



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Analisi Matematica 1

Esercizi, volume 6 — Serie e integrali

Gli esercizi svolti sulle serie numeriche e, nella seconda parte, su primitive e integrali, una scheda per capitolo, con la soluzione subito dopo ogni testo. Le schede sono di Fabio Furini e Gianluca Priori; molti esercizi sono tratti da M. Bramanti, *Esercitazioni di Analisi matematica 1*, Esculapio.

Fabio Furini

fabiofurini.github.io

Dipartimento di Ingegneria informatica, automatica e gestionale — Sapienza Università di Roma

Versione online e materiale scaricabile:
fabiofurini.github.io/analisi-matematica-1/
github.com/fabiofurini/analisi-matematica-1

Anno accademico 2026–2027

Indice

I	Serie	2
1	Serie numeriche	3
II	Primitive e integrali	16
2	Primitive	17
3	Integrali	31



Parte I

Serie



Serie numeriche

Esercizio 1.1

Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere della seguente serie, utilizzando opportunamente i criteri studiati:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{\alpha^2-3})^n}{\log(1+n)}$$

Soluzione

Si tratta di una serie a termini positivi. Applicando il criterio del rapporto, si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(e^{\alpha^2-3})^{n+1}}{\log(1+n+1)} \frac{\log(1+n)}{(e^{\alpha^2-3})^n} = e^{\alpha^2-3}$$

Il criterio assicura che la serie proposta converge per $-\sqrt{3} < \alpha < \sqrt{3}$, diverge per $\alpha < -\sqrt{3}$ e per $\alpha > \sqrt{3}$, mentre non fornisce alcuna indicazione per $\alpha = \pm\sqrt{3}$. Per $\alpha = \pm\sqrt{3}$, la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(1+n)}$$

che diverge per il criterio del confronto, in quanto

$$a_n = \frac{1}{\log(1+n)} > \frac{1}{n}$$

e quest'ultimo è il termine generale della serie armonica, che diverge. Complessivamente, la serie proposta converge per $-\sqrt{3} < \alpha < \sqrt{3}$, mentre diverge per $\alpha \leq -\sqrt{3}$ e per $\alpha \geq \sqrt{3}$.

Esercizio 1.2

Determinare il carattere della seguente serie, utilizzando opportunamente i criteri studiati:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^3}$$

Soluzione

Osserviamo, anzitutto, come la condizione necessaria di convergenza sia soddisfatta. Inoltre, si ha

$$a_n = \frac{\log n}{n^3} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$$

Per confronto con la serie armonica generalizzata di esponente $p = 2$, la serie proposta converge.

Esercizio 1.3

Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere della seguente serie, utilizzando opportunamente i criteri studiati:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2-\alpha}}{\arctan \frac{1}{n^2} + \frac{1}{\sqrt{n}}}$$

Soluzione

Si tratta di una serie a termini positivi. Poiché

$$\arctan \frac{1}{n^2} + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

si ha

$$a_n = \frac{n^{2-\alpha}}{\arctan \frac{1}{n^2} + \frac{1}{\sqrt{n}}} \sim \frac{n^{2-\alpha}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{n^{\alpha-\frac{5}{2}}}$$

Pertanto dal criterio del confronto asintotico segue che la serie converge per $\alpha - \frac{5}{2} > 1$, ovvero se e solo se $\alpha > \frac{7}{2}$.

Esercizio 1.4

Determinare il carattere della seguente serie, utilizzando opportunamente i criteri studiati:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{2n+5}$$

Soluzione

Osservando che

$$\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari, ovvero } n = 2k, \\ (-1)^k & \text{se } n \text{ è dispari, ovvero } n = 2k+1. \end{cases}$$

quindi in realtà la serie proposta è sommata solo sugli indici dispari e si può riscrivere nella

forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{2n+5} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1}(-1)^k}{2(2k+1)+5} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k+7}$$

Quest'ultima è una serie a segni alterni; non converge assolutamente, in quanto $\left|\frac{(-1)^{k+1}}{4k+7}\right| = \frac{1}{4k+7} \sim \frac{1}{4k}$ per $k \rightarrow +\infty$, dove l'ultimo è il termine generale di una serie armonica (che diverge). Tuttavia, la serie proposta converge semplicemente per il criterio di Leibniz. È infatti immediato dimostrare che la successione definita da $a_k = \frac{1}{4k+7}$ è positiva, infinitesima e monotona decrescente.

Esercizio 1.5

Determinare il carattere della seguente serie, utilizzando opportunamente i criteri studiati:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{2}{n}}}{n}$$

Soluzione

Ricordando che $\sqrt{1 - \frac{2}{n}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, si ha

$$a_n = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{2}{n}}}{n} = \frac{1 - 1 + \frac{1}{2}\frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{n} \sim \frac{\frac{1}{n}}{n} = \frac{1}{n^2}$$

che è il termine generale della serie armonica generalizzata di esponente $2 > 1$. Pertanto la serie di partenza converge per il criterio del confronto asintotico.

Esercizio 1.6

Determinare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, il carattere della seguente serie, utilizzando opportunamente i criteri studiati:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2/n} - 1 - \frac{x}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}}}$$

Soluzione

Per esercizio. Utilizzare lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per e^t , con $t = \frac{2}{n}$. Dal confronto asintotico con la serie armonica generalizzata, la serie proposta risulterà essere divergente per $x \neq 2$ e convergente per $x = 2$.

Esercizio 1.7

Determinare il carattere della seguente serie, utilizzando opportunamente i criteri studiati:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \left(\frac{n^2 + 3\sqrt{n}}{n^2 + 4} \right)$$

Soluzione

Si tratta di una serie a termini positivi. Poiché

$$\log \left(\frac{n^2 + 3\sqrt{n}}{n^2 + 4} \right) = \log \left(1 + \frac{n^2 + 3\sqrt{n}}{n^2 + 4} - 1 \right) \sim \frac{n^2 + 3\sqrt{n}}{n^2 + 4} - 1$$

Allora

$$a_n = \log \left(\frac{n^2 + 3\sqrt{n}}{n^2 + 4} \right) \sim \frac{n^2 + 3\sqrt{n}}{n^2 + 4} - 1 = \frac{3\sqrt{n} - 4}{n^2 + 4} \sim 3 \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Pertanto, per confronto con la serie armonica generalizzata di esponente $\frac{3}{2} > 1$, segue che la serie converge per il criterio del confronto asintotico.

Esercizio 1.8

Determinare il carattere della seguente serie, utilizzando opportunamente i criteri studiati:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{n + 1}$$

Soluzione

Si tratta di una serie a termini positivi. Poiché

$$e^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}$$

si ha immediatamente che

$$a_n = \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{n + 1} \sim \frac{\frac{1}{n}}{n} = \frac{1}{n^2}$$

Pertanto, per confronto con la serie armonica generalizzata di esponente $2 > 1$, segue che la serie converge per il criterio del confronto asintotico.

Esercizio 1.9

Determinare il carattere della seguente serie, utilizzando opportunamente i criteri studiati:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{n^2+2n}{n^2+1}} - e \right)$$

Soluzione

Si tratta di una serie a termini positivi. Si ha

$$a_n = e^{\frac{n^2+2n}{n^2+1}} - e = e \left(e^{\frac{n^2+2n}{n^2+1} - 1} - 1 \right) = e \left(e^{\frac{2n-1}{n^2+1}} - 1 \right) \sim e \frac{2n-1}{n^2+1} \sim 2e \frac{1}{n}$$

che è il termine generale della serie armonica. Si è sfruttato il fatto che $\frac{2n-1}{n^2+1} \rightarrow 0$ e anche $\frac{2n-1}{n^2+1} \sim \frac{2}{n}$ per $n \rightarrow +\infty$. Pertanto, la serie di partenza diverge per il criterio del confronto asintotico.

Esercizio 1.10

Determinare, al variare di $\alpha > 0$, il carattere della seguente serie, utilizzando opportunamente i criteri studiati:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n^{3\alpha}} \right) n^{\frac{3}{2}-2\alpha}$$

Soluzione

Si tratta di una serie a termini positivi. Poiché

$$\sin \frac{1}{n^{3\alpha}} \sim \frac{1}{n^{3\alpha}}$$

allora si ha immediatamente che

$$a_n = \left(\sin \frac{1}{n^{3\alpha}} \right) n^{\frac{3}{2}-2\alpha} \sim \frac{n^{\frac{3}{2}-2\alpha}}{n^{3\alpha}} = \frac{1}{n^{5\alpha-\frac{3}{2}}}$$

Pertanto, dal criterio del confronto asintotico segue che la serie converge per $5\alpha - \frac{3}{2} > 1$, ovvero se e solo se $\alpha > \frac{1}{2}$.

Esercizio 1.11

Determinare, al variare di $\alpha > 0$, il carattere della seguente serie, utilizzando opportunamente i criteri studiati:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^\alpha}} - 1 \right) n^{2-\alpha}$$

Soluzione

Si tratta di una serie a termini positivi. Poiché

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n^\alpha}} - 1 \sim \frac{1}{2} \frac{1}{n^\alpha}$$

allora

$$a_n = \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^\alpha}} - 1 \right) n^{2-\alpha} \sim \frac{1}{2n^\alpha} n^{2-\alpha} = \frac{1}{2n^{2\alpha-2}}$$

Pertanto, dal criterio del confronto asintotico segue che la serie converge per $2\alpha - 2 > 1$, ovvero se e solo se $\alpha > \frac{3}{2}$.

Esercizio 1.12

Determinare, al variare di $\alpha > 0$, il carattere della seguente serie, utilizzando opportunamente i criteri studiati:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{1}{n^\alpha} - 1 \right) n^{1-\alpha}$$

Soluzione

La serie proposta è a termini negativi (si ragioni sul coseno di un angolo compreso fra 0 ed 1). Pertanto, possiamo applicare ad essa i criteri delle serie a termini positivi, mettendo in evidenza il segno negativo. Osservando che, per $\alpha > 0$,

$$\left(\cos \frac{1}{n^\alpha} - 1 \right) n^{1-\alpha} \sim -\frac{n^{1-\alpha}}{2n^{2\alpha}} = -\frac{1}{2n^{3\alpha-1}}$$

si ottiene subito che, per il criterio del confronto asintotico, la serie proposta converge per $3\alpha - 1 > 1$, cioè $\alpha > \frac{2}{3}$.

Esercizio 1.13

Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere della seguente serie, utilizzando opportunamente i criteri studiati:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha^2 - 5\alpha + 7|^n}{3n^2 + \log n}$$

Soluzione

Osserviamo, innanzitutto, che si tratta di una serie a termini positivi, in quanto $\alpha^2 - 5\alpha + 7 > 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Utilizzando il criterio della radice, si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{|\alpha^2 - 5\alpha + 7|^n}{3n^2 + \log n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|\alpha^2 - 5\alpha + 7|}{\sqrt[n]{3n^2 + \log n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|\alpha^2 - 5\alpha + 7|}{\sqrt[n]{3} \sqrt[n]{n^2}} = |\alpha^2 - 5\alpha + 7|$$

dove abbiamo tenuto conto della gerarchia degli infiniti e del limite $\sqrt[n]{n^2} \rightarrow 1$. Poiché $|\alpha^2 - 5\alpha + 7| < 1$ è soddisfatta se e solo se $2 < \alpha < 3$, mentre $|\alpha^2 - 5\alpha + 7| > 1$ è soddisfatta

se e solo se $\alpha < 2$ o $\alpha > 3$, e $|\alpha^2 - 5\alpha + 7| = 1$ se e solo se $\alpha = 2$ o $\alpha = 3$, il criterio assicura che la serie proposta

- converge per $2 < \alpha < 3$;
- diverge per $\alpha < 2$ o $\alpha > 3$.

Per $\alpha = 2$ o $\alpha = 3$, la serie proposta ha come termine generale $a_n = \frac{1}{3n^2 + \log n} \sim \frac{1}{3n^2}$, che soddisfa la condizione necessaria e converge per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente $2 > 1$.

Esercizio 1.14

Determinare il carattere della seguente serie, utilizzando opportunamente i criteri studiati:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \left(\sqrt{1 + \frac{3}{n^3}} - 1 \right)}$$

Soluzione

Si tratta di una serie a termini positivi. Poiché

$$\sqrt{1 + \frac{3}{n^3}} - 1 \sim \frac{1}{2} \frac{3}{n^3}$$

allora

$$a_n = \frac{1}{n \left(\sqrt{1 + \frac{3}{n^3}} - 1 \right)} \sim \frac{1}{n \left(\frac{3}{2n^3} \right)} = \frac{2}{3} n^2$$

Pertanto la serie proposta diverge in quanto il termine generale non è infinitesimo.

Esercizio 1.15

Determinare il carattere della seguente serie, utilizzando opportunamente i criteri studiati:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\sin n} \left(\sin \frac{1}{n} \right) \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \right) \cos n$$

Soluzione

Per esercizio. La serie proposta converge assolutamente e quindi anche semplicemente.

Esercizio 1.16

Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere della seguente serie, utilizzando opportunamente i criteri studiati:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{[2(\log n)^{\alpha-7}]^n}{n^2}$$

Soluzione

Per esercizio. Applicare il criterio della radice. La serie proposta converge per $\alpha < 7$, diverge per $\alpha \geq 7$.

Esercizio 1.17

Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere della seguente serie, utilizzando opportunamente i criteri studiati:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^3(7^{\alpha+2})^n}$$

Soluzione

Per esercizio. Applicare il criterio della radice. La serie proposta converge per $\alpha \geq \frac{\log 4}{\log 7} - 2$.

Esercizio 1.18

Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere della seguente serie, utilizzando opportunamente i criteri studiati:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\cos \left(\frac{1}{n+2} \right)^{\alpha} - 1 \right] n^4$$

Soluzione

La serie proposta è a termini negativi (si ragioni sul coseno di un angolo compreso fra 0 ed 1). Pertanto, possiamo applicare ad essa i criteri delle serie a termini positivi, mettendo in evidenza il segno negativo. Osservando che

$$\left[\cos \left(\frac{1}{n+2} \right)^{\alpha} - 1 \right] n^4 \sim -\frac{n^4}{2(n+2)^{2\alpha}} \sim -\frac{n^4}{2n^{2\alpha}} = -\frac{1}{2n^{2\alpha-4}}$$

si ottiene subito che, per il criterio del confronto asintotico, la serie proposta converge per $2\alpha - 4 > 1$, cioè $\alpha > \frac{5}{2}$.

Esercizio 1.19

Determinare il carattere della seguente serie, utilizzando opportunamente i criteri studiati:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n}{4} \frac{1}{3^n}$$

Soluzione

Si svolga per esercizio utilizzando il criterio del rapporto. La serie proposta converge.

Esercizio 1.20

Determinare il carattere della seguente serie, utilizzando opportunamente i criteri studiati:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(\sqrt{n})^n}$$

Soluzione

Si tratta di una serie a termini positivi. Applicando il criterio del rapporto, si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{(n+1)!}}{(\sqrt{n+1})^{n+1}} \frac{(\sqrt{n})^n}{\sqrt{n!}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{n}{n+1}} \right)^n$$

Ricordando il limite notevole

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{n}{n+1}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} \right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-\frac{1}{2}n} = e^{-\frac{1}{2}} = l$$

Poiché $l = e^{-\frac{1}{2}} < 1$, la serie proposta converge.

Esercizio 1.21

Determinare, al variare di $\alpha > 0$, il carattere della seguente serie, utilizzando opportunamente i criteri studiati:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\log \left(\frac{n+2}{n+1} \right) \right]^\alpha$$

Soluzione

Per esercizio. Sommare e sottrarre 1 all'interno dell'argomento del logaritmo ed utilizzare un'opportuna stima asintotica. La serie proposta converge per $\alpha > 1$.

Esercizio 1.22

Determinare il carattere della seguente serie, utilizzando opportunamente i criteri studiati:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{2}{\sqrt{n}} - \sin \frac{2}{\sqrt{n}} \right)^2$$

Soluzione

Per esercizio. Basta sviluppare il termine generale della serie fino al primo termine di sviluppo non nullo. La serie proposta converge.

Esercizio 1.23

Determinare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, il carattere della seguente serie, utilizzando opportunamente i criteri studiati:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x-12|^{n+1}}{2n^2 e^{-n}}$$

Soluzione

Per esercizio. Utilizzare il criterio del rapporto. La serie proposta converge per $12 - \frac{1}{e} \leq x \leq 12 + \frac{1}{e}$, diverge altrove.

Esercizio 1.24

Determinare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{|x-1|} \right)^n$$

Soluzione

Si tratta di una serie geometrica di ragione $q = \frac{x}{|x-1|}$, definita per $x \neq 1$. La serie converge, assolutamente e semplicemente, se e solo se

$$\left| \frac{x}{x-1} \right| < 1$$

cioè, se e solo se

$$-1 < \frac{x}{x-1} < 1$$

il cui intervallo di soluzioni è $x < \frac{1}{2}$.

Esercizio 1.25

Determinare il carattere della seguente serie, utilizzando opportunamente i criteri studiati:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi) e^{-2n} \log n}{n}$$

Soluzione

Ricordiamo che $\cos(n\pi) = (-1)^n$; pertanto la serie è a termini di segno alterno. Poiché $\log n < n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, abbiamo:

$$|a_n| = \left| (-1)^n \frac{e^{-2n} \log n}{n} \right| = e^{-2n} \left(\frac{\log n}{n} \right) < \left(\frac{1}{e^2} \right)^n$$

dove l'ultimo è il termine generale della serie geometrica di ragione $q = \frac{1}{e^2} < 1$, che converge. Dal criterio del confronto si ottiene che la serie proposta converge assolutamente, quindi anche semplicemente.

Esercizio 1.26

Determinare il carattere della seguente serie, utilizzando opportunamente i criteri studiati:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + n \cos(n\pi)}{2n^2 + 1}$$

Soluzione

Per esercizio. Osservare che $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n^2+1}$ è convergente, dunque è possibile riscrivere

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + n \cos(n\pi)}{2n^2 + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n^2 + 1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cos(n\pi)}{2n^2 + 1}$$

dove $\cos(n\pi) = (-1)^n$. Stabilire il carattere della seconda serie; si verificherà che converge semplicemente dal criterio di Leibniz e che, in definitiva, la serie proposta converge in quanto somma di serie convergenti.

Esercizio 1.27

Determinare il carattere della seguente serie, utilizzando opportunamente i criteri studiati:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos n}{3n^2 + 2\sqrt{n}}$$

Soluzione

La serie proposta è a termini di segno alterno. Posto $a_n = (-1)^n \frac{\cos n}{3n^2 + 2\sqrt{n}}$, si ha

$$|a_n| = \left| (-1)^n \frac{\cos n}{3n^2 + 2\sqrt{n}} \right| = \frac{|\cos n|}{3n^2 + 2\sqrt{n}} \leq \frac{1}{3n^2 + 2\sqrt{n}} \sim \frac{1}{3n^2}$$

dove si è sfruttato il fatto che $|\cos n| \leq 1$ per ogni n e $3n^2 + 2\sqrt{n} \sim 3n^2$ per $n \rightarrow +\infty$. Per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente $2 > 1$ e per il criterio del confronto, la serie proposta converge assolutamente, e quindi anche semplicemente.

Esercizio 1.28

Determinare il carattere della seguente serie, utilizzando opportunamente i criteri studiati:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1 - \sin^2(n\pi/2)}{3n + \sin n}$$

Soluzione

Si tratta di una serie a termini di segno alterno. Osservando che

$$\sin^2(n\pi/2) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari, ovvero } n = 2k, \\ 1 & \text{se } n \text{ è dispari, ovvero } n = 2k + 1. \end{cases}$$

e posto $a_n = \frac{1 - \sin^2(n\pi/2)}{3n + \sin n}$, si ha

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{3n + \sin n} & \text{se } n = 2k, \\ 0 & \text{se } n = 2k + 1. \end{cases}$$

Quindi la serie proposta si può riscrivere nella forma

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n + \sin n} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{2k} \frac{1}{6k + \sin(2k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{6k + \sin(2k)}$$

dove, per la seconda uguaglianza, si è sfruttato il fatto che $n = 2k$. L'ultima serie ottenuta è a termini positivi. Poiché per $k \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{6k + \sin(2k)} \sim \frac{1}{6k}$, dal criterio del confronto asintotico con la serie armonica si ricava che la serie proposta diverge.

Esercizio 1.29

Determinare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, il carattere della seguente serie, utilizzando opportunamente i criteri studiati:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2x}{1-x^2} \right)^n$$

Soluzione

Per esercizio. Effettuare ragionamenti analoghi all'esercizio 24.

Parte II

Primitive e integrali

Primitive

Esercizio 2.1

Calcolare le primitive indicate negli intervalli in cui risultano definite

$$(a) \int \left(2x + \sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx, \quad (b) \int \frac{x - x^4}{\sqrt{x}} dx$$

$$(c) \int \tan^2 x \, dx, \quad (d) \int (3 - x)^5 dx$$

$$(e) \int \frac{1}{2 - 3x} dx, \quad (f) \int x^2 e^{x^3+1} dx$$

$$(g) \int x \sqrt{x^2 + 1} dx, \quad (h) \int \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} dx$$

$$(i) \int \frac{e^x}{e^x + 3} dx, \quad (j) \int \frac{1}{\tan x} dx$$

Soluzione

(a)

$$\begin{aligned} \int \left(2x + \sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx &= \int (2x + x^{1/3} - 2x^{-1/2}) dx \\ &= x^2 + \frac{3}{4} x^{4/3} - 4x^{1/2} + c = x^2 + \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} - 4\sqrt{x} + c \end{aligned}$$

in un qualunque intervallo I tale che $I \subset (0, +\infty)$.

Soluzione

(b)

$$\int \frac{x - x^4}{\sqrt{x}} dx = \int (x^{1/2} - x^{7/2}) dx =$$

$$\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{9}x^{9/2} + c = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{2}{9}x^4\sqrt{x} + c$$

in un qualunque intervallo I tale che $I \subset (0, +\infty)$.

Soluzione

(c)

$$\int \tan^2 x \, dx = \int [(1 + \tan^2 x) - 1] dx = \tan x - x + c$$

in un qualunque intervallo I che non contenga punti del tipo $\pi/2 + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Soluzione

(d)

$$\int (3 - x)^5 dx = - \int (x - 3)^5 dx = -\frac{1}{6}(x - 3)^6 + c$$

in un qualunque intervallo I di $\mathbb{R}$.

Soluzione

(e)

$$\int \frac{1}{2 - 3x} dx = - \int \frac{1}{3x - 2} dx = -\frac{1}{3} \log |3x - 2| + c$$

in un qualunque intervallo I tale che $2/3 \notin I$.

Soluzione

(f)

$$\int x^2 e^{x^3+1} dx = \frac{1}{3} e^{x^3+1} + c$$

in un qualunque intervallo I di $\mathbb{R}$.

Soluzione

(g)

$$\int x\sqrt{x^2+1}dx = \frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} + c = \frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} + c$$

in un qualunque intervallo I di $\mathbb{R}$.**Soluzione**

(h)

$$\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} dx = \int \frac{2\sin x \cos x}{1+\sin^2 x} dx = \log(1+\sin^2 x) + c$$

in un qualunque intervallo I di $\mathbb{R}$.**Soluzione**

(i)

$$\int \frac{e^x}{e^x+3} dx = \log(e^x+3) + c$$

in un qualunque intervallo I di $\mathbb{R}$.**Soluzione**

(j)

$$\int \frac{1}{\tan x} dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \log |\sin x| + c$$

in un qualunque intervallo I che non contenga punti del tipo $k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.**Esercizio 2.2**

Calcolare le seguenti primitive integrando per parti

$$(a) \int x \sin x \, dx, \quad (b) \int x^2 \cos x \, dx$$

$$(c) \int \arcsin x \, dx, \quad (d) \int \sin^2 x \, dx$$

Soluzione

(a)

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + c$$

in un qualunque intervallo I di $\mathbb{R}$.

Soluzione

(b) Integrando per parti due volte di seguito, si ha

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx =$$

$$x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \int \cos x \, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c$$

in un qualunque intervallo I di $\mathbb{R}$.

Soluzione

(c) Prendendo la funzione costante 1 come fattore da integrare, si ha

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$$

in un qualunque intervallo $I \subset (-1, 1)$.

Soluzione

(d) Integrando per parti ed utilizzando $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, si ottiene

$$\int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx$$

$$= -\sin x \cos x + \int 1 \, dx - \int \sin^2 x \, dx$$

da cui

$$\int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x \, dx + c$$

quindi, portando $\int \sin^2 x \, dx$ a primo membro,

$$2 \int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + x + c$$

ed infine, denotando ancora con c la costante arbitraria $c/2$,

$$\int \sin^2 x \, dx = -\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} x + c$$

in un qualunque intervallo I di $\mathbb{R}$.

Esercizio 2.3

Calcolare le seguenti primitive integrando per sostituzione

$$(a) \int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx, \quad (b) \int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx, \quad (c) \int x\sqrt{x+1} dx$$

Soluzione

(a) Ponendo $y = e^x$, $y > 0$, $x \in \mathbb{R}$, si ha $x = \log y$ e si scrive $dx = \frac{1}{y} dy$, quindi

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx = \int \frac{y - 1}{y(y + 1)} dy.$$

Coi fratti semplici, otteniamo

$$\frac{y - 1}{y(y + 1)} = -\frac{1}{y} + \frac{2}{y + 1}$$

da cui, tenendo conto di $y > 0$,

$$\int \frac{y - 1}{y(y + 1)} dy = -\log y + 2 \log(y + 1) + c.$$

Ne segue, sostituendo di nuovo $y = e^x$,

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx = -\log e^x + 2 \log(e^x + 1) + c = -x + 2 \log(e^x + 1) + c$$

in un qualunque intervallo I di $\mathbb{R}$.

Soluzione

(b) Ponendo $y = \sqrt{x}$, $x, y > 0$, si ha $x = y^2$ e si scrive $dx = 2y dy$, quindi

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx = 2 \int \frac{y^2}{1+y^2} dy.$$

Da

$$\frac{y^2}{y^2 + 1} = \frac{y^2 + 1 - 1}{y^2 + 1} = 1 - \frac{1}{y^2 + 1}$$

si ha poi

$$2 \int \frac{y^2}{1+y^2} dy = 2y - 2 \arctan y + c.$$

Ne segue, sostituendo di nuovo $y = \sqrt{x}$,

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx = 2\sqrt{x} - 2 \arctan \sqrt{x} + c$$

in un qualunque intervallo $I \subset (0, +\infty)$.

Soluzione

(c) Ponendo $y = \sqrt{x+1}$, $x > -1$, $y > 0$, si ha $x = y^2 - 1$ e si scrive $dx = 2y dy$, quindi

$$\int x\sqrt{x+1} dx = 2 \int (y^2 - 1)y^2 dy = 2 \int (y^4 - y^2) dy = \frac{2}{5}y^5 - \frac{2}{3}y^3 + c.$$

Ne segue, sostituendo di nuovo $y = \sqrt{x+1}$,

$$\int x\sqrt{x+1} dx = \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + c$$

in un qualunque intervallo $I \subset (-1, +\infty)$.

Esercizio 2.4

Calcolare le seguenti primitive di funzioni razionali

$$(a) \int \frac{5}{x^2 + 2x + 1} dx, \quad (b) \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx, \quad (c) \int \frac{x}{x^2 + x + 1} dx, \quad (d) \int \frac{x^3 + 1}{x^2 - 3x + 2} dx$$

$$(e) \int \frac{x}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} dx, \quad (f) \int \frac{1}{x^4 - 1} dx, \quad (g) \int \frac{x+1}{x^3 - x^2} dx, \quad (h) \int \frac{1}{x^3 + 1} dx$$

Soluzione

(a) L'integrale dato è immediato:

$$\int \frac{5}{x^2 + 2x + 1} dx = \int \frac{5}{(x+1)^2} dx = -\frac{5}{x+1} + c$$

in un qualunque intervallo I tale che $-1 \notin I$.

Soluzione

(b) Scrivendo il denominatore, irriducibile, come somma di quadrati:

$$\int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \int \frac{1}{(x + 1/2)^2 + 3/4} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2} \right) \right] + c$$

in un qualunque intervallo I di $\mathbb{R}$.

Soluzione

(c) Utilizzando anche l'esercizio precedente:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2 + x + 1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \\ &= \frac{1}{2} \log(x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2} \right) \right] + c \end{aligned}$$

in un qualunque intervallo I di $\mathbb{R}$.

Soluzione

(d) Eseguiamo la divisione euclidea:

$$\frac{x^3 + 1}{x^2 - 3x + 2} = x + 3 + \frac{7x - 5}{x^2 - 3x + 2}.$$

Impostando i fratti semplici

$$\frac{7x - 5}{x^2 - 3x + 2} = \frac{7x - 5}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2},$$

si ottiene

$$A = -2, \quad B = 9.$$

Concludendo:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 1}{x^2 - 3x + 2} dx &= \int \left(x + 3 - \frac{2}{x - 1} + \frac{9}{x - 2} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} x^2 + 3x - 2 \log |x - 1| + 9 \log |x - 2| + c \end{aligned}$$

in un qualunque intervallo I tale che $1 \notin I, 2 \notin I$.

Soluzione

(e) Impostiamo i fratti semplici:

$$\frac{x}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} = \frac{x}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}.$$

Si ottiene

$$A = 0, \quad B = 1, \quad C = -1.$$

Concludendo

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} dx &= \int \left(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3} \right) dx \\ &= -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(x+1)^2} + c \end{aligned}$$

in un qualunque intervallo I tale che $-1 \notin I$.

Soluzione

(f) Impostiamo i fratti semplici:

$$\frac{1}{x^4 - 1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Si ottiene

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = -\frac{1}{4}, \quad C = 0, \quad D = -\frac{1}{2}.$$

Concludendo

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^4 - 1} dx &= \int \left(\frac{1}{4} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{4} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \log |x-1| - \frac{1}{4} \log |x+1| - \frac{1}{2} \arctan x + c \end{aligned}$$

in un qualunque intervallo I tale che $\pm 1 \notin I$.

Soluzione

(g) Impostiamo i fratti semplici:

$$\frac{x+1}{x^3 - x^2} = \frac{x+1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}.$$

Si ottiene

$$A = -2, \quad B = -1, \quad C = 2.$$

Concludendo

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^3-x^2} dx &= \int \left(-\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-1} \right) dx \\ &= -2 \log |x| + \frac{1}{x} + 2 \log |x-1| + c\end{aligned}$$

in un qualunque intervallo I tale che $0, 1 \notin I$.

Soluzione

(h) Impostiamo i fratti semplici:

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

Si ottiene

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{1}{3}, \quad C = \frac{2}{3}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3+1} dx &= \int \left(\frac{1}{3} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{3} \frac{-x+2}{x^2-x+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{3} \log |x+1| - \frac{1}{6} \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2-x+1} dx \\ &= \frac{1}{3} \log |x+1| - \frac{1}{6} \log(x^2-x+1) + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x-1/2)^2 + 3/4} dx \\ &= \frac{1}{3} \log |x+1| - \frac{1}{6} \log(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2} \right) \right] + c\end{aligned}$$

in un qualunque intervallo I tale che $-1 \notin I$.

Esercizio 2.5

Calcolare le seguenti primitive

$$\begin{aligned}\text{(a)} \quad & \int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1} dx, & \text{(b)} \quad & \int x^2 \log(x+1) dx, & \text{(c)} \quad & \int \frac{\tan x}{\sin^2 x - \cos^2 x} dx \\ \text{(d)} \quad & \int \frac{x+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} dx, & \text{(e)} \quad & \int \frac{1}{\cos x} dx, & \text{(f)} \quad & \int \sqrt{4-x^2} dx\end{aligned}$$

Soluzione

(a) Con la sostituzione $y = e^x$, $y > 0$, $x \in \mathbb{R}$, si ha $x = \log y$, si scrive $dx = \frac{1}{y}dy$, e si ottiene

$$\int \frac{e^x + 1}{e^{2x} + 1} dx = \int \frac{y + 1}{y(y^2 + 1)} dy.$$

Impostiamo i fratti semplici:

$$\frac{y + 1}{y(y^2 + 1)} = \frac{A}{y} + \frac{By + C}{y^2 + 1}.$$

Si ha

$$A = 1, B = -1, C = 1,$$

da cui, tenendo conto anche di $y > 0$,

$$\begin{aligned} \int \frac{y + 1}{y(y^2 + 1)} dy &= \int \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{y^2 + 1} + \frac{1}{y^2 + 1} \right) dy \\ &= \log y - \frac{1}{2} \log(y^2 + 1) + \arctan y + c. \end{aligned}$$

Sostituendo poi di nuovo $y = e^x$, si ha

$$\int \frac{e^x + 1}{e^{2x} + 1} dx = x - \frac{1}{2} \log(e^{2x} + 1) + \arctan e^x + c$$

in un qualunque intervallo I di $\mathbb{R}$.

Soluzione

(b) Integrando per parti e calcolando poi l'integrale di una funzione razionale, si ha

$$\begin{aligned} \int x^2 \log(x + 1) dx &= \frac{1}{3} x^3 \log(x + 1) - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{x + 1} dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 \log(x + 1) - \frac{1}{3} \int (x^2 - x + 1) dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{x + 1} dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 \log(x + 1) - \frac{1}{9} x^3 + \frac{1}{6} x^2 - \frac{1}{3} x + \frac{1}{3} \log(x + 1) + c \end{aligned}$$

in un qualunque intervallo $I \subset (-1, +\infty)$.

Soluzione

(c) Da $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ e $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, si ha

$$\int \frac{\tan x}{\sin^2 x - \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos x(1 - 2\cos^2 x)} dx.$$

Ponendo ora $y = \cos x$, si scrive $dy = -\sin x \, dx$ e si ottiene

$$\int \frac{\sin x}{\cos x(1 - 2\cos^2 x)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{y(y - \sqrt{1/2})(y + \sqrt{1/2})} dy.$$

Coi fratti semplici, si ha poi

$$\frac{1}{y(y - \sqrt{1/2})(y + \sqrt{1/2})} = -\frac{2}{y} + \frac{1}{y - \sqrt{1/2}} + \frac{1}{y + \sqrt{1/2}},$$

da cui

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{y(y - \sqrt{1/2})(y + \sqrt{1/2})} = -\log |y| + \frac{1}{2} \log |y^2 - 1/2| + c.$$

Concludendo,

$$\int \frac{\tan x}{\sin^2 x - \cos^2 x} dx = -\log |\cos x| + \frac{1}{2} \log |\cos^2 x - 1/2| + c$$

in un qualunque intervallo I che non contiene punti del tipo $x = \pi/2 + k\pi$ oppure del tipo $x = \pi/4 + k\pi/2$ con k intero.

Soluzione

(d) Con la sostituzione $y = \sqrt{x}$, $x, y > 0$, si ha $x = y^2$, si scrive $dx = 2y \, dy$ e si ottiene

$$\int \frac{x + \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{y^3 + y^2}{y + 2} dy.$$

Integrando la funzione razionale, si ha

$$\begin{aligned} 2 \int \frac{y^3 + y^2}{y + 2} dy &= 2 \int (y^2 - y + 2) dy - 8 \int \frac{1}{y + 2} dy \\ &= \frac{2}{3} y^3 - y^2 + 4y - 8 \log(y + 2) + c. \end{aligned}$$

Sostituendo di nuovo $y = \sqrt{x}$, si conclude

$$\int \frac{x + \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} dx = \frac{2}{3} x \sqrt{x} - x + 4\sqrt{x} - 8 \log(\sqrt{x} + 2) + c$$

in un qualunque intervallo $I \subset (0, +\infty)$.

Soluzione

(e) Operando la sostituzione razionalizzante $y = \tan \frac{x}{2}$, $dx = \frac{2}{1+y^2} dy$ e tenendo conto di $\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$, si ha

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = -2 \int \frac{1}{y^2 - 1} dy.$$

Coi fratti semplici, si ha poi

$$-2 \int \frac{1}{y^2 - 1} dy = \int \left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y-1} \right) dy = \log \left| \frac{y+1}{y-1} \right| + c.$$

Tornando a $y = \tan \frac{x}{2}$, si conclude

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \log \left| \frac{\tan(x/2) + 1}{\tan(x/2) - 1} \right| + c$$

in un qualunque intervallo I che non contiene punti del tipo $x = \pi/2 + k\pi$ con k intero.

Soluzione

(f) Operando la sostituzione razionalizzante $x = 2 \sin y$, $-\pi/2 < y < \pi/2$, $-2 < x < 2$, $dx = 2 \cos y \, dy$, tenendo conto anche di $\cos y > 0$, si ottiene

$$\int \sqrt{4 - x^2} dx = 4 \int \cos^2 y \, dy.$$

Da $4 \cos^2 y = 2 + 2 \cos(2y)$, si ha poi

$$4 \int \cos^2 y \, dy = 2y + \sin(2y) = 2y + 2 \sin y \cos y + c.$$

Usando ora $\sin y = x/2$, $y = \arcsin(x/2)$, $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \frac{1}{2} \sqrt{4 - x^2}$, si conclude

$$\int \sqrt{4 - x^2} dx = 2 \arcsin(x/2) + (x/2) \sqrt{4 - x^2} + c$$

in un qualunque intervallo $I \subset (-2, 2)$.

Esercizio 2.6

Calcolare i seguenti limiti

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} \int_0^{x^2} \log(1 + \sqrt{t}) dt, \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^4} \int_0^{x^2} (1 - \cos \sqrt{t}) dt$$

$$(c) \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(2 \int_4^{4e} \frac{\log(kx)}{x} dx - \log(k(k+1)) \right),$$

$$(d) \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\int_1^3 \log(k(x+2)) dx - 3 \log(k+1) \right)$$

Soluzione

(a) Ponendo $f(x) = \int_0^{x^2} \log(1 + \sqrt{t}) dt$, il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ data da $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^3}$. Siamo nelle ipotesi di utilizzo delle regole di De L'Hospital e possiamo passare al calcolo del limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{3x^2}.$$

Calcoliamo la derivata $f'(x)$ con il Teorema fondamentale del calcolo integrale e la regola della derivata di funzione composta:

$$f'(x) = 2x \log(1 + \sqrt{x^2}) = 2x \log(1 + x), \quad x > 0.$$

Concludendo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} \int_0^{x^2} \log(1 + \sqrt{t}) dt &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \log(1 + x)}{3x^2} \\ &= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + x)}{x} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Soluzione

(b) Ponendo $f(x) = \int_0^{x^2} (1 - \cos \sqrt{t}) dt$, il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ data da $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^4}$. Siamo nelle ipotesi di utilizzo delle regole di De L'Hospital e possiamo passare al calcolo del limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{4x^3}.$$

Calcoliamo la derivata $f'(x)$ con il Teorema fondamentale del calcolo integrale e la regola della derivata di funzione composta:

$$f'(x) = 2x(1 - \cos \sqrt{x^2}) = 2x(1 - \cos x), \quad x > 0.$$

Concludendo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^4} \int_0^{x^2} (1 - \cos \sqrt{t}) dt &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x(1 - \cos x)}{4x^3} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Soluzione

(c) Calcoliamo

$$\begin{aligned}
2 \int_4^{4e} \frac{\log(kx)}{x} dx &= [\log^2(kx)]_4^{4e} = \log^2(4ke) - \log^2(4k) \\
&= (\log(4ke) - \log(4k))(\log(4ke) + \log(4k)) \\
&= \log \frac{4ke}{4k} \log(16k^2e) = \log(16k^2e).
\end{aligned}$$

Ne segue

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(2 \int_4^{4e} \frac{\log(kx)}{x} dx - \log(k(k+1)) \right) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \log(16k^2e) - \log(k(k+1)) \\
&= \lim_{k \rightarrow +\infty} \log \frac{16k^2e}{k^2+k} = \log(16e) = 1 + \log 16.
\end{aligned}$$

Soluzione

(d) Calcoliamo

$$\begin{aligned}
\int_1^3 \log(k(x+2)) dx &= [x \log(kx+2k)]_1^3 - \int_1^3 \frac{x}{x+2} dx \\
&= 3 \log(5k) - \log(3k) - \int_1^3 \left(1 - \frac{2}{x+2} \right) dx \\
&= 3 \log(5k) - \log(3k) - 2 + 2 \log \frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

Ne segue

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\int_1^3 \log(k(x+2)) dx - 3 \log(k+1) \right) \\
&= \lim_{k \rightarrow +\infty} 3 \log(5k) - \log(3k) - 2 + 2 \log \frac{5}{3} - 3 \log(k+1) \\
&= \lim_{k \rightarrow +\infty} 3 \log \frac{5k}{k+1} - \log(3k) - 2 + 2 \log \frac{5}{3} = -\infty.
\end{aligned}$$

Integrali

Esercizio 3.1

Determinare la misura dell'insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ così definito:

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 < x < 1, x^2 - 1 \leq y \leq \frac{x+1}{x+2} \right\}$$

Soluzione

Si tratta di calcolare

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{x+1}{x+2} - (x^2 - 1) \right) dx.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left(\frac{x+1}{x+2} + 1 - x^2 \right) dx &= \int_{-1}^1 \left(2 - \frac{1}{x+2} - x^2 \right) dx \\ &= \left[2x - \log(x+2) - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{10}{3} - \log 3. \end{aligned}$$

Esercizio 3.2

Calcolare

$$\int_0^1 \frac{e^x + e^{x/2}}{1 + e^x} dx$$

Soluzione

Con la sostituzione $y = e^{x/2}$, $x = 2 \log y$, $dx = \frac{2}{y} dy$, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{e^x + e^{x/2}}{1 + e^x} dx &= 2 \int_1^{\sqrt{e}} \frac{y^2 + y}{(1 + y^2)y} dy \\ &= 2 \int_1^{\sqrt{e}} \frac{y + 1}{1 + y^2} dy = [\log(y^2 + 1) + 2 \arctan y]_1^{\sqrt{e}} \\ &= \log \frac{e + 1}{2} + 2 \arctan \sqrt{e} - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Esercizio 3.3

Calcolare

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-|x|} \cos x \, dx$$

Soluzione

Osserviamo che la funzione è pari, in quanto $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in [-\pi, \pi]$. Quindi, per proprietà di simmetria

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-|x|} \cos x \, dx = 2 \int_0^{\pi} e^{-|x|} \cos x \, dx = 2 \int_0^{\pi} e^{-x} \cos x \, dx$$

dove nell'ultima uguaglianza si è sfruttato il fatto che $|x| = x$ per ogni $x \geq 0$. Si ha, integrando due volte per parti

$$\begin{aligned} I &= \int e^{-x} \cos x \, dx = e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \sin x \, dx \\ &= e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x \, dx = e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x - I \end{aligned}$$

da cui

$$2I = e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x$$

ed infine

$$I = \int e^{-x} \cos x \, dx = \frac{e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x}{2} + c$$

Per il calcolo dell'integrale definito, valutiamo la primitiva fra 0 e π , non dimenticando il fattore 2 che era presente davanti all'integrale:

$$2[I]_0^{\pi} = e^{-\pi} + 1$$

Esercizio 3.4

Calcolare

$$\int_0^2 \frac{e^x \log(1+e^x)}{1+e^x} dx$$

SoluzioneCon la sostituzione $1 + e^x = t$, $e^x dx = dt$, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{e^x \log(1+e^x)}{1+e^x} dx &= \int_2^{e^2+1} \frac{\log t}{t} dt \\ &= \left[\frac{\log^2 t}{2} \right]_2^{e^2+1} = \frac{1}{2} (\log^2(e^2+1) - \log^2 2) \end{aligned}$$

Esercizio 3.5

Stabilire se il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{\sin^3 \sqrt{x}}{e^x(1-\cos x)} dx$$

esiste finito.

SoluzionePoiché la funzione integranda è continua in $(0, 1]$, per stabilire se l'integrale proposto converge è sufficiente studiare il comportamento di f in un intorno destro di $x = 0$. Per $x \rightarrow 0^+$ si ha

$$f(x) \sim \frac{(\sqrt{x})^3}{\frac{1}{2}x^2} = \frac{x^{3/2}}{\frac{1}{2}x^2} = 2 \frac{1}{x^{1/2}}$$

Poiché $1/2 < 1$, dal criterio del confronto asintotico l'integrale proposto esiste finito; più formalmente, la funzione $f(x)$ è impropriamente integrabile in un intorno destro dell'origine.**Esercizio 3.6**

Stabilire se il seguente integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(3+5x^5) \arctan x^{3/2}} dx$$

esiste finito.

Soluzione

La funzione integranda è continua in $(0, +\infty)$. Per stabilire se l'integrale proposto converge è necessario studiare il comportamento della funzione integranda in un intorno destro di $x = 0$, dove il denominatore non è definito, ed in un intorno di $+\infty$. È bene riscrivere tale integrale di terza specie come

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(3+5x^5) \arctan x^{3/2}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^2}{(3+5x^5) \arctan x^{3/2}} dx$$

al fine di evidenziare il duplice studio da svolgere. Per $x \rightarrow 0^+$ si ha

$$f(x) \sim \frac{x^2}{3x^{3/2}} = \frac{1}{3x^{-1/2}}$$

Poiché $-1/2 < 1$, dal criterio del confronto asintotico la funzione $f(x)$ è impropriamente integrabile in un intorno destro dell'origine. Verifichiamo, ora, che lo sia anche in un intorno di $+\infty$. Per $x \rightarrow +\infty$ si ha

$$f(x) \sim \frac{x^2}{5x^{5\frac{\pi}{2}}} = \frac{2}{5\pi} \frac{1}{x^3}$$

Poiché $3 > 1$, dal criterio del confronto asintotico la funzione $f(x)$ è impropriamente integrabile anche in un intorno di $+\infty$. Complessivamente, dunque, l'integrale improprio esiste finito. Osserviamo che, in realtà, poiché $f(x) \sim \frac{\sqrt{x}}{3}$, per $x \rightarrow 0^+$, la funzione è prolungabile per continuità in $x = 0$ e si può porre, per definizione, $f(0) = 0$.

Esercizio 3.7

Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x^2)}{x^\alpha(1+x^3)} dx$$

esiste finito.

Soluzione

La funzione integranda è continua in $(0, 1)$. Per stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale proposto converge basta studiare il comportamento dell'integranda in un intorno destro di $x = 0$, dove il denominatore non è definito. Per $x \rightarrow 0^+$ si ha

$$f(x) \sim \frac{x^2}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-2}}$$

che è impropriamente integrabile per $\alpha - 2 < 1$, cioè per $\alpha < 3$.

Esercizio 3.8

Dato il seguente integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{x \arctan(x^2) \log^\alpha\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x^4 + 1} dx$$

studiarne la convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Successivamente, per $\alpha = 0$, calcolarlo mediante la definizione.

Soluzione

La funzione integranda è continua in $[1, +\infty)$. Per stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale proposto converge basta studiare il comportamento dell'integranda in un intorno di $+\infty$. Per $x \rightarrow +\infty$ si ha

$$f(x) \sim \frac{x}{x^4} \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{x}\right)^\alpha = \frac{\pi}{2} \frac{1}{x^{\alpha+3}}$$

dove si è reso necessario l'utilizzo delle stime asintotiche $x^4 + 1 \sim x^4$, $\log^\alpha\left(1 + \frac{1}{x}\right) \sim \left(\frac{1}{x}\right)^\alpha$, $x \rightarrow +\infty$. Dal criterio del confronto asintotico, l'integrale improprio esiste finito se $\alpha+3 > 1$, ovvero $\alpha > -2$.

Per $\alpha = 0$, l'integrale diventa

$$\int_1^{+\infty} \frac{x \arctan(x^2)}{x^4 + 1} dx$$

È possibile procedere per sostituzione, ponendo $\arctan(x^2) = t$, $\frac{x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} dt$, ottenendo

$$\int_1^{+\infty} \frac{x \arctan(x^2)}{x^4 + 1} dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{t}{2} dt = \frac{3}{64} \pi^2$$

Esercizio 3.9

Dopo aver stabilito se la funzione è sommabile o meno, calcolare i seguenti integrali

$$(a) \int_{-1}^0 \frac{1}{(1-x)\sqrt{1+x}} dx, \quad (b) \int_{-1}^1 \frac{1}{(1-x)\sqrt{1+x}} dx, \quad (c) \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$$

$$(d) \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx, \quad (e) \int_4^{+\infty} \frac{1}{x(x-3)} dx$$

Si tratta di tutte funzioni continue e positive nei rispettivi intervalli di integrazione, quindi di tutte funzioni integrabili. Ciascun integrale rappresenta la misura del sottografico. In tutti i casi, il sottografico è un insieme non limitato del piano, l'integrale vale quindi o un numero positivo o $+\infty$. Ricordiamo che la funzione si dice sommabile quando è integrabile con integrale finito.

Soluzione

(a) La funzione

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)\sqrt{1+x}}$$

è continua nell'intervallo $(-1, 0]$. Bisogna, quindi, studiarne il comportamento in un intorno destro di $x = -1$. Per $x \rightarrow -1^+$ si ha

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}, \quad x \rightarrow -1^+$$

quindi la funzione è sommabile in $(-1, 0]$ per il criterio del confronto, in quanto $\frac{1}{2} < 1$. Questo significa

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-1+\varepsilon}^0 f(x) dx$$

e che tale limite esiste, finito e positivo.

Ponendo $y = \sqrt{1+x}$, $x = y^2 - 1$, $dx = 2y dy$, otteniamo

$$\int_{-1+\varepsilon}^0 f(x) dx = \int_{\sqrt{\varepsilon}}^1 \frac{2}{2-y^2} dy,$$

quindi, tenendo conto che $\sqrt{\varepsilon} \rightarrow 0$ per $\varepsilon \rightarrow 0$, abbiamo

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\delta}^1 \frac{2}{2-y^2} dy = \int_0^1 \frac{2}{2-y^2} dy.$$

Si noti che, in questo caso, dopo il cambiamento di variabile, abbiamo ottenuto l'integrale di una funzione limitata partendo dall'integrale di una non limitata.

Coi fratti semplici, tenendo conto anche di $|y - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - y$ nell'intervallo d'integrazione, si ha

$$\frac{2}{2-y^2} = -\frac{2}{(y-\sqrt{2})(y+\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{y+\sqrt{2}} - \frac{1}{y-\sqrt{2}} \right),$$

quindi

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 f(x) dx &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \left(\frac{1}{y+\sqrt{2}} - \frac{1}{y-\sqrt{2}} \right) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\log \frac{y+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-y} \right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}. \end{aligned}$$

Soluzione

(b) Si ha

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(1-x)\sqrt{1+x}} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{(1-x)\sqrt{1+x}} dx + \int_0^1 \frac{1}{(1-x)\sqrt{1+x}} dx$$

dove il primo integrale è finito ed è stato calcolato al punto precedente. L'integrale ora

assegnato è quindi finito se e solo se tale è

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-x)\sqrt{1+x}} dx.$$

La funzione

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)\sqrt{1+x}}$$

è continua e limitata in ogni intervallo $[0, 1-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$. Si ha poi

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{1-x}, \quad x \rightarrow 1^-$$

quindi la funzione non è sommabile in $[0, 1)$ per il criterio del confronto. Questo significa

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} f(x) dx = +\infty,$$

quindi anche l'integrale dato vale

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(1-x)\sqrt{1+x}} dx = +\infty.$$

Soluzione

(c) La funzione $f(x) = xe^{-x^2}$ è continua e limitata su ogni intervallo $[0, a]$ con $a > 0$. Si ha poi

$$f(x) = O\left(\frac{1}{x^\alpha}\right), \quad x \rightarrow +\infty,$$

qualunque sia $\alpha > 0$, in particolare, scegliendo $\alpha > 1$, la funzione è sommabile su $[0, +\infty)$. Questo significa

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a f(x) dx$$

e che tale limite esiste, finito e positivo. Infatti

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow +\infty} [e^{-x^2}]_0^a = -\frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow +\infty} (e^{-a^2} - 1) = \frac{1}{2}.$$

L'integrale dato vale $1/2$.

Soluzione

(d) La funzione $f(x) = x^3e^{-x^2}$ è continua e limitata su ogni intervallo $[0, a]$ con $a > 0$. Si ha poi

$$f(x) = O\left(\frac{1}{x^\alpha}\right), \quad x \rightarrow +\infty,$$

qualunque sia $\alpha > 0$, in particolare, scegliendo $\alpha > 1$, la funzione è sommabile su $[0, +\infty)$.

Questo significa

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a f(x) dx$$

e che tale limite esiste, finito e positivo. Infatti, integrando per parti, e tenuto conto dell'integrale calcolato al punto precedente,

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a x^3 e^{-x^2} dx &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \left\{ -\frac{1}{2} [x^2 e^{-x^2}]_0^a + \int_0^a x e^{-x^2} dx \right\} \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2} a^2 e^{-a^2} + \int_0^a x e^{-x^2} dx \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

L'integrale dato vale $1/2$.

Soluzione

(e) La funzione $f(x) = \frac{1}{x(x-3)}$ è continua e limitata su ogni intervallo $[4, a]$ con $a > 4$. Si ha poi

$$f(x) \sim \frac{1}{x^2}, \quad x \rightarrow +\infty,$$

quindi la funzione è sommabile su $[4, +\infty)$ per confronto. Questo significa

$$\int_4^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_4^a f(x) dx$$

e che tale limite esiste, finito e positivo. Infatti, coi fratti semplici,

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_4^a \frac{1}{x(x-3)} dx &= \frac{1}{3} \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_4^a \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{1}{3} \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[\log \frac{x-3}{x} \right]_4^a \\ &= \frac{1}{3} \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\log \frac{a-3}{a} - \log \frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{3} \log \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \log 4. \end{aligned}$$

L'integrale dato vale $\frac{1}{3} \log 4$.

Esercizio 3.10

Determinare tutti gli $\alpha \geq 0$ per cui la funzione

$$f(x) = (\sqrt{1+x} - \sqrt{x})^\alpha$$

è sommabile su $[0, +\infty)$

Soluzione

La funzione $f(x)$ è continua e positiva su $[0, +\infty)$, quindi basta analizzare il suo comportamento in un intorno di $+\infty$, ovvero per $x \rightarrow +\infty$. Moltiplicando e dividendo per

$(\sqrt{1+x} + \sqrt{x})^\alpha$, si ha

$$f(x) = \frac{1}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{x})^\alpha} \sim \frac{1}{(2\sqrt{x})^\alpha} = \frac{1}{2^\alpha} \frac{1}{x^{\alpha/2}}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Per confronto, segue che f è sommabile su $[0, +\infty)$ se e solo se $\alpha/2 > 1$, quindi se e solo se

$$\alpha > 2.$$

Esercizio 3.11

Dato

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(1 + e^{x^2})}{2 + 3x^{5/2} + x^{3\alpha} + 12x} dx$$

stabilire per quali valori di $\alpha > 0$ converge, ovvero esiste finito.

Soluzione

La funzione $f(x)$ è continua e positiva su $[0, +\infty)$, quindi basta analizzare il suo comportamento in un intorno di $+\infty$, ovvero per $x \rightarrow +\infty$. Si ha

$$f(x) = \frac{\log(1 + e^{x^2})}{2 + 3x^{5/2} + x^{3\alpha} + 12x} \sim \frac{\log(e^{x^2})}{3x^{5/2} + x^{3\alpha}} = \frac{x^2}{3x^{5/2} + x^{3\alpha}} \sim$$

$$\sim \begin{cases} \frac{x^2}{3x^{5/2}} = \frac{1}{3} \frac{1}{x^{1/2}} & \text{se } 3\alpha < 5/2, \text{ ovvero se e solo se } \alpha < 5/6 \\ \frac{x^2}{4x^{5/2}} = \frac{1}{4} \frac{1}{x^{1/2}} & \text{se } 3\alpha = 5/2, \text{ ovvero se e solo se } \alpha = 5/6 \\ \frac{x^2}{x^{3\alpha}} = \frac{1}{x^{3\alpha-2}} & \text{se } 3\alpha > 5/2, \text{ ovvero se e solo se } \alpha > 5/6 \end{cases}$$

Nei primi due casi, l'integrale improprio diverge per confronto asintotico, in quanto $1/2 < 1$. Nel terzo caso, invece, esiste finito se e solo se $3\alpha - 2 > 1$, ovvero se e solo se $\alpha > 1$. In definitiva, l'integrale improprio esiste finito (converge) per $\alpha > 1$, diverge per $\alpha \leq 1$.

Esercizio 3.12

Dato

$$\int_0^{+\infty} \frac{3 + 2x^{3/2} + 5x^{4\alpha} + x^{1/2}}{\log(1 + e^{x^5})} dx$$

stabilire per quali valori di $\alpha > 0$ converge, ovvero esiste finito.

Soluzione

La funzione $f(x)$ è continua e positiva su $[0, +\infty)$, quindi basta analizzare il suo comportamento in un intorno di $+\infty$, ovvero per $x \rightarrow +\infty$. Si ha

$$f(x) = \frac{3 + 2x^{3/2} + 5x^{4\alpha} + x^{1/2}}{\log(1 + e^{x^5})} \sim \frac{2x^{3/2} + 5x^{4\alpha}}{\log(e^{x^5})} = \frac{2x^{3/2} + 5x^{4\alpha}}{x^5} \sim$$

$$\sim \begin{cases} \frac{2x^{3/2}}{x^5} = 2\frac{1}{x^{7/2}} & \text{se } 4\alpha < 3/2, \text{ ovvero se e solo se } \alpha < 3/8 \\ \frac{7x^{3/2}}{x^5} = 7\frac{1}{x^{7/2}} & \text{se } 4\alpha = 3/2, \text{ ovvero se e solo se } \alpha = 3/8 \\ \frac{5x^{4\alpha}}{x^5} = 5\frac{1}{x^{5-4\alpha}} & \text{se } 4\alpha > 3/2, \text{ ovvero se e solo se } \alpha > 3/8 \end{cases}$$

Nei primi due casi, l'integrale improprio converge per confronto asintotico, in quanto $7/2 > 1$. Nel terzo caso, invece, esiste finito se e solo se $5 - 4\alpha > 1$, ovvero se e solo se $\alpha < 1$. In definitiva, l'integrale improprio esiste finito (converge) per $\alpha < 1$, diverge per $\alpha \geq 1$.

Esercizio 3.13

Dato

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{x}(1+x^\alpha)} dx$$

stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge, ovvero esiste finito.

Soluzione

La funzione $f(x)$ è continua e positiva su $[1, +\infty)$, quindi basta analizzare il suo comportamento in un intorno di $+\infty$, ovvero per $x \rightarrow +\infty$. Si ha

$$f(x) \sim \begin{cases} \frac{\pi/2}{x^{1/2}+x^{1/2+\alpha}} \sim \frac{\pi}{2x^{1/2}} & \text{se } \alpha < 0 \\ \frac{\pi/2}{2x^{1/2}} = \frac{\pi}{4x^{1/2}} & \text{se } \alpha = 0 \\ \frac{\pi/2}{x^{1/2}+x^{1/2+\alpha}} \sim \frac{\pi}{2x^{1/2+\alpha}} & \text{se } \alpha > 0 \end{cases}$$

Nei primi due casi, l'integrale improprio diverge per confronto asintotico, in quanto $1/2 < 1$. Nel terzo caso, invece, esiste finito se e solo se $\frac{1}{2} + \alpha > 1$, ovvero se e solo se $\alpha > \frac{1}{2}$. In definitiva, l'integrale improprio esiste finito (converge) in un intorno $U(+\infty)$ per $\alpha > \frac{1}{2}$, diverge per $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

Esercizio 3.14

Operare il cambiamento di variabile $y = \sqrt{x}$ in

$$\int_4^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+6)} dx$$

e scrivere il corrispondente integrale in dy . Determinare poi il valore dell'integrale.

Soluzione

Da $y = \sqrt{x}$, $x = y^2$, $dx = 2y \, dy$, si ottiene

$$\int_4^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+6)} dx = \int_2^{+\infty} \frac{2}{(y+2)(y+6)} dy.$$

Coi fratti semplici,

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{2}{(y+2)(y+6)} dy &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_2^a \frac{2}{(y+2)(y+6)} dy \\ &= \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_2^a \left(\frac{1}{y+2} - \frac{1}{y+6} \right) dy = \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[\log \frac{y+2}{y+6} \right]_2^a \\ &= \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\log \frac{a+2}{a+6} - \log \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \log 2. \end{aligned}$$

Esercizio 3.15

Data la funzione

$$f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_1^x \frac{(t^3 - 27)(t-1)^3}{t^7 + 1} dt$$

- Scrivere $f'(x)$.
- Trovare gli eventuali punti di massimo o minimo relativo interni al dominio specificando il segno dei valori assunti in tali punti.
- Dire se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ esiste e se è finito o meno motivando la risposta.
- Stabilire per quale valore di α risulta finito e diverso da 0

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^\alpha f(x)$$

motivando la risposta.

Soluzione

Per il Teorema fondamentale del calcolo integrale

$$f'(x) = \frac{(x^3 - 27)(x-1)^3}{x^7 + 1}.$$

Soluzione

La derivata prima si annulla nell'estremo $x = 1$ del dominio e nel punto interno $x = 3$. Risulta negativa per $1 < x < 3$, positiva per $x > 3$. Il punto $x = 3$ è di minimo (assoluto) interno. Il valore corrispondente

$$f(3) = \int_1^3 \frac{(t^3 - 27)(t - 1)^3}{t^7 + 1} dt$$

è negativo come si deduce dal fatto che $f(1) = 0$ e che f è strettamente decrescente in $[1, 3]$. Alla stessa conclusione si giunge direttamente osservando che la funzione sotto il segno di integrale è negativa nell'intervallo $[1, 3]$.

Soluzione

La funzione f è strettamente crescente in $(3, +\infty)$, quindi il limite esiste, finito oppure $+\infty$. Per definizione,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{(t^3 - 27)(t - 1)^3}{t^7 + 1} dt,$$

quindi la domanda equivale a chiedere se la funzione

$$g(t) = \frac{(t^3 - 27)(t - 1)^3}{t^7 + 1}$$

è sommabile su $[1, +\infty)$ o meno.

La funzione $g(t)$ è continua in $[1, +\infty)$ quindi basta esaminare il suo comportamento per $t \rightarrow +\infty$. Si ha

$$g(t) \sim \frac{1}{t}, \quad t \rightarrow +\infty,$$

da cui la funzione non è sommabile su $[1, +\infty)$.

Concludendo, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Soluzione

Si ha $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0$, quindi per $\alpha \geq 0$ il limite proposto è zero. Per $\alpha < 0$, diciamo $\alpha = -\beta$ con $\beta > 0$, il limite proposto

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{(x - 1)^\beta}$$

ha la forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Applicando le regole di De L'Hospital, abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{(x - 1)^\beta} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f'(x)}{\beta(x - 1)^{\beta-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x^3 - 27)(x - 1)^3}{\beta(x - 1)^{\beta-1}(x^7 + 1)} = -\frac{13}{\beta} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)^3}{(x - 1)^{\beta-1}}. \end{aligned}$$

Tale limite esiste per ogni $\beta > 0$ ma risulta finito e diverso da zero, come richiesto, se e solo se $\beta = 4$ (ed in tale caso vale $-13/4$).

Concludendo, il limite proposto esiste finito e diverso da zero se e solo se $\alpha = -4$.

Esercizio 3.16

Calcolare

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+4)} dx$$

Dire poi come si possa anticipare, senza l'ausilio di primitive, la sommabilità della funzione nell'intervallo indicato.

Soluzione

La funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+4)}$$

è continua e positiva in $(0, +\infty)$, non limitata per $x \rightarrow 0$ e l'intervallo di integrazione non è limitato. Scritto

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^{+\infty} f(x) dx,$$

occorre e basta esaminare i comportamenti asintotici di $f(x)$ per $x \rightarrow 0$ e per $x \rightarrow +\infty$. Si ha

$$f(x) \sim \frac{1}{4\sqrt{x}}, \quad x \rightarrow 0; \quad f(x) \sim \frac{1}{x^{3/2}}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Dunque, $f(x)$ è sommabile su $(0, +\infty)$ perché lo è sia su $(0, 1]$ che su $[1, +\infty)$ per confronto.

Possiamo calcolare il valore con la sostituzione $y = \sqrt{x}$, $x = y^2$, $dx = 2y dy$:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+4)} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{2}{(y+1)(y+4)} dy \\ &= \frac{2}{3} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y+4} \right) dy = \frac{2}{3} \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[\log \frac{y+1}{y+4} \right]_0^a \\ &= \frac{2}{3} \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\log \frac{a+1}{a+4} - \log \frac{1}{4} \right) = -\frac{2}{3} \log \frac{1}{4} = \frac{2}{3} \log 4. \end{aligned}$$

Esercizio 3.17

Sia

$$f : [1/2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_1^x \frac{\log t}{t^2} dt$$

- Determinare gli eventuali estremanti locali e l'andamento di monotonia di f .
- Motivare l'esistenza di un asintoto orizzontale per f .

- Calcolare $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^2}$.

Soluzione

Per il Teorema fondamentale del calcolo integrale,

$$f'(x) = \frac{\log x}{x^2}$$

per ogni x nel dominio assegnato $[1/2, +\infty)$. La derivata si annulla per $x = 1$, risulta negativa per $1/2 \leq x < 1$, positiva per $x > 1$. La funzione f è quindi strettamente decrescente in $[1/2, 1)$, strettamente crescente in $(1, +\infty)$. Il punto $x = 1$ è di minimo assoluto con valore $f(1) = 0$, in particolare la funzione assume solo valori non negativi (positivi per ogni $x \neq 1$ nel dominio assegnato).

Soluzione

Si deve motivare che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ esiste finito. Per definizione,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\log t}{t^2} dt,$$

quindi si deve motivare il fatto che la funzione

$$g(t) = \frac{\log t}{t^2}$$

è sommabile su $[1, +\infty)$.

La funzione $g(t)$ è continua in $[1, +\infty)$ quindi basta esaminare il suo comportamento per $t \rightarrow +\infty$. Dal momento che $\log t$ è infinito di ordine inferiore a qualunque potenza, si ha

$$g(t) = O\left(\frac{1}{t^{2-\varepsilon}}\right), \quad t \rightarrow +\infty,$$

per ogni $\varepsilon > 0$, da cui, scegliendo ε tale che $2 - \varepsilon > 1$, la funzione g è sommabile su $[1, +\infty)$.

Soluzione

Si ha $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0$, quindi il limite proposto ha la forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Applicando le regole di De L'Hospital, abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{2(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{2(x-1)x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x-1} = \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Esercizio 3.18

Consideriamo

$$\int_2^{+\infty} \frac{x+2}{x(x+1)(x-1)} dx.$$

Prima di calcolarlo motivare il fatto che tale integrale esista finito.

Soluzione

La funzione

$$f(x) = \frac{x+2}{x(x+1)(x-1)}$$

è continua e positiva su $[2, +\infty)$ ed ha il comportamento asintotico

$$f(x) \sim \frac{1}{x^2}, \quad x \rightarrow +\infty,$$

quindi è impropriamente integrabile in un intorno di $+\infty$ per confronto.

Dai fratti semplici

$$\frac{x+2}{x(x+1)(x-1)} = -\frac{2}{x} + \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} + \frac{3}{2} \frac{1}{x-1},$$

segue la primitiva su $[2, +\infty)$

$$\int \frac{x+2}{x(x+1)(x-1)} dx = \log \frac{(x+1)^{1/2}(x-1)^{3/2}}{x^2}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{x+2}{x(x+1)(x-1)} dx &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[\log \frac{(x+1)^{1/2}(x-1)^{3/2}}{x^2} \right]_2^a \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\log \frac{(a+1)^{1/2}(a-1)^{3/2}}{a^2} - \log \frac{3^{1/2}}{4} \right) = \log \frac{4}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Esercizio 3.19

Utilizzando il cambiamento di variabile $y = e^x$ calcolare

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{(e^x+2)(e^x+3)} dx.$$

Soluzione

Da $y = e^x$, $x = \log y$, $dx = \frac{1}{y}dy$ e dai fratti semplici, segue

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{(e^x + 2)(e^x + 3)} dx &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{(y + 2)(y + 3)} dy \\ &= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{y + 2} - \frac{1}{y + 3} \right) dy = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[\log \frac{y + 2}{y + 3} \right]_1^a \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\log \frac{a + 2}{a + 3} - \log \frac{3}{4} \right) = \log \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Esercizio 3.20

Data la funzione

$$f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_1^x \frac{t^3 - 27}{t^5 + 1} dt$$

- Scrivere $f'(x)$.
- Determinare gli eventuali punti di massimo o minimo relativo.
- Scrivere $f''(x)$.
- Per motivare la presenza di flessi o meno, fare a parte un breve studio della funzione polinomiale $y = -2x^5 + 135x^2 + 3$ riportandone un grafico qualitativo. Il polinomio in questione è uno dei fattori di $f''(x)$.
- Dire, dal punto precedente, se f ha punti di flesso. (Non si chiede di trovare esplicitamente tali punti ma solo dire se ci sono e quanti sono e di localizzarli rispetto ad altri punti notevoli come punti di massimo o minimo relativo).
- Dire se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ esiste e se è finito o meno motivando la risposta (nel caso che sia finito non si chiede di calcolarlo).

Soluzione

Per il Teorema fondamentale del calcolo integrale,

$$f'(x) = \frac{x^3 - 27}{x^5 + 1}$$

per tutti gli x nel dominio assegnato $[1, +\infty)$.

Soluzione

La derivata si annulla per $x = 3$, è negativa in $[1, 3)$, positiva in $(3, +\infty)$. La funzione è strettamente decrescente in $[1, 3)$, strettamente crescente in $(3, +\infty)$. Il punto $x = 3$ è di

minimo assoluto, con valore

$$f(3) = \int_1^3 \frac{t^3 - 27}{t^5 + 1} dt,$$

calcolabile coi fratti semplici se necessario, di segno negativo in quanto $f(1) = 0$ ed f strettamente decrescente in $[1, 3)$. Si può determinare il segno di $f(3)$ anche direttamente osservando che la funzione sotto il segno di integrale è strettamente negativa per $t \in [1, 3)$.

Soluzione

$$f''(x) = \frac{x^2(-2x^5 + 135x^2 + 3)}{(x^5 + 1)^2}.$$

Soluzione

Si ha $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = \mp\infty$. Poi $y'(x) = -10x(x^3 - 27)$, da cui $y(x)$ è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$, il punto $x = 0$ è di minimo relativo con valore $y(0) = 3$, $y(x)$ è strettamente crescente in $(0, 3)$, il punto $x = 3$ è di massimo relativo con valore $y(3) = 732$, $y(x)$ è strettamente decrescente in $(3, +\infty)$. In particolare, $y(x)$ ha un unico zero per $x = \alpha$ con $\alpha \in (3, +\infty)$, $y(x) > 0$ per $x < \alpha$, $y(x) < 0$ per $x > \alpha$.

Soluzione

Nel dominio assegnato, la derivata seconda ha lo stesso segno di $-2x^5 + 135x^2 + 3$. Per quanto visto al punto precedente, la funzione f ha un flesso per $x = \alpha$, con $\alpha \in (3, +\infty)$, è strettamente convessa in $(1, \alpha)$, strettamente concava $(\alpha, +\infty)$.

Soluzione

La funzione è strettamente crescente in $(3, +\infty)$ quindi il limite esiste, finito oppure $+\infty$.

Per definizione,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^3 - 27}{t^5 + 1} dt,$$

quindi la domanda equivale a chiedere se la funzione

$$g(t) = \frac{t^3 - 27}{t^5 + 1}$$

è sommabile su $[1, +\infty)$ o meno.

La funzione $g(t)$ è continua in $[1, +\infty)$ quindi basta esaminare il suo comportamento per $t \rightarrow +\infty$. Si ha

$$g(t) \sim \frac{1}{t^2}, \quad t \rightarrow +\infty,$$

da cui la funzione è sommabile su $[1, +\infty)$.

Concludendo, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ esiste finito. Se necessario, è possibile calcolarlo coi fratti semplici.