$$\int_0^1 \frac{e^x + e^{x/2}}{1+e^x} dx$$

Soluzione

Con la sostituzione $y = e^{x/2}$, $x = 2\log y$, $dx = \frac{2}{y}dy$, si ottiene

$$\int_0^1 \frac{e^x + e^{x/2}}{1+e^x}dx = 2\int_1^{\sqrt{e}} \frac{y^2+y}{(1+y^2)y}dy$$

$$= 2\int_1^{\sqrt{e}} \frac{y+1}{1+y^2}dy = [\log(y^2+1) + 2\arctan y]_1^{\sqrt{e}}$$

$$= \log\frac{e+1}{2} + 2\arctan\sqrt{e} - \frac{\pi}{2}.$$

Esercizio 2.3

Calcolare

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-|x|}\cos x\, dx$$

Soluzione

Osserviamo che la funzione è pari, in quanto $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in [-\pi, \pi]$. Quindi, per proprietà di simmetria

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-|x|}\cos x\, dx = 2\int_0^{\pi} e^{-|x|}\cos x\, dx = 2\int_0^{\pi} e^{-x}\cos x\, dx$$

dove nell'ultima uguaglianza si è sfruttato il fatto che $|x| = x$ per ogni $x \geq 0$. Si ha, integrando due volte per parti

$$I = \int e^{-x}\cos x\, dx = e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\sin x\, dx$$

$$= e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x\, dx = e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x - I$$

da cui

$$2I = e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x$$

ed infine

$$I = \int e^{-x}\cos x\, dx = \frac{e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x}{2} + c$$

Per il calcolo dell'integrale definito, valutiamo la primitiva fra 0 e π, non dimenticando il fattore 2 che era presente davanti all'integrale:

$$2[I]_0^{\pi} = e^{-\pi} + 1$$

Esercizio 2.4

Calcolare

$$\int_0^2 \frac{e^x \log(1+e^x)}{1+e^x} dx$$

Soluzione

Con la sostituzione $1 + e^x = t$, $e^x\, dx = dt$, si ottiene

$$\int_0^2 \frac{e^x \log(1+e^x)}{1+e^x} dx = \int_2^{e^2+1} \frac{\log t}{t} dt$$

$$= \left[\frac{\log^2 t}{2}\right]_2^{e^2+1} = \frac{1}{2}(\log^2(e^2+1) - \log^2 2)$$

Esercizio 2.5

Stabilire se il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{\sin^3 \sqrt{x}}{e^x(1-\cos x)} dx$$

esiste finito.

Soluzione

Poiché la funzione integranda è continua in $(0, 1]$, per stabilire se l'integrale proposto converge è sufficiente studiare il comportamento di f in un intorno destro di $x = 0$. Per $x \to 0^+$ si ha

$$f(x) \sim \frac{(\sqrt{x})^3}{\frac{1}{2}x^2} = \frac{x^{3/2}}{\frac{1}{2}x^2} = 2\frac{1}{x^{1/2}}$$

Poiché $1/2 < 1$, dal criterio del confronto asintotico l'integrale proposto esiste finito; più formalmente, la funzione $f(x)$ è impropriamente integrabile in un intorno destro dell'origine.

Esercizio 2.6

Stabilire se il seguente integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(3+5x^5)\arctan x^{3/2}} dx$$

esiste finito.

Soluzione

La funzione integranda è continua in $(0, +\infty)$. Per stabilire se l'integrale proposto converge è necessario studiare il comportamento della funzione integranda in un intorno destro di $x = 0$, dove il denominatore non è definito, ed in un intorno di $+\infty$. È bene riscrivere tale integrale di terza specie come

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(3+5x^5)\arctan x^{3/2}}dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^2}{(3+5x^5)\arctan x^{3/2}}dx$$

al fine di evidenziare il duplice studio da svolgere. Per $x \to 0^+$ si ha

$$f(x) \sim \frac{x^2}{3x^{3/2}} = \frac{1}{3x^{-1/2}}$$

Poiché $-1/2 < 1$, dal criterio del confronto asintotico la funzione $f(x)$ è impropriamente integrabile in un intorno destro dell'origine. Verifichiamo, ora, che lo sia anche in un intorno di $+\infty$. Per $x \to +\infty$ si ha

$$f(x) \sim \frac{x^2}{5x^5\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{5\pi}\frac{1}{x^3}$$

Poiché $3 > 1$, dal criterio del confronto asintotico la funzione $f(x)$ è impropriamente integrabile anche in un intorno di $+\infty$. Complessivamente, dunque, l'integrale improprio esiste finito. Osserviamo che, in realtà, poiché $f(x) \sim \frac{\sqrt{x}}{3}$, per $x \to 0^+$, la funzione è prolungabile per continuità in $x = 0$ e si può porre, per definizione, $f(0) = 0$.

Esercizio 2.7

Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x^2)}{x^\alpha(1+x^3)}dx$$

esiste finito.

Soluzione

La funzione integranda è continua in $(0, 1)$. Per stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale proposto converge basta studiare il comportamento dell'integranda in un intorno destro di $x = 0$, dove il denominatore non è definito. Per $x \to 0^+$ si ha

$$f(x) \sim \frac{x^2}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-2}}$$

che è impropriamente integrabile per $\alpha - 2 < 1$, cioè per $\alpha < 3$.

Esercizio 2.8

Dato il seguente integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{x \arctan\left(x^2\right) \log^\alpha\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^4+1} dx$$

studiarne la convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Successivamente, per $\alpha = 0$, calcolarlo mediante la definizione.

Soluzione

La funzione integranda è continua in $[1, +\infty)$. Per stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale proposto converge basta studiare il comportamento dell'integranda in un intorno di $+\infty$. Per $x \to +\infty$ si ha

$$f(x) \sim \frac{x}{x^4} \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{x}\right)^\alpha = \frac{\pi}{2} \frac{1}{x^{\alpha+3}}$$

dove si è reso necessario l'utilizzo delle stime asintotiche $x^4+1 \sim x^4$, $\log^\alpha\left(1+\frac{1}{x}\right) \sim \left(\frac{1}{x}\right)^\alpha$, $x \to +\infty$. Dal criterio del confronto asintotico, l'integrale improprio esiste finito se $\alpha+3 > 1$, ovvero $\alpha > -2$.
Per $\alpha = 0$, l'integrale diventa

$$\int_1^{+\infty} \frac{x \arctan(x^2)}{x^4+1} dx$$

È possibile procedere per sostituzione, ponendo $\arctan(x^2) = t$, $\frac{x}{1+x^4}\, dx = \frac{1}{2}\, dt$, ottenendo

$$\int_1^{+\infty} \frac{x \arctan\left(x^2\right)}{x^4+1}\, dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{t}{2}\, dt = \frac{3}{64}\pi^2$$

Esercizio 2.9

Dopo aver stabilito se la funzione è sommabile o meno, calcolare i seguenti integrali

$$\text{(a)} \int_{-1}^{0} \frac{1}{(1-x)\sqrt{1+x}} dx, \quad \text{(b)} \int_{-1}^{1} \frac{1}{(1-x)\sqrt{1+x}} dx, \quad \text{(c)} \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$$

$$\text{(d)} \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx, \quad \text{(e)} \int_4^{+\infty} \frac{1}{x(x-3)} dx$$

Si tratta di tutte funzioni continue e positive nei rispettivi intervalli di integrazione, quindi di tutte funzioni integrabili. Ciascun integrale rappresenta la misura del sottografico. In tutti i casi, il sottografico è un insieme non limitato del piano, l'integrale vale quindi o un numero positivo o $+\infty$. Ricordiamo che la funzione si dice sommabile quando è integrabile con integrale finito.

Soluzione

(a) La funzione

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)\sqrt{1+x}}$$

è continua nell'intervallo $(-1, 0]$. Bisogna, quindi, studiarne il comportamento in un intorno destro di $x = -1$. Per $x \to -1^+$ si ha

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}, \quad x \to -1^+$$

quindi la funzione è sommabile in $(-1, 0]$ per il criterio del confronto, in quanto $\frac{1}{2} < 1$. Questo significa

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-1+\varepsilon}^{0} f(x)dx$$

e che tale limite esiste, finito e positivo.
Ponendo $y = \sqrt{1+x}$, $x = y^2 - 1$, $dx = 2y\, dy$, otteniamo

$$\int_{-1+\varepsilon}^{0} f(x)dx = \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{1} \frac{2}{2-y^2}dy,$$

quindi, tenendo conto che $\sqrt{\varepsilon} \to 0$ per $\varepsilon \to 0$, abbiamo

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx = \lim_{\delta \to 0^+} \int_{\delta}^{1} \frac{2}{2-y^2}dy = \int_{0}^{1} \frac{2}{2-y^2}dy.$$

Si noti che, in questo caso, dopo il cambiamento di variabile, abbiamo ottenuto l'integrale di una funzione limitata partendo dall'integrale di una non limitata.
Coi fratti semplici, tenendo conto anche di $|y - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - y$ nell'intervallo d'integrazione, si ha

$$\frac{2}{2-y^2} = -\frac{2}{(y-\sqrt{2})(y+\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{y+\sqrt{2}} - \frac{1}{y-\sqrt{2}}\right),$$

quindi

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{0}^{1} \left(\frac{1}{y+\sqrt{2}} - \frac{1}{y-\sqrt{2}}\right) dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\log \frac{y+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-y}\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}.$$

Soluzione

(b) Si ha

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{(1-x)\sqrt{1+x}}dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{(1-x)\sqrt{1+x}}dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{(1-x)\sqrt{1+x}}dx$$

dove il primo integrale è finito ed è stato calcolato al punto precedente. L'integrale ora

assegnato è quindi finito se e solo se tale è

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-x)\sqrt{1+x}}dx.$$

La funzione

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)\sqrt{1+x}}$$

è continua e limitata in ogni intervallo $[0, 1-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$. Si ha poi

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{1-x}, \quad x \to 1^-$$

quindi la funzione non è sommabile in $[0, 1)$ per il criterio del confronto. Questo significa

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} f(x)dx = +\infty,$$

quindi anche l'integrale dato vale

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(1-x)\sqrt{1+x}}dx = +\infty.$$

Soluzione

(c) La funzione $f(x) = xe^{-x^2}$ è continua e limitata su ogni intervallo $[0, a]$ con $a > 0$. Si ha poi

$$f(x) = O\left(\frac{1}{x^\alpha}\right), \quad x \to +\infty,$$

qualunque sia $\alpha > 0$, in particolare, scegliendo $\alpha > 1$, la funzione è sommabile su $[0, +\infty)$. Questo significa

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \to +\infty} \int_0^a f(x)dx$$

e che tale limite esiste, finito e positivo. Infatti

$$\lim_{a \to +\infty} \int_0^a xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\lim_{a \to +\infty}[e^{-x^2}]_0^a = -\frac{1}{2}\lim_{a \to +\infty}(e^{-a^2} - 1) = \frac{1}{2}.$$

L'integrale dato vale 1/2.

Soluzione

(d) La funzione $f(x) = x^3e^{-x^2}$ è continua e limitata su ogni intervallo $[0, a]$ con $a > 0$. Si ha poi

$$f(x) = O\left(\frac{1}{x^\alpha}\right), \quad x \to +\infty,$$

qualunque sia $\alpha > 0$, in particolare, scegliendo $\alpha > 1$, la funzione è sommabile su $[0, +\infty)$.

Questo significa

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to+\infty} \int_0^a f(x)dx$$

e che tale limite esiste, finito e positivo. Infatti, integrando per parti, e tenuto conto dell'integrale calcolato al punto precedente,

$$\lim_{a\to+\infty} \int_0^a x^3 e^{-x^2} dx = \lim_{a\to+\infty} \left\{ -\frac{1}{2}[x^2 e^{-x^2}]_0^a + \int_0^a x e^{-x^2} dx \right\}$$

$$= \lim_{a\to+\infty} \left(-\frac{1}{2} a^2 e^{-a^2} + \int_0^a x e^{-x^2} dx \right) = \frac{1}{2}.$$

L'integrale dato vale $1/2$.

Soluzione

(e) La funzione $f(x) = \frac{1}{x(x-3)}$ è continua e limitata su ogni intervallo $[4, a]$ con $a > 4$. Si ha poi

$$f(x) \sim \frac{1}{x^2}, \quad x \to +\infty,$$

quindi la funzione è sommabile su $[4, +\infty)$ per confronto. Questo significa

$$\int_4^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to+\infty} \int_4^a f(x)dx$$

e che tale limite esiste, finito e positivo. Infatti, coi fratti semplici,

$$\lim_{a\to+\infty} \int_4^a \frac{1}{x(x-3)} dx = \frac{1}{3} \lim_{a\to+\infty} \int_4^a \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{1}{3} \lim_{a\to+\infty} \left[\log \frac{x-3}{x} \right]_4^a$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{a\to+\infty} \left(\log \frac{a-3}{a} - \log \frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{3} \log \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \log 4.$$

L'integrale dato vale $\frac{1}{3} \log 4$.

Esercizio 2.10

Determinare tutti gli $\alpha \geq 0$ per cui la funzione

$$f(x) = \left(\sqrt{1+x} - \sqrt{x} \right)^\alpha$$

è sommabile su $[0, +\infty)$

Soluzione

La funzione $f(x)$ è continua e positiva su $[0, +\infty)$, quindi basta analizzare il suo comportamento in un intorno di $+\infty$, ovvero per $x \to +\infty$. Moltiplicando e dividendo per

$\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)^{\alpha}$, si ha

$$f(x)=\frac{1}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)^{\alpha}}\sim\frac{1}{(2\sqrt{x})^{\alpha}}=\frac{1}{2^{\alpha}}\frac{1}{x^{\alpha/2}},\ x\to+\infty.$$

Per confronto, segue che f è sommabile su $[0,+\infty)$ se e solo se $\alpha/2>1$, quindi se e solo se

$$\alpha>2.$$

Esercizio 2.11

Dato

$$\int_0^{+\infty}\frac{\log\left(1+e^{x^2}\right)}{2+3x^{5/2}+x^{3\alpha}+12x}\,dx$$

stabilire per quali valori di $\alpha>0$ converge, ovvero esiste finito.

Soluzione

La funzione $f(x)$ è continua e positiva su $[0,+\infty)$, quindi basta analizzare il suo comportamento in un intorno di $+\infty$, ovvero per $x\to+\infty$. Si ha

$$f(x)=\frac{\log\left(1+e^{x^2}\right)}{2+3x^{5/2}+x^{3\alpha}+12x}\sim\frac{\log\left(e^{x^2}\right)}{3x^{5/2}+x^{3\alpha}}=\frac{x^2}{3x^{5/2}+x^{3\alpha}}\sim$$

$$\sim\begin{cases}\frac{x^2}{3x^{5/2}}=\frac{1}{3}\frac{1}{x^{1/2}} & \text{se } 3\alpha<5/2, \text{ ovvero se e solo se } \alpha<5/6\\ \frac{x^2}{4x^{5/2}}=\frac{1}{4}\frac{1}{x^{1/2}} & \text{se } 3\alpha=5/2, \text{ ovvero se e solo se } \alpha=5/6\\ \frac{x^2}{x^{3\alpha}}=\frac{1}{x^{3\alpha-2}} & \text{se } 3\alpha>5/2, \text{ ovvero se e solo se } \alpha>5/6\end{cases}$$

Nei primi due casi, l'integrale improprio diverge per confronto asintotico, in quanto $1/2<1$. Nel terzo caso, invece, esiste finito se e solo se $3\alpha-2>1$, ovvero se e solo se $\alpha>1$. In definitiva, l'integrale improprio esiste finito (converge) per $\alpha>1$, diverge per $\alpha\le 1$.

Esercizio 2.12

Dato

$$\int_0^{+\infty}\frac{3+2x^{3/2}+5x^{4\alpha}+x^{1/2}}{\log\left(1+e^{x^5}\right)}\,dx$$

stabilire per quali valori di $\alpha>0$ converge, ovvero esiste finito.

Soluzione

La funzione $f(x)$ è continua e positiva su $[0, +\infty)$, quindi basta analizzare il suo comportamento in un intorno di $+\infty$, ovvero per $x \to +\infty$. Si ha

$$f(x) = \frac{3 + 2x^{3/2} + 5x^{4\alpha} + x^{1/2}}{\log\left(1 + e^{x^5}\right)} \sim \frac{2x^{3/2} + 5x^{4\alpha}}{\log\left(e^{x^5}\right)} = \frac{2x^{3/2} + 5x^{4\alpha}}{x^5} \sim$$

$$\sim \begin{cases} \frac{2x^{3/2}}{x^5} = 2\frac{1}{x^{7/2}} & \text{se } 4\alpha < 3/2, \text{ ovvero se e solo se } \alpha < 3/8 \\ \frac{7x^{3/2}}{x^5} = 7\frac{1}{x^{7/2}} & \text{se } 4\alpha = 3/2, \text{ ovvero se e solo se } \alpha = 3/8 \\ \frac{5x^{4\alpha}}{x^5} = 5\frac{1}{x^{5-4\alpha}} & \text{se } 4\alpha > 3/2, \text{ ovvero se e solo se } \alpha > 3/8 \end{cases}$$

Nei primi due casi, l'integrale improprio converge per confronto asintotico, in quanto $7/2 > 1$. Nel terzo caso, invece, esiste finito se e solo se $5 - 4\alpha > 1$, ovvero se e solo se $\alpha < 1$. In definitiva, l'integrale improprio esiste finito (converge) per $\alpha < 1$, diverge per $\alpha \geq 1$.

Esercizio 2.13

Dato

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{x}(1 + x^\alpha)}\, dx$$

stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge, ovvero esiste finito.

Soluzione

La funzione $f(x)$ è continua e positiva su $[1, +\infty)$, quindi basta analizzare il suo comportamento in un intorno di $+\infty$, ovvero per $x \to +\infty$. Si ha

$$f(x) \sim \begin{cases} \frac{\pi/2}{x^{1/2}+x^{1/2+\alpha}} \sim \frac{\pi}{2x^{1/2}} & \text{se } \alpha < 0 \\ \frac{\pi/2}{2x^{1/2}} = \frac{\pi}{4x^{1/2}} & \text{se } \alpha = 0 \\ \frac{\pi/2}{x^{1/2}+x^{1/2+\alpha}} \sim \frac{\pi}{2x^{1/2+\alpha}} & \text{se } \alpha > 0 \end{cases}$$

Nei primi due casi, l'integrale improprio diverge per confronto asintotico, in quanto $1/2 < 1$. Nel terzo caso, invece, esiste finito se e solo se $\frac{1}{2} + \alpha > 1$, ovvero se e solo se $\alpha > \frac{1}{2}$. In definitiva, l'integrale improprio esiste finito (converge) in un intorno $U(+\infty)$ per $\alpha > \frac{1}{2}$, diverge per $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

Esercizio 2.14

Operare il cambiamento di variabile $y = \sqrt{x}$ in

$$\int_4^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+6)} dx$$

e scrivere il corrispondente integrale in dy. Determinare poi il valore dell'integrale.

Soluzione

Da $y = \sqrt{x}$, $x = y^2$, $dx = 2y\,dy$, si ottiene

$$\int_4^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+6)}dx = \int_2^{+\infty} \frac{2}{(y+2)(y+6)}dy.$$

Coi fratti semplici,

$$\int_2^{+\infty} \frac{2}{(y+2)(y+6)}dy = \lim_{a\to+\infty} \int_2^a \frac{2}{(y+2)(y+6)}dy$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{a\to+\infty} \int_2^a \left(\frac{1}{y+2} - \frac{1}{y+6}\right)dy = \frac{1}{2}\lim_{a\to+\infty} \left[\log\frac{y+2}{y+6}\right]_2^a$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{a\to+\infty} \left(\log\frac{a+2}{a+6} - \log\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\log 2.$$

Esercizio 2.15

Data la funzione

$$f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_1^x \frac{(t^3-27)(t-1)^3}{t^7+1}dt$$

- Scrivere $f'(x)$.
- Trovare gli eventuali punti di massimo o minimo relativo interni al dominio specificando il segno dei valori assunti in tali punti.
- Dire se $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ esiste e se è finito o meno motivando la risposta.
- Stabilire per quale valore di α risulta finito e diverso da 0

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^\alpha f(x)$$

motivando la risposta.

Soluzione

Per il Teorema fondamentale del calcolo integrale

$$f'(x) = \frac{(x^3-27)(x-1)^3}{x^7+1}.$$

Soluzione

La derivata prima si annulla nell'estremo $x = 1$ del dominio e nel punto interno $x = 3$. Risulta negativa per $1 < x < 3$, positiva per $x > 3$. Il punto $x = 3$ è di minimo (assoluto) interno. Il valore corrispondente

$$f(3) = \int_1^3 \frac{(t^3 - 27)(t-1)^3}{t^7 + 1} dt$$

è negativo come si deduce dal fatto che $f(1) = 0$ e che f è strettamente decrescente in $[1, 3]$. Alla stessa conclusione si giunge direttamente osservando che la funzione sotto il segno di integrale è negativa nell'intervallo $[1, 3)$.

Soluzione

La funzione f è strettamente crescente in $(3, +\infty)$, quindi il limite esiste, finito oppure $+\infty$. Per definizione,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{(t^3 - 27)(t-1)^3}{t^7 + 1} dt,$$

quindi la domanda equivale a chiedere se la funzione

$$g(t) = \frac{(t^3 - 27)(t-1)^3}{t^7 + 1}$$

è sommabile su $[1, +\infty)$ o meno.
La funzione $g(t)$ è continua in $[1, +\infty)$ quindi basta esaminare il suo comportamento per $t \to +\infty$. Si ha

$$g(t) \sim \frac{1}{t}, \quad t \to +\infty,$$

da cui la funzione non è sommabile su $[1, +\infty)$.

Concludendo, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Soluzione

Si ha $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 0$, quindi per $\alpha \geq 0$ il limite proposto è zero. Per $\alpha < 0$, diciamo $\alpha = -\beta$ con $\beta > 0$, il limite proposto

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)}{(x-1)^\beta}$$

ha la forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Applicando le regole di De L'Hospital, abbiamo

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)}{(x-1)^\beta} = \lim_{x \to 1^+} \frac{f'(x)}{\beta(x-1)^{\beta-1}}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{(x^3 - 27)(x-1)^3}{\beta(x-1)^{\beta-1}(x^7+1)} = -\frac{13}{\beta} \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)^3}{(x-1)^{\beta-1}}.$$

Tale limite esiste per ogni $\beta > 0$ ma risulta finito e diverso da zero, come richiesto, se e solo se $\beta = 4$ (ed in tale caso vale $-13/4$).

Concludendo, il limite proposto esiste finito e diverso da zero se e solo se $\alpha = -4$.

Esercizio 2.16

Calcolare

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+4)} dx$$

Dire poi come si possa anticipare, senza l' ausilio di primitive, la sommabilità della funzione nell'intervallo indicato.

Soluzione

La funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+4)}$$

è continua e positiva in $(0, +\infty)$, non limitata per $x \to 0$ e l'intervallo di integrazione non è limitato. Scritto

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^{+\infty} f(x)dx,$$

occorre e basta esaminare i comportamenti asintotici di $f(x)$ per $x \to 0$ e per $x \to +\infty$. Si ha

$$f(x) \sim \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x \to 0; \qquad f(x) \sim \frac{1}{x^{3/2}}, \quad x \to +\infty.$$

Dunque, $f(x)$ è sommabile su $(0, +\infty)$ perché lo è sia su $(0, 1]$ che su $[1, +\infty)$ per confronto.

Possiamo calcolare il valore con la sostituzione $y = \sqrt{x}$, $x = y^2$, $dx = 2y\, dy$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+4)} dx = \int_0^{+\infty} \frac{2}{(y+1)(y+4)} dy$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y+4}\right) dy = \frac{2}{3} \lim_{a\to+\infty} \left[\log \frac{y+1}{y+4}\right]_0^a$$

$$= \frac{2}{3} \lim_{a\to+\infty} \left(\log \frac{a+1}{a+4} - \log \frac{1}{4}\right) = -\frac{2}{3} \log \frac{1}{4} = \frac{2}{3} \log 4.$$

Esercizio 2.17

Sia

$$f : [1/2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \; f(x) = \int_1^x \frac{\log t}{t^2} dt$$

- Determinare gli eventuali estremanti locali e l'andamento di monotonia di f.
- Motivare l' esistenza di un asintoto orizzontale per f.

- Calcolare $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{(x-1)^2}$.

Soluzione

Per il Teorema fondamentale del calcolo integrale,

$$f'(x) = \frac{\log x}{x^2}$$

per ogni x nel dominio assegnato $[1/2, +\infty)$. La derivata si annulla per $x = 1$, risulta negativa per $1/2 \le x < 1$, positiva per $x > 1$. La funzione f è quindi strettamente decrescente in $[1/2, 1)$, strettamente crescente in $(1, +\infty)$. Il punto $x = 1$ è di minimo assoluto con valore $f(1) = 0$, in particolare la funzione assume solo valori non negativi (positivi per ogni $x \neq 1$ nel dominio assegnato).

Soluzione

Si deve motivare che $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ esiste finito. Per definizione,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\log t}{t^2} dt,$$

quindi si deve motivare il fatto che la funzione

$$g(t) = \frac{\log t}{t^2}$$

è sommabile su $[1, +\infty)$.
La funzione $g(t)$ è continua in $[1, +\infty)$ quindi basta esaminare il suo comportamento per $t \to +\infty$. Dal momento che $\log t$ è infinito di ordine inferiore a qualunque potenza, si ha

$$g(t) = O\left(\frac{1}{t^{2-\varepsilon}}\right), \quad t \to +\infty,$$

per ogni $\varepsilon > 0$,da cui, scegliendo ε tale che $2 - \varepsilon > 1$, la funzione g è sommabile su $[1, +\infty)$.

Soluzione

Si ha $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 0$, quindi il limite proposto ha la forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Applicando le regole di De L'Hospital, abbiamo

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{2(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\log x}{2(x-1)x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = \frac{1}{2} \lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 2.18

Consideriamo

$$\int_2^{+\infty} \frac{x+2}{x(x+1)(x-1)}dx.$$

Prima di calcolarlo motivare il fatto che tale integrale esiste finito.

Soluzione

La funzione

$$f(x) = \frac{x+2}{x(x+1)(x-1)}$$

è continua e positiva su $[2, +\infty)$ ed ha il comportamento asintotico

$$f(x) \sim \frac{1}{x^2}, \quad x \to +\infty,$$

quindi è impropriamente integrabile in un intorno di $+\infty$ per confronto.

Dai fratti semplici

$$\frac{x+2}{x(x+1)(x-1)} = -\frac{2}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{x-1},$$

segue la primitiva su $[2, +\infty)$

$$\int \frac{x+2}{x(x+1)(x-1)}dx = \log \frac{(x+1)^{1/2}(x-1)^{3/2}}{x^2}.$$

Quindi

$$\int_2^{+\infty} \frac{x+2}{x(x+1)(x-1)}dx = \lim_{a\to+\infty} \left[\log \frac{(x+1)^{1/2}(x-1)^{3/2}}{x^2}\right]_2^a$$

$$= \lim_{a\to+\infty} \left(\log \frac{(a+1)^{1/2}(a-1)^{3/2}}{a^2} - \log \frac{3^{1/2}}{4}\right) = \log \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Esercizio 2.19

Utilizzando il cambiamento di variabile $y = e^x$ calcolare

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{(e^x+2)(e^x+3)}dx.$$

Soluzione

Da $y = e^x$, $x = \log y$, $dx = \frac{1}{y}dy$ e dai fratti semplici, segue

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{(e^x+2)(e^x+3)}dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(y+2)(y+3)}dy$$

$$= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{y+2} - \frac{1}{y+3}\right) dy = \lim_{a\to+\infty} \left[\log\frac{y+2}{y+3}\right]_1^a$$

$$= \lim_{a\to+\infty} \left(\log\frac{a+2}{a+3} - \log\frac{3}{4}\right) = \log\frac{4}{3}$$

Esercizio 2.20

Data la funzione

$$f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_1^x \frac{t^3-27}{t^5+1}dt$$

- Scrivere $f'(x)$.
- Determinare gli eventuali punti di massimo o minimo relativo.
- Scrivere $f''(x)$.
- Per motivare la presenza di flessi o meno, fare a parte un breve studio della funzione polinomiale $y = -2x^5 + 135x^2 + 3$ riportandone un grafico qualitativo. Il polinomio in questione è uno dei fattori di $f''(x)$.
- Dire, dal punto precedente, se f ha punti di flesso. (Non si chiede di trovare esplicitamente tali punti ma solo dire se ci sono e quanti sono e di localizzarli rispetto ad altri punti notevoli come punti di massimo o minimo relativo).
- Dire se $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ esiste e se è finito o meno motivando la risposta (nel caso che sia finito non si chiede di calcolarlo).

Soluzione

Per il Teorema fondamentale del calcolo integrale,

$$f'(x) = \frac{x^3-27}{x^5+1}$$

per tutti gli x nel dominio assegnato $[1, +\infty)$.

Soluzione

La derivata si annulla per $x = 3$, è negativa in $[1, 3)$, positiva in $(3, +\infty)$. La funzione è strettamente decrescente in $[1, 3)$, strettamente crescente in $(3, +\infty)$. Il punto $x = 3$ è di

minimo assoluto, con valore

$$f(3) = \int_1^3 \frac{t^3 - 27}{t^5 + 1} dt,$$

calcolabile coi fratti semplici se necessario, di segno negativo in quanto $f(1) = 0$ ed f strettamente decrescente in $[1, 3)$. Si può determinare il segno di $f(3)$ anche direttamente osservando che la funzione sotto il segno di integrale è strettamente negativa per $t \in [1, 3)$.

Soluzione

$$f''(x) = \frac{x^2(-2x^5 + 135x^2 + 3)}{(x^5 + 1)^2}.$$

Soluzione

Si ha $\lim_{x \to \pm\infty} y(x) = \mp\infty$. Poi $y'(x) = -10x(x^3 - 27)$, da cui $y(x)$ è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$, il punto $x = 0$ è di minimo relativo con valore $y(0) = 3$, $y(x)$ è strettamente crescente in $(0, 3)$, il punto $x = 3$ è di massimo relativo con valore $y(3) = 732$, $y(x)$ è strettamente decrescente in $(3, +\infty)$. In particolare, $y(x)$ ha un unico zero per $x = \alpha$ con $\alpha \in (3, +\infty)$, $y(x) > 0$ per $x < \alpha$, $y(x) < 0$ per $x > \alpha$.

Soluzione

Nel dominio assegnato, la derivata seconda ha lo stesso segno di $-2x^5 + 135x^2 + 3$. Per quanto visto al punto precedente, la funzione f ha un flesso per $x = \alpha$, con $\alpha \in (3, +\infty)$, è strettamente convessa in $(1, \alpha)$, strettamente concava $(\alpha, +\infty)$.

Soluzione

La funzione è strettamente crescente in $(3, +\infty)$ quindi il limite esiste, finito oppure $+\infty$.

Per definizione,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^3 - 27}{t^5 + 1} dt,$$

quindi la domanda equivale a chiedere se la funzione

$$g(t) = \frac{t^3 - 27}{t^5 + 1}$$

è sommabile su $[1, +\infty)$ o meno.

La funzione $g(t)$ è continua in $[1, +\infty)$ quindi basta esaminare il suo comportamento per $t \to +\infty$. Si ha

$$g(t) \sim \frac{1}{t^2}, \quad t \to +\infty,$$

da cui la funzione è sommabile su $[1, +\infty)$.

Concludendo, $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ esiste finito. Se necessario, è possibile calcolarlo coi fratti semplici.

Integrale di Riemann e proprietà

Esercizio 3.1

Sia $f(x) = 2x + 1$ in $[0, 2]$ e sia P_n la partizione uniforme di $[0, 2]$ in n intervalli.

- Calcolare $s(f, P_n)$ e $S(f, P_n)$.
- Dedurre che f è integrabile e calcolare $\int_0^2 (2x + 1)\, dx$.

Soluzione

I punti della partizione sono $x_k = \frac{2k}{n}$ e $\Delta x_k = \frac{2}{n}$. La funzione è crescente, quindi in $I_k = [x_{k-1}, x_k]$

$$m_k = f(x_{k-1}) = \frac{4(k-1)}{n} + 1, \qquad M_k = f(x_k) = \frac{4k}{n} + 1$$

Con $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$:

$$S(f, P_n) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{4k}{n} + 1 \right) \frac{2}{n} = \frac{8}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 2 = 6 + \frac{4}{n}$$

$$s(f, P_n) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{4(k-1)}{n} + 1 \right) \frac{2}{n} = \frac{8}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} + 2 = 6 - \frac{4}{n}$$

Per ogni n si ha $6 - \frac{4}{n} \le \sup_P s(f, P) \le \inf_P S(f, P) \le 6 + \frac{4}{n}$; per $n \to +\infty$ si ottiene che f è integrabile e

$$\int_0^2 (2x + 1)\, dx = 6$$

È l'area del trapezio di basi $f(0) = 1$, $f(2) = 5$ e altezza 2: $\frac{(1+5)\cdot 2}{2} = 6$.

Esercizio 3.2

Usando la formula $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$, calcolare le somme inferiori e superiori di $f(x) =$

x^3 in $[0,1]$ relative alla partizione uniforme P_n, e dedurre il valore di $\int_0^1 x^3\,dx$.

Soluzione

Con $x_k = \frac{k}{n}$ e f crescente, $m_k = \frac{(k-1)^3}{n^3}$ e $M_k = \frac{k^3}{n^3}$. Quindi

$$S(f,P_n) = \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{(n+1)^2}{4n^2}, \qquad s(f,P_n) = \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \frac{(n-1)^2}{4n^2}$$

Entrambe tendono a $\frac{1}{4}$ per $n \to +\infty$ e la differenza $S - s = \frac{1}{n}$ tende a 0. Dunque

$$\int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}$$

Esercizio 3.3

Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = -1$ se $x \notin \mathbb{Q}$.

- Dimostrare che f non è integrabile in $[0,1]$.
- Dimostrare che $|f|$ è integrabile e calcolarne l'integrale.
- Che cosa si conclude sul Teorema dell'integrale del valore assoluto?

Soluzione

Ogni intervallo I_k di una partizione contiene numeri razionali e irrazionali, quindi $m_k = -1$ e $M_k = 1$. Per ogni partizione

$$s(f,P) = -\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = -1, \qquad S(f,P) = 1$$

L'estremo superiore delle somme inferiori (-1) è diverso dall'estremo inferiore delle somme superiori (1): f non è integrabile.

Invece $|f(x)| = 1$ per ogni x: è costante, quindi integrabile, e $\int_0^1 |f(x)|\,dx = 1$.

Il teorema dice che se f è integrabile allora $|f|$ è integrabile; l'esempio mostra che il viceversa è falso.

Esercizio 3.4

Senza calcolare gli integrali, dimostrare le stime

$$\text{(a)}\ \ \frac{1}{2} \le \int_0^1 \frac{dx}{1+x^4} \le 1, \qquad \text{(b)}\ \ 1 \le \int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx \le \sqrt{2}$$

e stabilire, sempre senza calcolarli, quale dei due integrali $\int_0^1 x^2\,dx$ e $\int_0^1 x^3\,dx$ è maggiore, e quale dei due integrali $\int_1^2 x^2\,dx$ e $\int_1^2 x^3\,dx$.

Soluzione

Si usa il Corollario delle stime dell'integrale, con $b-a=1$.

- (a) In $[0,1]$ si ha $0 \le x^4 \le 1$, quindi $\frac{1}{2} \le \frac{1}{1+x^4} \le 1$.
- (b) In $[0,1]$ si ha $0 \le x^3 \le 1$, quindi $1 \le \sqrt{1+x^3} \le \sqrt{2}$.

Per $x \in [0,1]$ vale $x^3 \le x^2$, quindi per il Teorema di monotonia dell'integrale $\int_0^1 x^3\,dx \le \int_0^1 x^2\,dx$. Per $x \in [1,2]$ vale $x^3 \ge x^2$, quindi $\int_1^2 x^3\,dx \ge \int_1^2 x^2\,dx$. (Infatti $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ e $\frac{15}{4} > \frac{7}{3}$.)

Esercizio 3.5

Sia $f(x) = |x-1|$ in $[0,3]$. Calcolare $\int_0^3 f(x)\,dx$ con l'interpretazione geometrica, la media integrale di f in $[0,3]$ e tutti i punti $c \in [0,3]$ previsti dal Teorema della media integrale.

Soluzione

Il grafico di f in $[0,3]$ forma con l'asse x due triangoli: in $[0,1]$ di base 1 e altezza 1, in $[1,3]$ di base 2 e altezza 2. Per l'additività

$$\int_0^3 |x-1|\,dx = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

La media integrale è $\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{6}$. I punti cercati risolvono $|c-1| = \frac{5}{6}$: $c = \frac{1}{6}$ oppure $c = \frac{11}{6}$, entrambi in $[0,3]$. Il punto del teorema esiste ma non è necessariamente unico.

Esercizio 3.6

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e non negativa, con $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Dimostrare che $f(x) = 0$ per ogni $x \in [a,b]$. La conclusione resta vera se f è solo integrabile?

Soluzione

Per assurdo, sia $f(x_0) > 0$ per un $x_0 \in [a,b]$. Per la permanenza del segno (continuità di f in x_0) esiste un intervallo $[c,d] \subseteq [a,b]$, con $c < d$ e $x_0 \in [c,d]$, in cui $f(x) \ge \frac{f(x_0)}{2}$. Per l'additività, per $f \ge 0$ e per il Corollario delle stime dell'integrale

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_c^d f(x)\,dx \ge \frac{f(x_0)}{2}\,(d-c) > 0$$

in contraddizione con l'ipotesi.

Senza continuità la conclusione è falsa: la funzione uguale a 1 in $x = a$ e a 0 altrove è integrabile, non negativa, con integrale 0 (Osservazione sulle modifiche in un numero finito di punti), ma non è identicamente nulla.

Esercizio 3.7

Dimostrare che $f(x) = \sqrt{x}$ è uniformemente continua in $[0, 1]$, sia con il Teorema di Heine–Cantor sia direttamente, trovando un δ esplicito per ogni $\varepsilon > 0$. (Suggerimento: $|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$.)

Soluzione

La funzione è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[0, 1]$: per il Teorema di Heine–Cantor è uniformemente continua.

Direttamente: per $0 \leq y \leq x$ si ha $\sqrt{x} \leq \sqrt{y} + \sqrt{x-y}$ (elevando al quadrato: $x \leq y + (x-y) + 2\sqrt{y(x-y)}$), quindi $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$. Dato $\varepsilon > 0$, con $\delta = \varepsilon^2$:

$$|x - y| < \varepsilon^2 \quad \Longrightarrow \quad |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|} < \varepsilon$$

Il δ non dipende dai punti: è proprio la continuità uniforme (anche in $[0, +\infty)$).

Capitolo 4

Funzioni integrali e teorema fondamentale

Esercizio 4.1

Calcolare la derivata delle funzioni

(a) $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^3} \cos(t^2)\,dt$, (b) $G(x) = \displaystyle\int_{\sin x}^{1} e^{t^2}\,dt$, (c) $H(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \log(1+t^2)\,dt$

Soluzione

Le integrande sono continue in $\mathbb{R}$; si applica il Teorema di derivazione delle funzioni integrali, $\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt = f(\beta(x))\,\beta'(x) - f(\alpha(x))\,\alpha'(x)$.

- (a) $\beta(x) = x^3$, α costante: $F'(x) = \cos(x^6)\cdot 3x^2$.
- (b) β costante, $\alpha(x) = \sin x$: $G'(x) = -e^{\sin^2 x}\cos x$.
- (c) $\beta(x) = 2x$, $\alpha(x) = x$: $H'(x) = 2\log(1+4x^2) - \log(1+x^2)$.

Esercizio 4.2

Calcolare i limiti

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^x (e^t - 1)\,dt$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3}\int_0^{x^2} \sin\sqrt{t}\,dt$, (c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x \arctan t\,dt$

Soluzione

In tutti i casi si ha una forma indeterminata e si usa il Teorema di De l'Hospital, derivando il numeratore con il teorema fondamentale del calcolo integrale.

- (a) Forma $\frac{0}{0}$: $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}$.
- (b) Forma $\frac{0}{0}$; la derivata del numeratore è $\sin\sqrt{x^2}\cdot 2x = 2x\sin x$ (per $x > 0$): $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{2x\sin x}{3x^2} = \frac{2}{3}$.

- (c) Il numeratore tende a $+\infty$, perché $\arctan t \geq \frac{\pi}{4}$ per $t \geq 1$. Forma $\frac{\infty}{\infty}$: $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\arctan x}{1} = \dfrac{\pi}{2}$.

Esercizio 4.3

Calcolare, con la formula fondamentale del calcolo integrale,

$$\text{(a)} \int_0^{\pi/4} \tan^2 x\, dx, \qquad \text{(b)} \int_1^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\, dx, \qquad \text{(c)} \int_{-1}^2 |x|\, dx$$

Soluzione

- (a) $\tan^2 x = (1+\tan^2 x) - 1$ ha primitiva $\tan x - x$: $\left[\tan x - x\right]_0^{\pi/4} = 1 - \dfrac{\pi}{4}$.
- (b) $\frac{x-1}{\sqrt{x}} = x^{1/2} - x^{-1/2}$: $\left[\dfrac{2}{3}x^{3/2} - 2x^{1/2}\right]_1^4 = \left(\dfrac{16}{3} - 4\right) - \left(\dfrac{2}{3} - 2\right) = \dfrac{8}{3}$.
- (c) Per l'additività: $\displaystyle\int_{-1}^0 (-x)\, dx + \int_0^2 x\, dx = \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$.

Esercizio 4.4

Data la funzione

$$F(x) = \int_0^x (t^2-1)\, e^{-t^2}\, dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

- stabilire gli intervalli di monotonia e i punti di estremo locale di F;
- stabilire il segno di $F(1)$ e di $F(-1)$;
- dimostrare che F è dispari.

Soluzione

- L'integranda è continua, quindi $F'(x) = (x^2-1)\, e^{-x^2}$, che ha il segno di x^2-1: F è crescente in $(-\infty,-1]$ e in $[1,+\infty)$, decrescente in $[-1,1]$. Il punto $x=-1$ è di massimo locale, $x=1$ di minimo locale.
- $F(0) = 0$ e F è decrescente in $[-1,1]$: quindi $F(1) < 0 < F(-1)$.
- La funzione $H(x) = F(x) + F(-x)$ ha derivata $H'(x) = F'(x) - F'(-x) = 0$, perché F' è pari. Quindi H è costante e $H(x) = H(0) = 0$: $F(-x) = -F(x)$.

Esercizio 4.5

Sia $G(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{dt}{\log t}$ per $x > 1$. Stabilire il segno di G, la monotonia e la concavità di G, e scrivere l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x = e$, sapendo che $G(e) = \gamma$ (non si chiede di calcolare γ).

Soluzione

L'integranda $\frac{1}{\log t}$ è continua in $(1, +\infty)$, che è un intervallo contenente 2. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$G'(x) = \frac{1}{\log x} > 0, \qquad G''(x) = -\frac{1}{x \log^2 x} < 0, \quad \forall x > 1$$

Quindi G è crescente e concava in $(1, +\infty)$. Poiché $G(2) = 0$ e G è crescente, $G(x) < 0$ per $1 < x < 2$ e $G(x) > 0$ per $x > 2$ (in particolare $\gamma > 0$). La tangente in $x = e$ ha pendenza $G'(e) = 1$:

$$y = \gamma + (x - e)$$

Esercizio 4.6

- Trovare una funzione continua f tale che $\int_0^x f(t)\,dt = x^2 + \sin x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
- Esiste una funzione continua f tale che $\int_0^x f(t)\,dt = x^2 + 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$?

Soluzione

- Se f è continua, per la prima parte del teorema fondamentale il primo membro è derivabile con derivata $f(x)$. Derivando: $f(x) = 2x + \cos x$. Verifica con la seconda parte: $\int_0^x (2t + \cos t)\,dt = \left[t^2 + \sin t\right]_0^x = x^2 + \sin x$.
- No: per $x = 0$ il primo membro vale $\int_0^0 f = 0$, il secondo 1. Derivare non basta: $2x$ ha come funzione integrale x^2, non $x^2 + 1$.

Esercizio 4.7

Sia $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{\sin t}\,dt$. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di F nel punto di ascissa 0 e stabilire se F è invertibile in $\mathbb{R}$.

Soluzione

$F(0) = 0$ e $F'(x) = e^{\sin x}$, quindi $F'(0) = 1$: la tangente è $y = x$.

Poiché $F'(x) = e^{\sin x} > 0$ per ogni x, F è crescente in $\mathbb{R}$, quindi iniettiva e invertibile sulla

sua immagine. Inoltre $F'(x) \geq e^{-1}$: per $x > 0$ si ha $F(x) \geq \frac{x}{e} \to +\infty$, e per simmetria del ragionamento $F(x) \leq \frac{x}{e} \to -\infty$ per $x \to -\infty$. Essendo continua, F è una biiezione di $\mathbb{R}$ su $\mathbb{R}$.

Capitolo 5

Integrali definiti, aree e valor medio

Esercizio 5.1

Calcolare per parti

$$\text{(a)} \quad \int_0^1 x\,e^{2x}\,dx, \qquad \text{(b)} \quad \int_1^e x^2 \log x\,dx$$

Soluzione

- (a) Con $f = x$, $g' = e^{2x}$, $g = \frac{e^{2x}}{2}$:

$$\int_0^1 x\,e^{2x}\,dx = \left[\frac{x\,e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}\,dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{e^{2x}}{4}\right]_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2-1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$$

- (b) Con $f = \log x$, $g' = x^2$, $g = \frac{x^3}{3}$:

$$\int_1^e x^2 \log x\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3}\,dx = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3-1}{9} = \frac{2e^3+1}{9}$$

Esercizio 5.2

Calcolare per sostituzione

$$\text{(a)} \quad \int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx, \qquad \text{(b)} \quad \int_0^{\log 3} \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\,dx, \qquad \text{(c)} \quad \int_0^{\pi/2} \sin^3 x\,dx$$

Soluzione

- (a) Con $t = x+1$, $x = t-1$, $dx = dt$, estremi 1 e 4:

$$\int_1^4 (t-1)\sqrt{t}\,dt = \left[\frac{2}{5}t^{5/2} - \frac{2}{3}t^{3/2}\right]_1^4 = \left(\frac{64}{5} - \frac{16}{3}\right) - \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3}\right) = \frac{116}{15}$$

- (b) Con $t = e^x$, $dt = e^x\,dx$, estremi 1 e 3:

$$\int_1^3 \frac{dt}{(t+1)^2} = \left[-\frac{1}{t+1}\right]_1^3 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

- (c) $\sin^3 x = (1-\cos^2 x)\sin x$; con $t = \cos x$, $dt = -\sin x\,dx$, estremi 1 e 0:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\,dx = \int_0^1 (1-t^2)\,dt = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Esercizio 5.3

Calcolare

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+3x+2}\,dx$$

Soluzione

Il denominatore ha radici -1 e -2: $x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$. Da $\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$ segue $x = A(x+2) + B(x+1)$; con $x=-1$: $A=-1$; con $x=-2$: $B=2$. Quindi

$$\int_0^1 \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2}\right) dx = \big[-\log(x+1)+2\log(x+2)\big]_0^1 = -\log 2 + 2\log 3 - 2\log 2 = \log\frac{9}{8}$$

Esercizio 5.4

Calcolare l'area della regione limitata compresa fra i grafici di $y = x^3$ e $y = x$.

Soluzione

Le intersezioni risolvono $x^3 = x$: $x \in \{-1, 0, 1\}$. In $[-1,0]$ si ha $x^3 \geq x$, in $[0,1]$ si ha $x \geq x^3$. Quindi

$$\text{Area} = \int_{-1}^0 (x^3 - x)\,dx + \int_0^1 (x - x^3)\,dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

(le due parti sono uguali perché entrambe le funzioni sono dispari).

Esercizio 5.5

Determinare la misura dell'insieme

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq x\,e^{-x}\right\}$$

Soluzione

$x\,e^{-x} \geq 0$ in $[0,2]$, quindi la misura è $\int_0^2 x\,e^{-x}\,dx$. Per parti, con $f = x$, $g' = e^{-x}$:

$$\int x\,e^{-x}\,dx = -x\,e^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -(x+1)\,e^{-x} + c$$

$$\int_0^2 x\,e^{-x}\,dx = \big[-(x+1)\,e^{-x}\big]_0^2 = 1 - \frac{3}{e^2}$$

Esercizio 5.6

Calcolare l'area della regione compresa fra il grafico di $y = \log x$, l'asse x e le rette $x = \frac{1}{e}$ e $x = e$.

Soluzione

Il logaritmo è negativo in $\left[\frac{1}{e}, 1\right)$ e positivo in $(1, e]$: l'area è $\int_{1/e}^{e} |\log x|\,dx$. Con la primitiva $x\log x - x$:

$$\int_{1/e}^{1} (-\log x)\,dx = \big[x - x\log x\big]_{1/e}^{1} = 1 - \frac{2}{e}, \qquad \int_1^e \log x\,dx = \big[x\log x - x\big]_1^e = 1$$

L'area è $2 - \frac{2}{e}$.

Esercizio 5.7

Calcolare il valor medio di $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ in $[-1,1]$ e i punti $c \in [-1,1]$ in cui $f(c)$ è uguale al valor medio.

Soluzione

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\big[\arctan x\big]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Da $\frac{1}{1+c^2} = \frac{\pi}{4}$ segue $c^2 = \frac{4}{\pi} - 1$, cioè $c = \pm\sqrt{\frac{4}{\pi} - 1} \approx \pm 0{,}52$, entrambi in $[-1,1]$.

Capitolo 6

Integrali impropri

Esercizio 6.1

Calcolare, mediante la definizione, gli integrali impropri

$$\text{(a)}\ \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}, \qquad \text{(b)}\ \int_0^{+\infty} x\,e^{-x}\,dx, \qquad \text{(c)}\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Soluzione

- (a) $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$, quindi

$$\int_1^{\omega} \frac{dx}{x(x+1)} = \left[\log\frac{x}{x+1}\right]_1^{\omega} = \log\frac{\omega}{\omega+1} + \log 2 \to \log 2 \quad \text{per} \quad \omega \to +\infty$$

- (b) Per parti, $\int x\,e^{-x}\,dx = -(x+1)\,e^{-x} + c$; quindi $\int_0^{\omega} x\,e^{-x}\,dx = 1 - (\omega+1)\,e^{-\omega} \to 1$, per la gerarchia degli infiniti.
- (c) L'integranda è illimitata vicino a 1:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \big[\arcsin x\big]_0^{1-\varepsilon} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

Esercizio 6.2

- Calcolare per parti l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{\log(x+2)}{(x+1)^2}\,dx$.
- Calcolare quindi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log(x+2)}{(x+1)^2}\,dx$.

Soluzione

Con $f = \log(x+2)$ e $g' = \frac{1}{(x+1)^2}$, $g = -\frac{1}{x+1}$:

$$\int \frac{\log(x+2)}{(x+1)^2}\,dx = -\frac{\log(x+2)}{x+1} + \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$$

e, con i fratti semplici $\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$,

$$\int \frac{\log(x+2)}{(x+1)^2}\,dx = -\frac{\log(x+2)}{x+1} + \log\frac{x+1}{x+2} + c$$

Per $\omega \to +\infty$ si ha $\frac{\log(\omega+2)}{\omega+1} \to 0$ e $\log\frac{\omega+1}{\omega+2} \to 0$; in $x = 0$ la primitiva vale $-\log 2 + \log\frac{1}{2} = -2\log 2$. Quindi

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(x+2)}{(x+1)^2}\,dx = 0 - (-2\log 2) = 2\log 2$$

Esercizio 6.3

Stabilire il carattere degli integrali impropri

$$\text{(a)}\ \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}+1}{x^2+1}\,dx, \qquad \text{(b)}\ \int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}, \qquad \text{(c)}\ \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}, \qquad \text{(d)}\ \int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^2}\,dx$$

Soluzione

Le integrande sono continue e positive negli intervalli considerati (in (d) positiva per $x > 1$).

- (a) Per $x \to +\infty$: $\frac{\sqrt{x}+1}{x^2+1} \sim \frac{1}{x^{3/2}}$; poiché $\frac{3}{2} > 1$, converge.
- (b) Per $x \to 0^+$: $x + \sqrt{x} \sim \sqrt{x}$, quindi l'integranda è asintotica a $\frac{1}{x^{1/2}}$; poiché $\frac{1}{2} < 1$, converge.
- (c) Per $x \to 0^+$: $\sin x \sim x$, quindi $\frac{1}{\sin x} \sim \frac{1}{x}$: diverge.
- (d) Definitivamente $\log x \le \sqrt{x}$ (gerarchia degli infiniti), quindi $0 \le \frac{\log x}{x^2} \le \frac{1}{x^{3/2}}$: per confronto converge. (Per parti si trova anche il valore: 1.)

Esercizio 6.4

Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ convergono

$$\text{(a)}\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha\,(1+x)}, \qquad \text{(b)}\ \int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^\alpha}\,dx$$

Soluzione

- (a) Spezziamo in $x = 1$. Per $x \to 0^+$ l'integranda è asintotica a $\frac{1}{x^\alpha}$: converge se e solo se $\alpha < 1$. Per $x \to +\infty$ è asintotica a $\frac{1}{x^{\alpha+1}}$: converge se e solo se $\alpha + 1 > 1$, cioè $\alpha > 0$. L'integrale converge se e solo se $0 < \alpha < 1$.
- (b) L'integranda è continua e non negativa in $(0, 1]$. Per $x \to 0^+$, $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, quindi $\frac{1-\cos x}{x^\alpha} \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-2}}$: converge se e solo se $\alpha - 2 < 1$, cioè $\alpha < 3$. (Per $\alpha \leq 2$ l'integranda è limitata e l'integrale è un integrale di Riemann.)

Esercizio 6.5

Calcolare

$$\text{(a)} \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \log^3 x}, \qquad \text{(b)} \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\, dx$$

Soluzione

- (a) Con $t = \log x$, $dt = \frac{dx}{x}$, una primitiva è $-\frac{1}{2\log^2 x}$:

$$\int_e^{\omega} \frac{dx}{x \log^3 x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\log^2 \omega} \to \frac{1}{2}$$

- (b) Con $x = t^2$, $t \geq 0$, $dx = 2t\, dt$: $\displaystyle\int_0^{\omega} e^{-\sqrt{x}}\, dx = \int_0^{\sqrt{\omega}} 2t\, e^{-t}\, dt = 2\big[-(t+1)\, e^{-t}\big]_0^{\sqrt{\omega}} \to 2$.

Esercizio 6.6

Dimostrare che $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{3/2}}\, dx$ converge. I criteri del confronto si possono applicare direttamente all'integranda?

Soluzione

L'integranda cambia segno infinite volte, quindi i criteri del confronto (che richiedono funzioni non negative) non si applicano direttamente. Però

$$\left|\frac{\cos x}{x^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{x^{3/2}}$$

e $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ converge ($\frac{3}{2} > 1$). Per confronto converge $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^{3/2}}\right| dx$ e, per il Teorema della convergenza assoluta, converge l'integrale dato.

Esercizio 6.7

Usando il criterio integrale, stabilire per quali $p > 0$ converge la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\,(\log k)^p}$$

Soluzione

La funzione $f(x) = \frac{1}{x(\log x)^p}$ è continua, positiva e decrescente in $[2, +\infty)$ (denominatore crescente e positivo). Per il Teorema del criterio integrale (a partire da $k_0 = 2$) la serie ha lo stesso carattere di $\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$. Con $t = \log x$:

$$\int_2^{\omega} \frac{dx}{x(\log x)^p} = \int_{\log 2}^{\log \omega} \frac{dt}{t^p}$$

Poiché $\log 2 > 0$, l'integrale su $[\log 2, 1]$ è finito; su $[1, +\infty)$, per il Teorema dell'integrale improprio notevole all'infinito, converge se e solo se $p > 1$. La serie converge se e solo se $p > 1$.