



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Analisi

Matematica 1

Esercizi, volume 5 — Derivate

Gli esercizi svolti sul calcolo differenziale, una scheda per capitolo, con la soluzione subito dopo ogni testo: cuspidi, flessi e tangenti, calcolo delle derivate, rette tangenti, asintoti, prolungamenti continui, derivabilità, equazioni parametriche, studi di funzione, sviluppi di Mc Laurin, limiti con sviluppi asintotici, metodi di Newton e di bisezione, ricerca di estremi. Le schede sono di Fabio Furini e Gianluca Priori; molti esercizi sono tratti da M. Bramanti, *Esercitazioni di Analisi matematica 1*, Esculapio.

Fabio Furini

fabiofurini.github.io

Dipartimento di Ingegneria informatica, automatica e gestionale — Sapienza Università di Roma

Versione online e materiale scaricabile:
fabiofurini.github.io/analisi-matematica-1/
github.com/fabiofurini/analisi-matematica-1

Anno accademico 2026–2027

Indice

1	Cuspidi, flessi e tangenti	2
2	Calcolo delle funzioni derivate	7
3	Rette tangenti	22
4	Asintoti	26
5	Prolungamenti continui	31
6	Derivabilità	36
7	Equazioni parametriche	43
8	Studi di funzione	47
9	Sviluppi di Mc Laurin	58
10	Limiti con sviluppi asintotici	62
11	Metodi di Newton	67
12	Metodo di bisezione	70
13	Ricerca di estremi e punti di estremo locali e globali	74

Cuspidi, flessi e tangenti

Esercizio 1.1

Utilizzando la definizione di derivata, determinare il comportamento nell'origine della seguente funzione:

$$f(x) = x^{\frac{4}{3}}$$

Soluzione

Sia

$$f(x) = x^{\frac{4}{3}}$$

allora per $x_0 = 0$

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h^{4/3}}{h} = h^{1/3}$$

e i limiti sono:

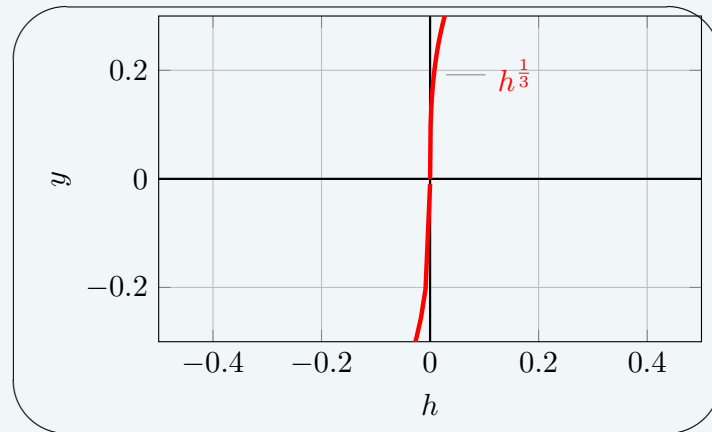
$$\lim_{h \rightarrow 0^-} h^{1/3} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} h^{1/3} = 0 \quad \text{quindi} \quad \lim_{h \rightarrow 0} h^{1/3} = 0 \quad \text{e} \quad f'(0) = 0.$$



La funzione ha un **punto a tangente orizzontale** in $x_0 = 0$. La funzione:

$$f(h) = h^{\frac{1}{3}}$$

è una potenza a esponente razionale $\frac{m}{n}$ positivo con n dispari (quindi definita su tutto $\mathbb{R}$) e m dispari (quindi funzione dispari). Il suo grafico è:

**Esercizio 1.2**

Utilizzando la definizione di derivata, determinare il comportamento nell'origine della seguente funzione:

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$$

Soluzione

Sia

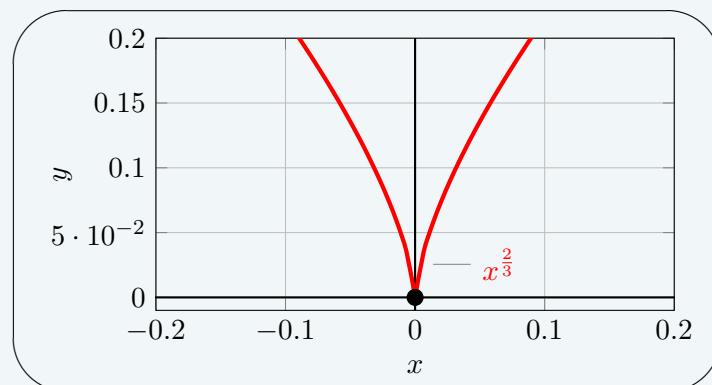
$$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$$

allora per $x_0 = 0$

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h^{2/3} - 0}{h} = \frac{1}{h^{1/3}}$$

e i limiti sono:

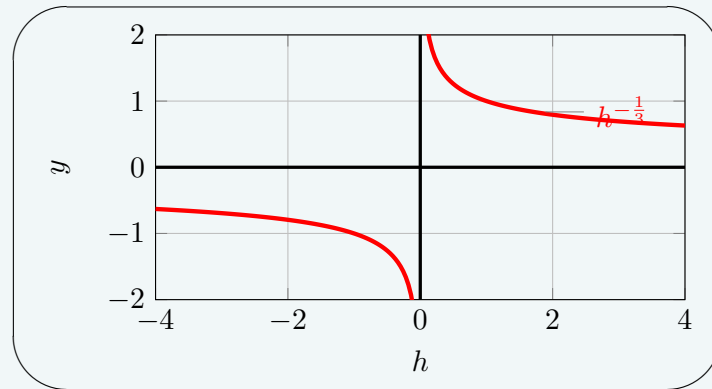
$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h^{1/3}} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^{1/3}} = +\infty \quad \text{quindi} \quad f'_-(0) = -\infty \quad \text{e} \quad f'_+(0) = +\infty$$



La funzione ha **una cuspide** in $x_0 = 0$. La funzione:

$$f(h) = h^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{h^{1/3}}$$

è una potenza a esponente razionale $\frac{m}{n}$ negativo con n dispari (quindi definita su tutto $\mathbb{R}$) e m dispari (quindi funzione dispari). Il suo grafico è:

**Esercizio 1.3**

Utilizzando la definizione di derivata, determinare il comportamento nell'origine della seguente funzione:

$$f(x) = x^{\frac{5}{2}}$$

Soluzione

Sia

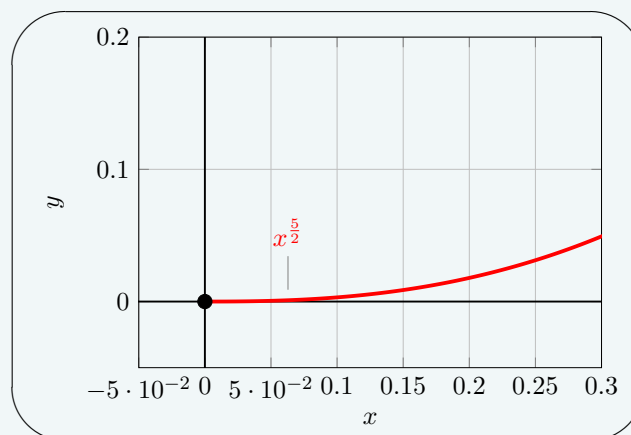
$$f(x) = x^{\frac{5}{2}}$$

allora per $x_0 = 0$

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h^{5/2}}{h} = h^{3/2}$$

e i limiti sono:

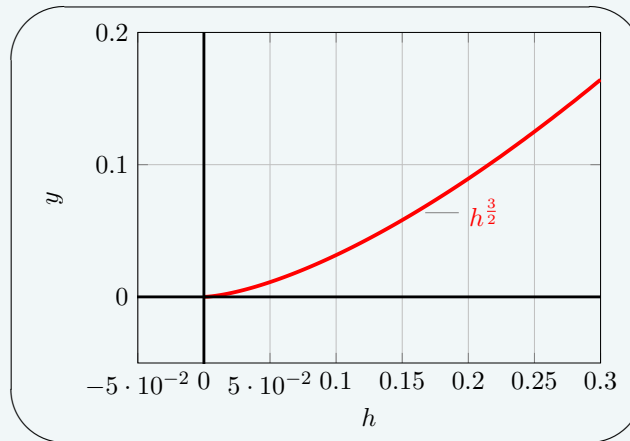
$$\lim_{h \rightarrow 0^+} h^{3/2} = 0.$$



La funzione ha un **punto a tangente orizzontale** in $x_0 = 0$. La funzione:

$$f(h) = h^{\frac{3}{2}}$$

è una potenza a esponente razionale $\frac{m}{n}$ positivo con n pari (quindi definita solo su $\mathbb{R}_+$). Il suo grafico è:



Esercizio 1.4

Utilizzando la definizione di derivata, determinare il comportamento nell'origine della seguente funzione:

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}}$$

Soluzione

Sia

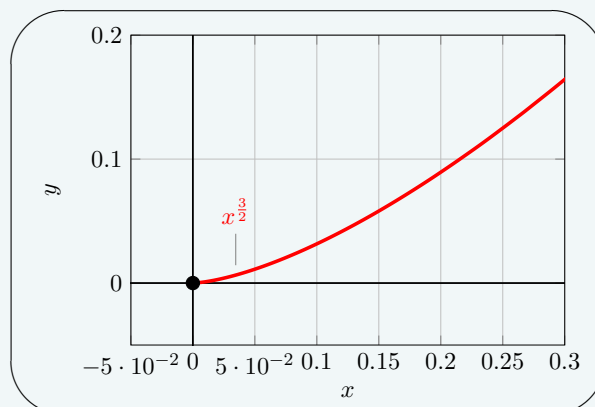
$$f(x) = x^{\frac{3}{2}}$$

allora per $x_0 = 0$

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h^{3/2}}{h} = h^{1/2}$$

e i limiti sono:

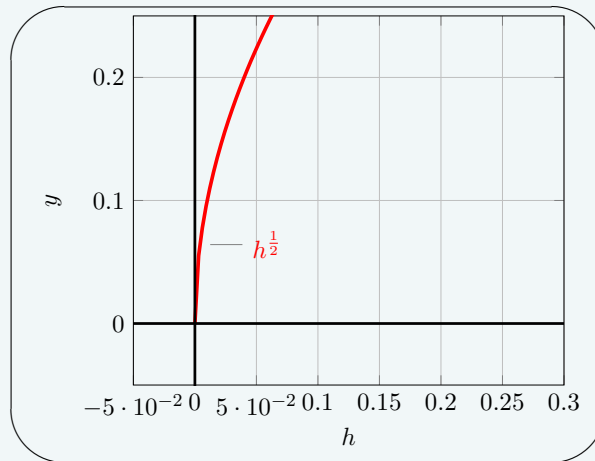
$$\lim_{h \rightarrow 0^+} h^{1/2} = 0.$$



La funzione ha un **punto a tangente orizzontale** in $x_0 = 0$. La funzione:

$$f(h) = h^{\frac{1}{2}}$$

è una potenza a esponente razionale $\frac{m}{n}$ positivo con n pari (quindi definita solo su $\mathbb{R}_+$). Il suo grafico è:



Calcolo delle funzioni derivate

Tabella delle funzioni derivate delle funzioni elementari:

	f	f'
1)	c (costante)	0
2)	x	1
3)	x^2	$2x$
4)	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
5)	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (per $x > 0$)
6)	x^α ($\alpha \in \mathbb{R}, x > 0$)	$\alpha x^{\alpha-1}$
7)	$\sin x$	$\cos x$
8)	$\cos x$	$-\sin x$
9)	$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
10)	$\cot x$	$-(1 + \cot^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$
11)	e^x	e^x
12)	$\log x$	$\frac{1}{x}$
13)	a^x ($a > 0$)	$a^x \log a$
14)	$\log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)	$\frac{1}{x \log a}$
15)	$\sinh x$	$\cosh x$
16)	$\cosh x$	$\sinh x$
17)	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
18)	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
19)	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Esercizio 2.1

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$.

1. Scrivere il rapporto incrementale di f nel punto $x = 1$.
2. Calcolare $f'(1)$ come limite del rapporto incrementale.
3. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(1, 1)$.

Soluzione

1.

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^3 - 1}{h} = \frac{3h + 3h^2 + h^3}{h} = 3 + 3h + h^2$$

2.

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} 3 + 3h + h^2 = 3$$

3. La retta tangente ha equazione $y = f(1) + f'(1)(x - 1)$ quindi

$$y = 1 + 3(x - 1)$$

da cui

$$y = 3x - 2$$

Esercizio 2.2Calcolare la funzione derivata della seguente funzione f specificando il dominio di f e di f' :

$$f(x) = x^2 \sin(x^3)$$

SoluzioneLe funzioni f ed f' sono definite su tutto $\mathbb{R}$.

Usando le regole della derivata di un prodotto e di funzioni composte si ha

$$f'(x) = 2x \cdot \sin(x^3) + x^2 \cdot \cos(x^3) \cdot 3x^2 = 2x \sin(x^3) + 3x^4 \cos(x^3)$$

Esercizio 2.3Calcolare la funzione derivata della seguente funzione f specificando il dominio di f e di f' :

$$f(x) = x^3 \cos(e^{5x^2})$$

SoluzioneLe funzioni f ed f' sono definite su tutto $\mathbb{R}$.

Usando le regole della derivata di un prodotto e di funzioni composte si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 \cdot \cos(e^{5x^2}) - x^3 \cdot \sin(e^{5x^2}) \cdot e^{5x^2} \cdot 10x = \\ &= 3x^2 \cos(e^{5x^2}) - 10x^4 e^{5x^2} \sin(e^{5x^2}) \end{aligned}$$

Esercizio 2.4

Calcolare la funzione derivata della seguente funzione f specificando il dominio di f e di f' :

$$f(x) = e^{1/x}$$

Soluzione

Usando le regole della derivata di funzioni composte si ha

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot e^{1/x}$$

Le funzioni f ed f' sono definite su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Esercizio 2.5

Calcolare la funzione derivata della seguente funzione:

$$f(x) = 3x^4 + 5x + x^{3/2} - 2x^{-3}$$

Soluzione

$$f'(x) = 12x^3 + 5 + \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{6}{x^4}$$

Esercizio 2.6

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

$$(1) \ f(x) = \log(|x|), \quad (2) \ f(x) = \log(3x), \quad (3) \ f(x) = \log\left(\left|\frac{x+2}{3-x}\right|\right)$$

Soluzione

1.

$$(\log(|x|))' = \frac{1}{|x|} \cdot \operatorname{sgn}(x) = \frac{1}{x}$$

2.

$$(\log(3x))' = (\log 3 + \log x)' = \frac{1}{x}$$

3.

$$\begin{aligned}
 \left(\log \left(\left| \frac{x+2}{3-x} \right| \right) \right)' &= \frac{1}{\left| \frac{x+2}{3-x} \right|} \cdot \operatorname{sgn} \left(\frac{x+2}{3-x} \right) \cdot \left(\left(\frac{x+2}{3-x} \right) \right)' = \frac{\left(\left(\frac{x+2}{3-x} \right) \right)'}{\frac{x+2}{3-x}} \\
 &= \left(\left(\frac{x+2}{3-x} \right) \right)' \cdot \frac{3-x}{x+2} = \frac{3-x+x+2}{(3-x)^2} \cdot \frac{3-x}{x+2} \\
 &= \frac{5}{(3-x) \cdot (x+2)} = \frac{5}{-x^2+x+6}
 \end{aligned}$$

Esercizio 2.7

Calcolare la funzione derivata della seguente funzione:

$$f(x) = e^{-3x} (x^2 + 2x - 1)$$

Soluzione

Usando le regole della derivata di un prodotto e di funzioni composte si ha:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= -3 e^{-3x} (x^2 + 2x - 1) + e^{-3x} (2x + 2) = \\
 &= e^{-3x} (-3x^2 - 6x + 3 + 2x + 2) = e^{-3x} (-3x^2 - 4x + 5)
 \end{aligned}$$

Esercizio 2.8

Calcolare la funzione derivata della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x}{a} \right), \quad a > 0$$

Soluzione

$$f'(x) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + x^2/a^2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{\frac{a^2+x^2}{a^2}} = \frac{1}{a^2 + x^2}$$

Esercizio 2.9

Calcolare la funzione derivata della seguente funzione:

$$f(x) = x \log x$$

Soluzione

Usando le regole della derivata di un prodotto si ha:

$$f'(x) = \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1.$$

Esercizio 2.10

Calcolare la funzione derivata della seguente funzione:

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Soluzione

Usando le regole della derivata di un rapporto e di funzioni composte si ha:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}} \cdot \frac{(1-x) + (1+x)}{(1-x)^2} = \frac{(1-x)^2}{(1-x)^2 + (1+x)^2} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = \\ &= \frac{2}{1+x^2-2x+1+x^2+2x} = \frac{2}{2(x^2+1)} = \frac{1}{x^2+1} \end{aligned}$$

Esercizio 2.11

Calcolare la funzione derivata della seguente funzione:

$$f(x) = e^{2x} (2 \sin 3x - 4 \cos 3x)$$

Soluzione

Usando le regole della derivata del prodotto e di funzioni composte si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2e^{2x} (2 \sin 3x - 4 \cos 3x) + e^{2x} (2 \cdot 3 \cos 3x + 4 \cdot 3 \sin 3x) = \\ &= 2e^{2x} (2 \sin 3x - 4 \cos 3x + 3 \cos 3x + 6 \sin 3x) = 2e^{2x} (8 \sin 3x - \cos 3x) \end{aligned}$$

Esercizio 2.12

Calcolare la funzione derivata della seguente funzione:

$$f(x) = e^{\frac{x+2}{x-3}}$$

Soluzione

Usando le regole della derivata di funzioni composte si ha

$$f'(x) = e^{\frac{x+2}{x-3}} \left[\frac{(x-3) - (x+2)}{(x-3)^2} \right] = \frac{-5 e^{\frac{x+2}{x-3}}}{(x-3)^2}$$

Esercizio 2.13

Calcolare la funzione derivata della seguente funzione:

$$f(x) = \tanh x$$

Soluzione

Calcoliamo la funzione derivata della funzione tangente iperbolica

$$f(x) = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

Usando le regole della derivata di un rapporto si ha

$$f'(x) = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$$

Inoltre, poiché $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, si ha anche

$$f'(x) = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x,$$

dove $\operatorname{sech} x$ è la secante iperbolica definita come $\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$.

Esercizio 2.14

Calcolare la funzione derivata della seguente funzione:

$$f(x) = \coth x$$

Soluzione

Calcoliamo la funzione derivata della funzione cotangente iperbolica

$$f(x) = \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

Usando le regole della derivata di un rapporto si ha

$$f'(x) = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$$

Inoltre, poiché $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, si ha anche

$$f'(x) = -\frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\sinh^2 x} = -\frac{1}{\sinh^2 x} = -\operatorname{csch}^2 x,$$

dove $\operatorname{csch} x$ è la cosecante iperbolica definita come $\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$.

Esercizio 2.15

Calcolare la funzione derivata della seguente funzione:

$$f(x) = e^{x^2+3x}$$

Soluzione

Usando le regole della derivata di funzioni composte si ha

$$f'(x) = e^{x^2+3x} \cdot (2x+3)$$

Esercizio 2.16

Calcolare la funzione derivata della seguente funzione:

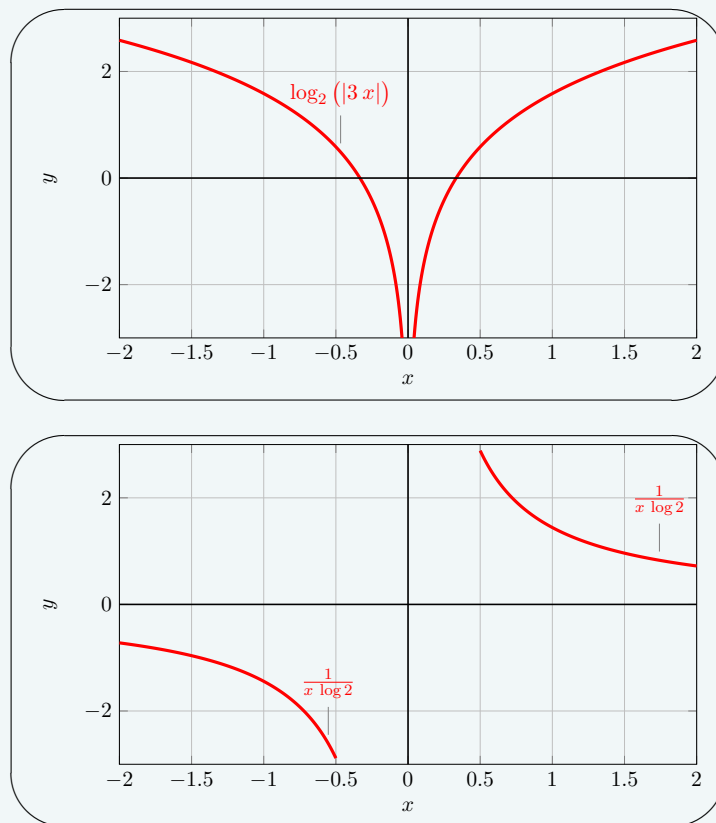
$$f(x) = \log_2(|3x|)$$

Soluzione

Con $x \neq 0$, abbiamo:

$$f(x) = \begin{cases} \log_2(3x), & x > 0 \\ \log_2(-3x), & x < 0 \end{cases} \quad \text{quindi} \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{3x \log 2} = \frac{1}{x \log 2}, & x > 0 \\ \frac{-3}{-3x \log 2} = \frac{1}{x \log 2}, & x < 0 \end{cases}$$

Soluzione



La funzione è discontinua in $x = 0$ quindi non è derivabile.

Esercizio 2.17

Calcolare la funzione derivata della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 2}{2x + 1}$$

Soluzione

Usando le regole della derivata di un rapporto si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x + 3)(2x + 1) - 2(x^2 + 3x - 2)}{(2x + 1)^2} = \frac{4x^2 + 2x + 6x + 3 - 2x^2 - 6x + 4}{(2x + 1)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 2x + 7}{(2x + 1)^2} \end{aligned}$$

Esercizio 2.18

Calcolare la funzione derivata della seguente funzione:

$$f(x) = x^2 \log(\cos x)$$

Soluzione

Usando le regole della derivata di funzioni composte, si ha

$$f'(x) = 2x \cdot \log(\cos x) + x^2 \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = 2x \log(\cos x) - x^2 \tan x$$

Esercizio 2.19

Calcolare la funzione derivata della seguente funzione:

$$f(x) = \sqrt{\arctan(1+x^2)}$$

Soluzione

Usando le regole della derivata di funzioni composte, si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\arctan(1+x^2)}} \cdot \frac{1}{1+(1+x^2)^2} \cdot 2x = \frac{x}{(1+(1+x^2)^2)\sqrt{\arctan(1+x^2)}} \\ &= \frac{x}{(x^4+2x^2+2)\sqrt{\arctan(1+x^2)}} \end{aligned}$$

Esercizio 2.20

Stabilire se la funzione

$$f(x) = e^{-x+1} - 2\pi x - 1$$

è invertibile e calcolare la derivata di $f^{-1}(y)$ per $y = -2\pi$.

Soluzione

Poiché $f'(x) = -e^{-x+1} - 2\pi < 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, ricaviamo subito che f è strettamente monotona decrescente e quindi invertibile su $\mathbb{R}$. Osserviamo inoltre che

$$e^{-x+1} - 2\pi x - 1 = -2\pi \iff x = 1,$$

cioè $f^{-1}(-2\pi) = 1$. Dal Teorema di derivazione della funzione inversa ricaviamo subito

$$(f^{-1})'(-2\pi) = \frac{1}{f'(1)} = -\frac{1}{1+2\pi}.$$

Osservazione: Non saremmo stati in grado di scrivere l'espressione analitica di f^{-1} , anche se essa esiste poiché f è invertibile; il Teorema di derivazione della funzione inversa permette di superare tale ostacolo, senza dover passare per l'espressione esplicita dell'inversa.

Esercizio 2.21

Stabilire se la funzione

$$f(x) = 4x + \pi \sin x$$

è invertibile e calcolare la derivata di $f^{-1}(y)$ per $y = 4\pi$.

Soluzione

Poiché $f'(x) = 4 + \pi \cos x > 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, ricaviamo subito che f è strettamente monotona crescente e quindi invertibile su $\mathbb{R}$. Osserviamo inoltre che

$$4x + \pi \sin x = 4\pi \iff x = \pi,$$

cioè $f^{-1}(4\pi) = \pi$. Dal Teorema di derivazione della funzione inversa ricaviamo subito

$$(f^{-1})'(4\pi) = \frac{1}{f'(\pi)} = \frac{1}{4 - \pi}.$$

Osservazione: Non saremmo stati in grado di scrivere l'espressione analitica di f^{-1} , anche se essa esiste poiché f è invertibile; il Teorema di derivazione della funzione inversa permette di superare tale ostacolo, senza dover passare per l'espressione esplicita dell'inversa.

Esercizio 2.22

Sia $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, tale che $f'(1) = 5e$. Posta $g(x) = f(\log x)$, calcolare $g'(e)$.

Soluzione

Osserviamo che $g \in \mathcal{C}^1(0, +\infty)$, in quanto composizione di funzioni di classe $\mathcal{C}^1$ del proprio dominio. Pertanto, utilizzando il Teorema di derivazione delle funzioni composte, si ricava

$$g'(x) = f'(\log x) \frac{1}{x} \implies g'(e) = \frac{f'(1)}{e} = 5.$$

Esercizio 2.23

Calcolare la funzione derivata della seguente funzione:

$$h(x) = x^{x \log x}$$

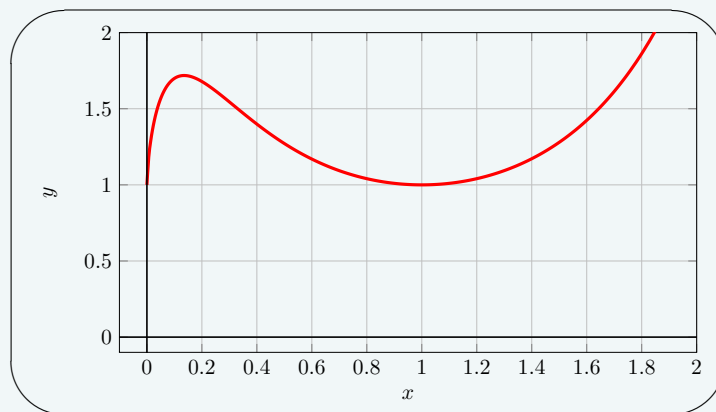
Soluzione

Usiamo la regola della derivata di una funzione elevata a un'altra funzione. Le due funzioni sono:

$$f(x) = x \quad \text{e} \quad g(x) = x \log x$$

Quindi:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(\exp(x \cdot \log^2 x) \right)' = \exp(x \cdot \log^2 x) \cdot (x \cdot \log^2 x)' = \\ &= x^{x \log x} \cdot \left(\log^2 x + x \cdot \left(\log^2 x \right)' \right) = x^{x \log x} \cdot \left(\log^2 x + x \cdot \frac{2 \cdot \log x}{x} \right) \\ &= x^{x \log x} \cdot \log x \cdot (\log x + 2) \end{aligned}$$

**Esercizio 2.24**

Calcolare la funzione derivata della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{a x + b}{c x + d}$$

Soluzione

Usando le regole della derivata di un rapporto si ha

$$f'(x) = \frac{a(c x + d) - c(a x + b)}{(c x + d)^2} = \frac{a c x + a d - a c x - b c}{(c x + d)^2} = \frac{a d - b c}{(c x + d)^2}$$

Esercizio 2.25

Calcolare la funzione derivata della seguente funzione:

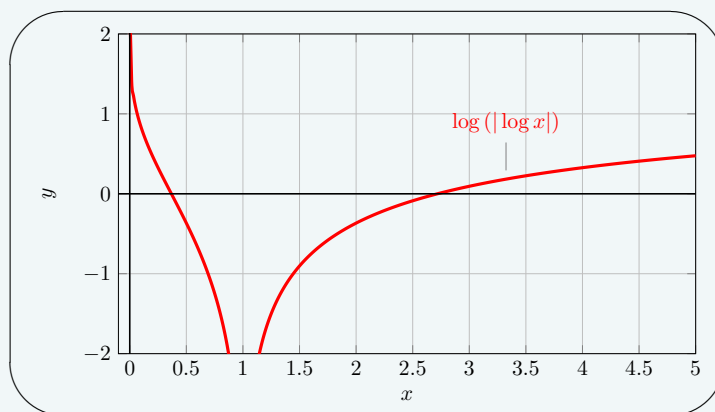
$$f(x) = \log(|\log x|)$$

Soluzione

Con $x \neq 1$, abbiamo:

$$f(x) = \begin{cases} \log(\log x), & x > 1 \\ \log(-\log x), & x < 1 \end{cases} \quad \text{quindi} \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \log x}, & x > 1 \\ -\frac{1}{\log x} \cdot -\frac{1}{x} = \frac{1}{x \log x}, & x < 1 \end{cases}$$

La funzione è discontinua in $x = 1$ quindi non è derivabile.

**Esercizio 2.26**

Calcolare la funzione derivata della seguente funzione f specificando il dominio di f e di f' :

$$f(x) = \sqrt[4]{x^2 \log(x^3)}$$

Soluzione

Da $x^3 > 0$ e $x^2 \log(x^3) \geq 0$ si ha che f è definita per $x \in [1, +\infty)$ e per tali x si ha

$$f(x) = \sqrt[4]{3x^2 \log x}$$

Grazie alle usuali regole di derivazione, per $x > 1$ la funzione f è derivabile e si ha:

$$f'(x) = \frac{\sqrt[4]{3}}{4\sqrt[4]{x^6 \log^3 x}} (2x \log x + x).$$

Per $x = 1$, non essendo applicabili le usuali regole di derivazione in quanto la funzione $\sqrt[4]{y}$ non è derivabile per $y = 0$, esaminiamo direttamente il limite del rapporto incrementale dove l'incremento h ha senso solo se $h > 0$:

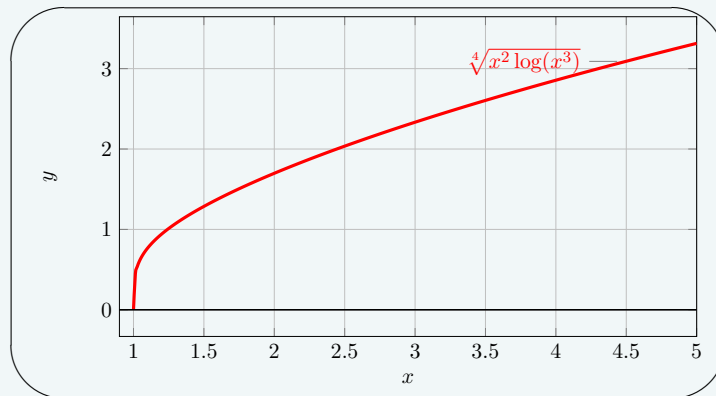
$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \sqrt[4]{3} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[4]{(1+h)^2 \log(1+h)}}{h} = \\ &= \sqrt[4]{3} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\log^{1/4}(1+h)}{h} = \sqrt[4]{3} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^{1/4}}{h} = \sqrt[4]{3} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^{3/4}} = +\infty \end{aligned}$$

dove si è usato $\log^{1/4}(1+h) \sim h^{1/4}$ per $h \rightarrow 0^+$. La funzione f non è derivabile per $x = 1$. Nel punto $(1, 0)$ il grafico ha retta tangente verticale.

Alternativamente si giunge alla stessa conclusione $f'(1) = +\infty$ osservando che f è continua e che

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[4]{3}}{4\sqrt[4]{x^6 \log^3 x}} (2x \log x + x) = +\infty$$

usando il Teorema del valor medio di Lagrange o, equivalentemente, le regole di De L'Hospital per le forme indeterminate $0/0$.



Esercizio 2.27

Dare un esempio di $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continua per $x = 1$, non derivabile per $x = 1$ e tale che $f(0) = 2$.

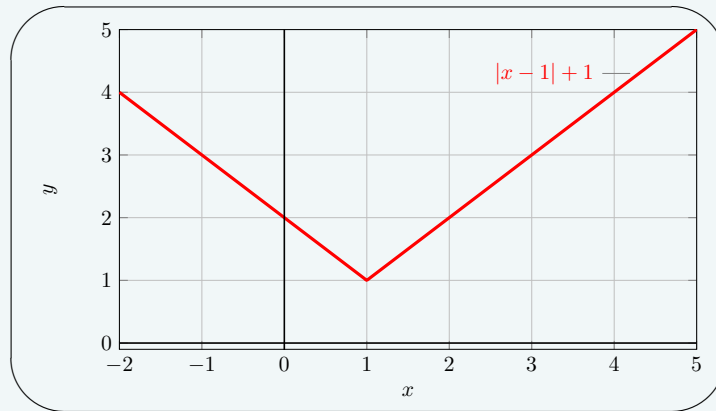
Soluzione

Ad esempio

$$f(x) = |x - 1| + 1.$$

La funzione verifica $f(0) = 2$ ed è continua su tutto $\mathbb{R}$.

In $x = 1$ si ha $f'_+(1) = 1$, $f'_-(1) = -1$ quindi la funzione non è derivabile.



Rette tangenti

Esercizio 3.1

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $y = f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$ per

$$f(x) = 3x^2 + 2x + 1, \quad x_0 = 2$$

Soluzione

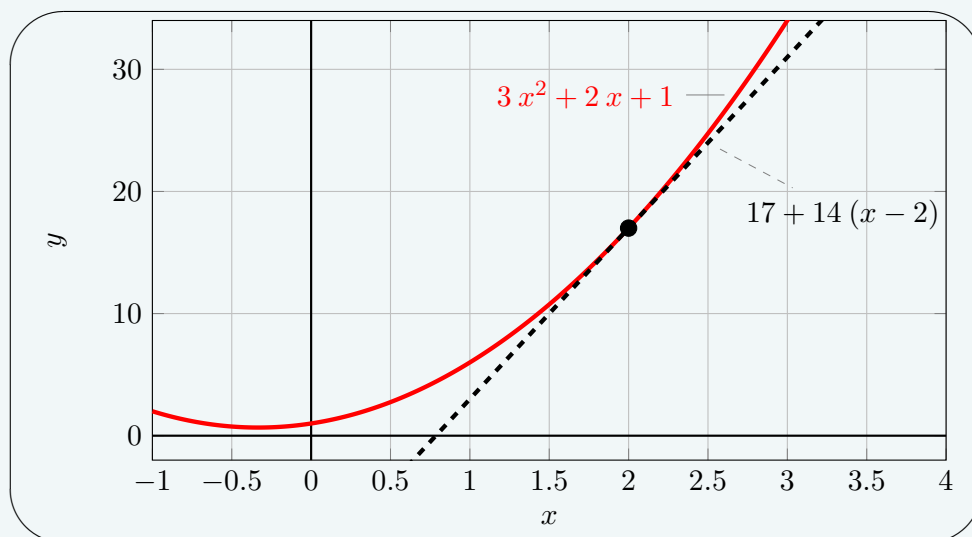
Calcoliamo l'equazione della retta tangente al grafico della funzione

$f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ nel punto di ascissa $x_0 = 2$, abbiamo :

$$f(2) = 17, \quad f'(x) = 6x + 2, \quad f'(2) = 14;$$

la retta tangente è

$$y = f(2) + f'(2)(x - 2) = 17 + 14(x - 2)$$



Esercizio 3.2

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $y = f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$ per

$$f(x) = \sin x, \quad x_0 = \frac{\pi}{3}$$

Soluzione

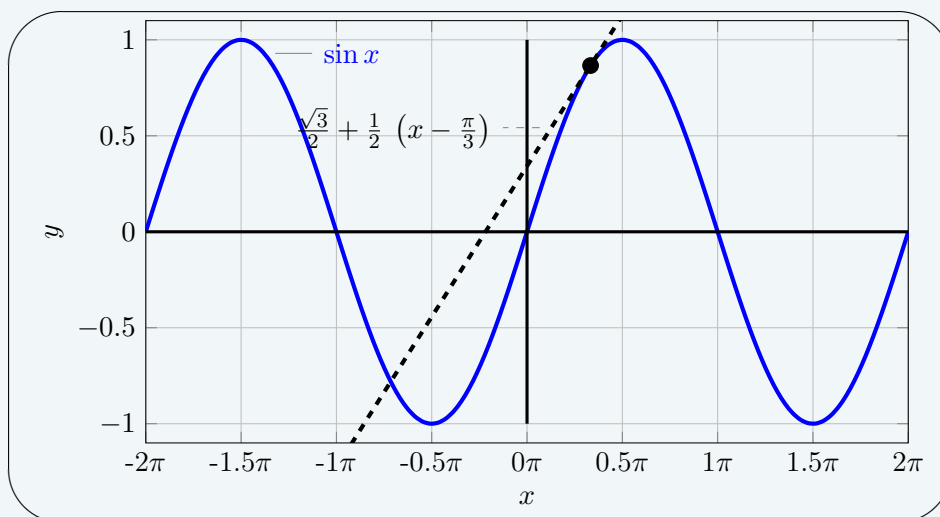
Calcoliamo l'equazione della retta tangente al grafico della funzione

$f(x) = \sin x$ nel punto di ascissa $x_0 = \frac{\pi}{3}$, abbiamo :

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f'(x) = \cos x, \quad f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2};$$

la retta tangente è

$$y = f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

**Esercizio 3.3**

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $y = f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$ per

$$f(x) = \log x, \quad x_0 = 1$$

Soluzione

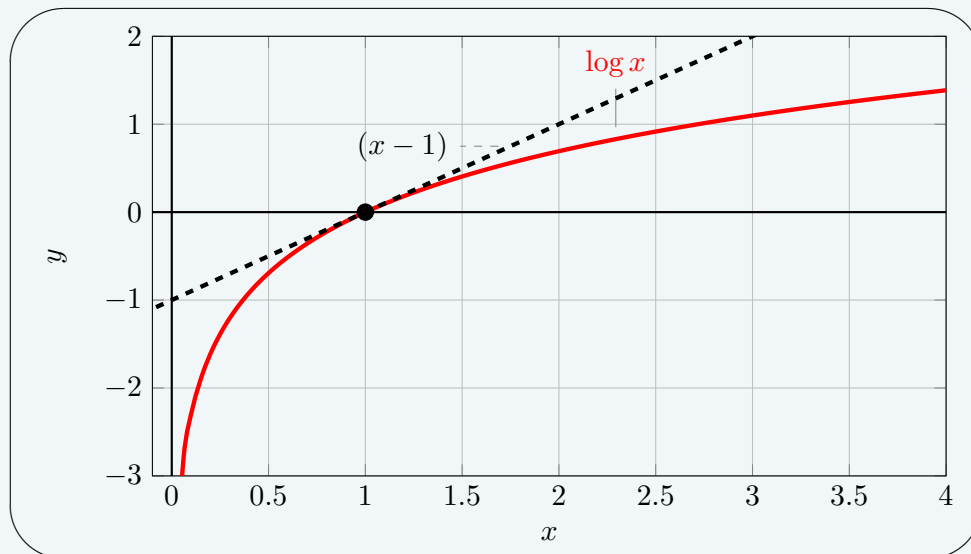
Calcoliamo l'equazione della retta tangente al grafico della funzione

$f(x) = \log x$ nel punto di ascissa $x_0 = 1$, abbiamo :

$$f(1) = 0, \quad f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1 + h)}{h} = 1$$

la retta tangente è

$$y = f(1) + f'(1)(x - 1) = 0 + (x - 1)$$



Esercizio 3.4

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $y = f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$ per

$$f(x) = a^x, \quad x_0 = 2$$

Soluzione

Esercizio 3.5

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $y = f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$ per

$$f(x) = (x \log |x|)^3, \quad x_0 = -1$$

Soluzione

Esercizio 3.6

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $y = f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$ per

$$f(x) = \cos(\log x), \quad x_0 = e^{\frac{\pi}{2}}$$

Soluzione

Esercizio 3.7

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $y = f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$ per

$$f(x) = e^{x^2}, \quad x_0 = \log 2$$

Soluzione**Esercizio 3.8**

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $y = f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$ per

$$f(x) = e^{-|x|}, \quad x_0 = -1$$

Soluzione

Asintoti

Esercizio 4.1

Determinare gli eventuali asintoti della seguente funzione nel suo dominio naturale

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - x}{x + 2}}$$

Soluzione

La funzione f è definita su

$$(-\infty, -2) \cup [-1, 0] \cup [1, +\infty).$$

Poichè

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$$

la retta $x = -2$ è asintoto verticale.

Per $x \rightarrow +\infty$ abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^3 - x}{x^3 + 2x^2}} = 1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3 - x}{x + 2}} - x \right) \frac{\sqrt{\frac{x^3 - x}{x + 2}} + x}{\sqrt{\frac{x^3 - x}{x + 2}} + x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 - x}{x + 2} - x^2 \right) \frac{1}{x \left(\sqrt{\frac{x^3 - x}{x + 2}} + 1 \right)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x - 1}{x + 2} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^3 - x}{x + 2}} + 1} = -1$$

quindi abbiamo l'asintoto

$$y = x - 1, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Soluzione

Per $x \rightarrow -\infty$ abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{\frac{x^3 - x}{x^3 + 2x^2}} = -1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3 - x}{x + 2}} + x \right) \frac{\sqrt{\frac{x^3 - x}{x + 2}} - x}{\sqrt{\frac{x^3 - x}{x + 2}} - x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3 - x}{x + 2} - x^2 \right) \frac{1}{-x \left(\sqrt{\frac{x^3 - x}{x^3 + 2x^2}} + 1 \right)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1}{x + 2} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^3 - x}{x^3 + 2x^2}} + 1} = 1$$

quindi abbiamo l'asintoto

$$y = -x + 1, \quad x \rightarrow -\infty.$$

Soluzione

Utilizzando lo sviluppo asintotico

$$\sqrt{1 + y} = 1 + \frac{1}{2}y + o(y), \quad y \rightarrow 0$$

e tenendo conto dell'equivalenza

$$\frac{2x + 1}{x^2 + 2x} \sim \frac{2}{x}, \quad x \rightarrow \pm\infty,$$

quindi

$$\frac{2x + 1}{x^2 + 2x} \sim \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow \pm\infty,$$

possiamo operare anche nel seguente modo:

$$f(x) = |x| \sqrt{1 - \frac{2x + 1}{x^2 + 2x}} =$$

$$|x| \sqrt{1 - (2/x) + o(1/x)} = |x| (1 - (1/x) + o(1/x)) =$$

$$|x| - \operatorname{sgn}(x) + o(1), \quad x \rightarrow \pm\infty$$

quindi ritroviamo gli asintoti obliqui $y = -x + 1$ per $x \rightarrow -\infty$ e $y = x - 1$ per $x \rightarrow +\infty$.

Esercizio 4.2

Determinare gli eventuali asintoti della seguente funzione nel suo dominio naturale

$$f(x) = \sqrt{9x^2 + 2x + 1}$$

Soluzione

La funzione f è definita su tutto $\mathbb{R}$.

Per $x \rightarrow +\infty$ abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{9 + 2/x + 1/x^2} = 3$$

e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 3x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{9x^2 + 2x + 1} - 3x \right) \frac{\sqrt{9x^2 + 2x + 1} + 3x}{\sqrt{9x^2 + 2x + 1} + 3x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{3x \left(\sqrt{1 + 2/(9x) + 1/(9x^2)} + 1 \right)} = \frac{1}{3}$$

quindi abbiamo l'asintoto

$$y = 3x + \frac{1}{3}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Per $x \rightarrow -\infty$ abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{9 + 2/x + 1/x^2} = -3$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + 3x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{9x^2 + 2x + 1} + 3x \right) \frac{\sqrt{9x^2 + 2x + 1} - 3x}{\sqrt{9x^2 + 2x + 1} - 3x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1}{-3x \left(\sqrt{1 + 2/(9x) + 1/(9x^2)} + 1 \right)} = -\frac{1}{3}$$

quindi abbiamo l'asintoto

$$y = -3x - \frac{1}{3}, \quad x \rightarrow -\infty.$$

Soluzione

In maniera alternativa, possiamo operare come segue:

$$f(x) = 3|x| \sqrt{1 + \frac{2}{9x} + \frac{1}{9x^2}} =$$

$$3|x| \sqrt{1 + (2/9x) + o(1/x)} = 3|x|(1 + (1/9x) + o(1/x)) =$$

$$3|x| + (1/3)\text{sgn}(x) + o(1), \quad x \rightarrow \pm\infty$$

quindi ritroviamo gli asintoti obliqui $y = -3x - (1/3)$ per $x \rightarrow -\infty$ e $y = 3x + (1/3)$ per $x \rightarrow +\infty$.

Esercizio 4.3

Determinare gli eventuali asintoti della seguente funzione nel suo dominio naturale

$$f(x) = x \left(e^{-\frac{1}{x}} + \sin \frac{1}{x} \right)$$

Soluzione

La funzione f è definita per $x \neq 0$. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{-\frac{1}{x}} + \lim_{x \rightarrow 0^-} x \sin \frac{1}{x} = -\infty + 0 = -\infty$$

dove

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{-\frac{1}{x}} = -\infty$$

viene dal fatto che $e^{-1/x}$ è infinito di ordine superiore rispetto a $1/x$ per $x \rightarrow 0^-$ e che $x e^{-1/x} < 0$ per $x < 0$. Per il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

si è usato il fatto che il prodotto di un infinitesimo (x) per una funzione limitata ($\sin(1/x)$) è un infinitesimo. La retta $x = 0$ è dunque asintoto verticale.

Soluzione

Per $x \rightarrow \pm\infty$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-\frac{1}{x}} + \sin \frac{1}{x} = 1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} + \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} =$$

$$\lim_{y \rightarrow 0^\pm} \frac{e^{-y} - 1}{y} + \lim_{y \rightarrow 0^\pm} \frac{\sin y}{y} = -1 + 1 = 0$$

quindi c'è l'asintoto obliquo

$$y = x$$

sia per $x \rightarrow -\infty$ che per $x \rightarrow +\infty$.

Soluzione

La stessa cosa si può ottenere con gli sviluppi $e^y = 1 + y + o(y)$, $\sin y = y + o(y)$ per $y \rightarrow 0$:

$$f(x) = x(1 - 1/x + o(1/x)) + x(1/x + o(1/x)) = x - 1 + 1 + o(1) = x + o(1)$$

per $x \rightarrow \pm\infty$ che significa proprio che abbiamo l'asintoto obliquo

$$y = x$$

sia per $x \rightarrow -\infty$ che per $x \rightarrow +\infty$.

Prolungamenti continui

Esercizio 5.1

Per la seguente funzione stabilire se esistono prolungamenti continui agli estremi del dominio. Studiare poi la derivabilità di tali prolungamenti.

$$f : [0, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = (\cos x)^{(\pi/2)-x}$$

Soluzione

Ponendo $y = \pi/2 - x$ abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} e^{(\frac{\pi}{2}-x) \log \cos x} = \lim_{y \rightarrow 0^+} e^{y \log \sin y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} e^{y \log(y+o(y))} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} e^{y \log(y(1+o(1)))} = \lim_{y \rightarrow 0^+} e^{y \log y + y \log(1+o(1))} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

Si ha un prolungamento continuo ponendo

$$f(\pi/2) = 1.$$

Esaminiamo il limite del rapporto incrementale:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{f(x) - f(\pi/2)}{x - \pi/2} &= \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{e^{(\frac{\pi}{2}-x) \log \cos x} - 1}{x - \pi/2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{(\frac{\pi}{2}-x) \log \cos x}{x - \pi/2} = \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} -\log \cos x = +\infty \end{aligned}$$

usando l'equivalenza

$$e^t - 1 \sim t, \quad t \rightarrow 0$$

con

$$t = \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \log \cos x, \quad x \rightarrow \pi/2^-.$$

Ne segue che f si può prolungare con continuità in $x = \pi/2$ ma tale prolungamento non è derivabile in $x = \pi/2$ (tangente verticale).

Esercizio 5.2

Per la seguente funzione stabilire se esistono prolungamenti continui agli estremi del dominio. Studiare poi la derivabilità di tali prolungamenti.

$$f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = (\cos(\pi x/2))^{\log x}$$

Soluzione

Abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\log x \log \cos(\pi x/2)} = e^0 = 1$$

in quanto

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \log x \log \cos(\pi x/2) &= \lim_{x \rightarrow 0} \log x \log \left(1 - \frac{\pi^2}{8} x^2 + o(x^2) \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\pi^2}{8} x^2 + o(x^2) \right) \log x = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\pi^2}{8} x^2 \log x = 0. \end{aligned}$$

Si ha un prolungamento continuo ponendo

$$f(0) = 1.$$

Soluzione

Esaminiamo il limite del rapporto incrementale:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\log x \log \cos(\pi x/2)} - 1}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x \log \cos(\pi x/2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\pi^2}{8} x \log x = 0 \end{aligned}$$

usando le equivalenze

$$e^t - 1 \sim t, \quad t \rightarrow 0$$

con

$$t = \log x \log \cos(\pi x/2), \quad x \rightarrow 0$$

e

$$\log \cos(\pi x/2) \sim -\frac{\pi^2}{8} x^2, \quad x \rightarrow 0.$$

Ne segue che f si può prolungare con continuità in $x = 0$ e tale prolungamento è derivabile in $x = 0$ con

$$f'(0) = 0.$$

Soluzione

Esaminiamo ora il comportamento per $x \rightarrow 1$ ponendo $y = x - 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\log x \log \cos(\pi x/2)} = \lim_{y \rightarrow 0} e^{\log(1+y) \log(-\sin(\pi y/2))} = e^0 = 1$$

in quanto

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \log(1+y) \log(-\sin(\pi y/2)) &= \lim_{y \rightarrow 0} y \log(-\pi y/2 + o(y)) = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} y \log(-\pi y/2(1 + o(1))) = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} y \log(-\pi y/2) + \lim_{y \rightarrow 0} y \log(1 + o(1)) = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Si ha un prolungamento continuo ponendo

$$f(1) = 1.$$

Esaminiamo il limite del rapporto incrementale:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{\log x \log \cos(\pi x/2)} - 1}{x - 1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{\log(1+y) \log(-\sin(\pi y/2))} - 1}{y} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y) \log(-\sin(\pi y/2))}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \log(-\sin(\pi y/2)) = -\infty \end{aligned}$$

usando le equivalenze

$$e^t - 1 \sim t, \quad t \rightarrow 0$$

con

$$t = \log(1+y) \log(-\sin(\pi y/2)), \quad y \rightarrow 0$$

e

$$\log(1+y) \sim y, \quad y \rightarrow 0.$$

Ne segue che f si può prolungare con continuità in $x = 1$ ma tale prolungamento non è derivabile in $x = 1$ (tangente verticale).

Esercizio 5.3

Per la seguente funzione stabilire se esistono prolungamenti continui agli estremi del dominio. Studiare poi la derivabilità di tali prolungamenti.

$$f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2}$$

Soluzione

Sviluppiamo la funzione $\sqrt{\cos x}$ all'ordine 3 con punto iniziale $x = 0$ utilizzando

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$$

e

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{16}y^3 + o(y^3)$$

con $y = -(1/2)x^2 + o(x^2)$:

$$\sqrt{\cos x} = 1 - \frac{1}{4}x^2 + o(x^3).$$

Ne segue

$$f(x) = \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2} = -\frac{1}{4} + o(x)$$

da cui f si può prolungare con continuità in $x = 0$ ponendo

$$f(0) = -\frac{1}{4}$$

e tale prolungamento risulta derivabile con

$$f'(0) = 0.$$

Infatti

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{4} + o(x) = -\frac{1}{4}$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{4} + o(x) + \frac{1}{4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x} = 0.$$

Esercizio 5.4

Per la seguente funzione stabilire se esistono prolungamenti continui agli estremi del dominio. Studiare poi la derivabilità di tali prolungamenti.

$$f : (0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = (1 - \cos x)^{\log(1+x)}$$

Soluzione

Abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\log(1+x) \log(1-\cos x)} = e^0 = 1$$

in quanto

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \log(1+x) \log(1-\cos x) &= \lim_{x \rightarrow 0} x \log \left(\frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x \log \left(\frac{1}{2}x^2 (1 + o(1)) \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x \log \left(\frac{1}{2}x^2 \right) + \lim_{x \rightarrow 0} x \log(1 + o(1)) = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Si ha un prolungamento continuo ponendo

$$f(0) = 1.$$

Esaminiamo il limite del rapporto incrementale:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\log(1+x) \log(1-\cos x)} - 1}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) \log(1-\cos x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log(1 - \cos x) = -\infty\end{aligned}$$

usando l'equivalenza

$$e^t - 1 \sim t, \quad t \rightarrow 0$$

con

$$t = \log(1+x) \log(1-\cos x), \quad x \rightarrow 0.$$

Ne segue che f si può prolungare con continuità in $x = 0$ ma tale prolungamento non è derivabile in $x = 0$ (tangente verticale).

Derivabilità

Esercizio 6.1

Studiare la derivabilità della funzione $f(x) = x^2 \cdot \log |x|$ definita per $x \neq 0$.

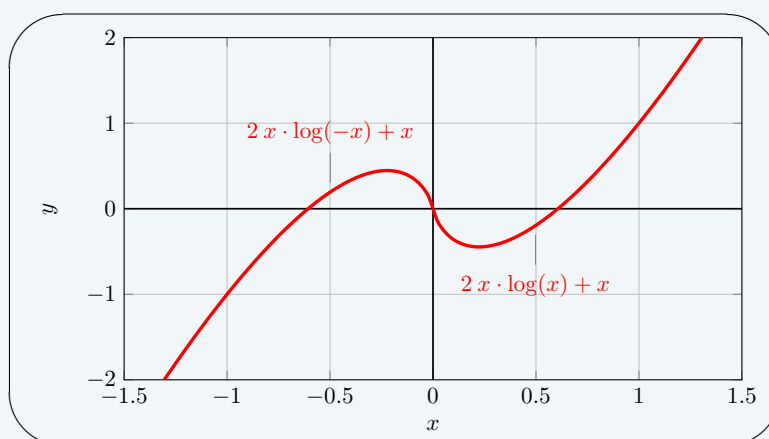
Soluzione

Sappiamo che esiste

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \log |x| = 0$$

e possiamo prolungare f per continuità definendo $f(0) = 0$, ed f risulta continua anche in 0. Con $x \neq 0$, abbiamo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \log x, & x > 0 \\ x^2 \cdot \log(-x), & x < 0 \end{cases} \quad \text{quindi} \quad f'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \log(x) + x, & x > 0 \\ 2x \cdot \log(-x) + x, & x < 0 \end{cases}$$

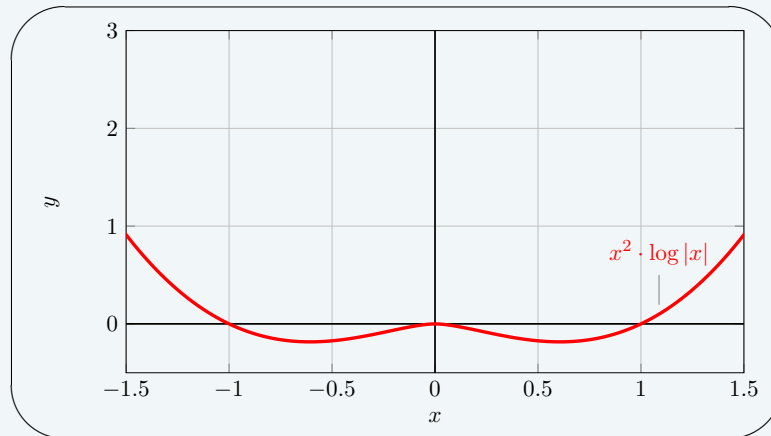


In $x = 0$ la funzione è continua, e abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x \cdot \log x + x = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x \cdot \log(-x) + x = 0$$

quindi il teorema del limite della derivata è applicabile e abbiamo:

$$f'_+(0) = 0, f'_-(0) = 0, f'(0) = 0 \quad \text{per cui in } x = 0 \text{ la funzione è derivabile}$$



Esercizio 6.2

Determinare i valori di α e $\beta \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} & \text{se } x > 0 \\ \beta x + 2 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

risulta continua e derivabile in $x = 0$.

Soluzione

Iniziamo dalla continuità nel punto di raccordo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= f(0) = 2; \end{aligned}$$

quindi la funzione è continua in $x = 0$ se e solo se $\alpha = 2$ e $\beta \in \mathbb{R}$.

Per $\alpha = 2$ e $x > 0$, si ha:

$$f(x) = \frac{(1+x)^2 - 1}{x} = x + 2.$$

Pertanto è evidente che, al fine di raccordare due rette passanti per un medesimo punto (nel nostro caso, l'ordinata all'origine $(0, 2)$), le loro equazioni dovranno coincidere, da cui $\beta = 1$.

Alternativamente, è possibile scrivere l'espressione analitica di $f'(x)$ ed imporre la condizione

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$$

e osservare che si giunge alla stessa conclusione.

Esercizio 6.3

Determinare i valori di α e $\beta \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x-1} - 1}{x \sin(x^2 - 1)} & \text{se } 0 < x < 1 \\ \alpha x + \beta & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ (x-2)^2 \log^2(x-2) & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

risulta continua e derivabile in $(0, +\infty)$.

Soluzione

La funzione proposta è continua negli intervalli $(0, 1)$, $(1, 2)$ e $(2, +\infty)$, in quanto ogni ramo è composizione di funzioni continue.

Al fine di assicurare continuità in $x = 1$, imponiamo l'uguaglianza

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (\alpha x + \beta) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} - 1}{x \sin(x^2 - 1)}$$

ed osservando che, per $x \rightarrow 1^-$,

$$f(x) \sim \frac{x-1}{x(x^2-1)} = \frac{1}{x(x+1)} \rightarrow \frac{1}{2},$$

si ha $\alpha + \beta = \frac{1}{2}$.

Studiamo ora la continuità nel punto di raccordo $x = 2$; imponiamo

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2)^2 \log^2(x-2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (\alpha x + \beta),$$

e poiché

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2)^2 \log^2(x-2) = 0$$

si ha $2\alpha + \beta = 0$. Mettiamo a sistema le due condizioni e otteniamo $\alpha = -\frac{1}{2}$ e $\beta = 1$, che garantiscono la continuità di f in $(0, +\infty)$.

Per la verifica della derivabilità, osserviamo che il calcolo di $f'(x)$ in $(0, 1)$ è decisamente più complicato che in $(2, +\infty)$. Ci conviene, allora, verificare dapprima la derivabilità di f in $x = 2$. Poiché

$$f'(x) = 2(x-2) \log^2(x-2) + 2(x-2) \log(x-2) \quad \forall x > 2,$$

si ha che

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = 0 \neq -\frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x)$$

Pertanto, per $\alpha = -\frac{1}{2}$ e $\beta = 1$, la funzione **non** è derivabile in $(0, +\infty)$, a causa della presenza di un punto angoloso in $x = 2$. Potremmo chiederci cosa accadrebbe per diversi valori di α e β , ma la risposta è immediata: la funzione non sarebbe continua in $(0, +\infty)$, dunque neppure derivabile.

Esercizio 6.4

Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{\arctan \frac{1}{x}} & \text{se } x < 0 \\ \lambda & \text{se } x = 0 \\ \frac{\log(1 - 2x^4)}{x^\alpha} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

determinare per quali valori dei parametri reali $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$ la funzione risulta continua e derivabile in $x = 0$.

Soluzione

La funzione data è continua negli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$ in quanto composizione di funzioni continue. Resta da assicurare la continuità nel punto di raccordo $x = 0$, in cui deve verificarsi:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = \lambda$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\pi}{\arctan \frac{1}{x}} = -2$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 - 2x^4)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x^4}{x^\alpha} = -2 \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{4-\alpha} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 4 \\ -2 & \text{se } \alpha = 4 \\ -\infty & \text{se } \alpha > 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Appare chiaro come la funzione sia continua in $x = 0$ se e solo se $\alpha = 4, \lambda = -2$. Verifichiamo se, per i valori di α, λ ottenuti, la funzione è anche derivabile in $x = 0$. Riscriviamo la funzione sostituendo i valori di α, λ ottenuti:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{\arctan \frac{1}{x}} & \text{se } x < 0 \\ -2 & \text{se } x = 0 \\ \frac{\log(1 - 2x^4)}{x^4} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

e scriviamo l'espressione analitica della sua derivata prima:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{(x^2 + 1) \left(\arctan \frac{1}{x}\right)^2} & \text{se } x < 0 \\ \frac{-8x^7 - 4x^3(1 - 2x^4) \log(1 - 2x^4)}{x^8(1 - 2x^4)} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\pi}{(x^2 + 1) \left(\arctan \frac{1}{x}\right)^2} = \frac{4}{\pi}$$

mentre

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-8x^7 - 4x^3(1 - 2x^4) \log(1 - 2x^4)}{x^8(1 - 2x^4)} = 0$$

in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-8x^7 - 4x^3(1 - 2x^4) \log(1 - 2x^4)}{x^8(1 - 2x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-8x^{11} + o(x^{11})}{x^8} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-8x^{11}}{x^8} = 0$$

Siamo giunti alla conclusione che $\nexists \alpha, \lambda \in \mathbb{R}$ per cui la funzione sia anche derivabile in $x = 0$.

Esercizio 6.5

Dimostrare che vale la seguente disuguaglianza:

$$\log(1+x) \leq x \quad \forall x \geq 0$$

Soluzione

La funzione $f(x) = \log(1+x)$ è continua e derivabile su $(-1, +\infty)$. Possiamo applicare il teorema di Lagrange in ogni intervallo della forma $[0, x]$, con $x > 0$. Pertanto, per un opportuno $\eta \in (0, x)$, $x > 0$, otteniamo

$$\log(1+x) = \log(1+x) - \log(1+0) = \frac{1}{1+\eta}x < x$$

dove abbiamo tenuto conto che $\frac{1}{1+\eta} < 1$ per ogni $\eta > 0$.

Esercizio 6.6

Determinare gli eventuali punti di minimo e di massimo, relativi e assoluti, della funzione

$$g(x) = x + |\cos x|$$

in $[0, 2\pi]$. In quanti punti si annulla $g(x)$? Perché?

Soluzione

La funzione è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[0, 2\pi]$, quindi per il teorema di Weierstrass esistono i punti di massimo e minimo assoluti. Si ha

$$g(x) = \begin{cases} x + \cos x & \text{se } x \in [0, \pi/2] \cup [3\pi/2, 2\pi] \\ x - \cos x & \text{se } x \in (\pi/2, 3\pi/2) \end{cases}$$

e

$$g'(x) = \begin{cases} 1 - \sin x & \text{se } x \in (0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi) \\ 1 + \sin x & \text{se } x \in (\pi/2, 3\pi/2) \end{cases}$$

e si verifichi per esercizio che la funzione non è derivabile nei punti di raccordo. La derivata prima è sempre positiva dove è definita, quindi la funzione è sempre crescente ed assumerà i valori massimo e minimo assoluto agli estremi dell'intervallo. Più precisamente, $x = 0$ è punto di minimo assoluto con $g(0) = 1$ e $x = 2\pi$ è punto di massimo assoluto con $g(2\pi) = 2\pi + 1$. La funzione non si annulla mai poiché sempre crescente e $g(0) = 1$.

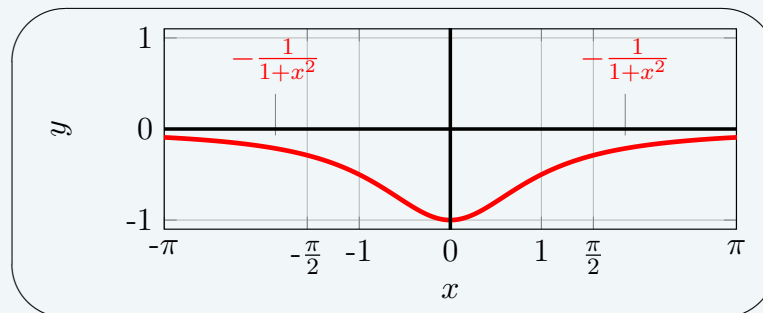
Esercizio 6.7

Studiare la derivabilità della funzione $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$ definita per $x \neq 0$.

Soluzione

Con $x \neq 0$, abbiamo:

$$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$



Ma in questo caso viene meno l'ipotesi di continuità di f in 0 in quanto:

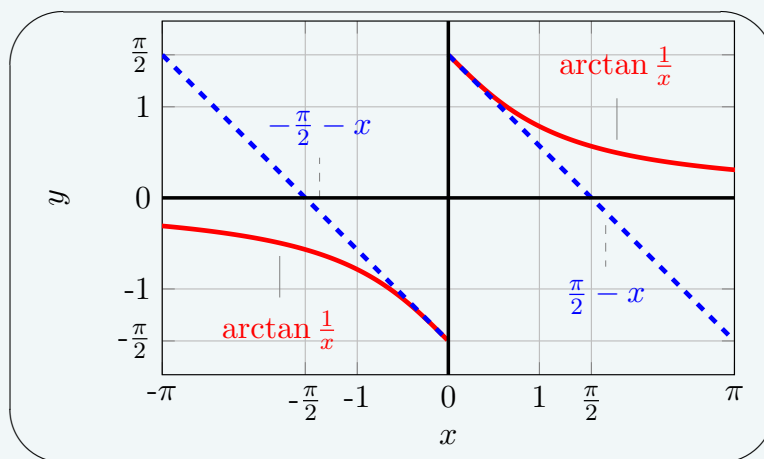
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$$

e non è possibile usare il teorema del limite della derivata per calcolare la derivata in $x = 0$. Non essendo continua in $x = 0$ la funzione non è derivabile. Se invece consideriamo solo il limite sinistro della derivata, le ipotesi del teorema del limite della derivata sono verificate e dato che:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{1}{1+x^2} = -1 \quad \text{allora} \quad f'_-(0) = -1$$

inoltre dato che:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{1+x^2} = -1 \quad \text{allora} \quad f'_+(0) = -1$$



Equazioni parametriche

Esercizio 7.1

Determinare il numero delle soluzioni della equazione $f(x) = k$ al variare del parametro reale k nei casi seguenti:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x}$$

$$f(x) = x^2 e^{-x^2}$$

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{\log(e^x - 1)}$$

$$f(x) = \log^2 x + 2 \log x$$

$$f(x) = e - x \log^2 x$$

$$f(x) = \frac{x}{x+1} - \arctan x$$

Soluzione

Tutte le funzioni sono derivabili (infinite volte) nei loro domini. Per rispondere, è sufficiente determinare i limiti agli estremi del dominio, l'andamento di monotonia e gli eventuali estremanti.

Soluzione

La funzione $f(x) = \frac{2x^2-1}{x} = 2x - \frac{1}{x}$ è definita per $x \neq 0$, è dispari, con

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = \mp\infty$$

(il grafico è una iperbole di asintoti $x = 0$, $y = 2x$).

Si ha poi

$$f'(x) = 2 + \frac{1}{x^2},$$

positiva per ogni $x \neq 0$. La funzione è strettamente crescente sia su $(-\infty, 0)$ che su $(0, +\infty)$ ed in entrambi gli intervalli assume tutti i valori reali tra i limiti $-\infty$ e $+\infty$.

Concludendo, per ogni valore di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = k$ ha due soluzioni: una positiva, l'altra negativa. In particolare l'equazione $f(x) = 0$ ha le due soluzioni $x = \pm\sqrt{1/2}$.

Soluzione

La funzione $f(x) = x^2 e^{-x^2}$ è definita per $x \in \mathbb{R}$, è pari, con

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0.$$

La funzione assume solo valori non negativi, il punto $x = 0$, dove $f(0) = 0$, è (l'unico) punto di minimo assoluto.

Si ha poi

$$f'(x) = 2x(1 - x^2)e^{-x^2},$$

da cui, per $x > 0$, si ha f strettamente crescente in $(0, 1)$, strettamente decrescente in $(1, +\infty)$. Il punto $x = 1$ è di massimo assoluto con valore $f(1) = 1/e$. Per simmetria pari si ottiene il comportamento per $x < 0$.

Concludendo, per ogni valore $k < 0$ oppure $k > 1/e$, l'equazione $f(x) = k$ non ha soluzioni: l'insieme dei valori di f è l'intervallo $[0, 1/e]$.

Per $k = 0$, l'equazione $f(x) = 0$ ha per unica soluzione $x = 0$.

Per $0 < k < 1/e$, l'equazione $f(x) = k$ ha quattro soluzioni, una nell'intervallo $(0, 1)$, una nell'intervallo $(1, +\infty)$, le altre due opposte a queste per simmetria pari.

Per $k = 1/e$, l'equazione $f(x) = 1/e$ ha le due soluzioni $x = \pm 1$.

Soluzione

La funzione $f(x) = \frac{e^x - 1}{\log(e^x - 1)}$ è definita per $e^x - 1 > 0$, $e^x - 1 \neq 1$, quindi per

$$x \in (0, \log 2) \cup (\log 2, +\infty).$$

Abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log y} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \log 2^\pm} f(x) = \lim_{y \rightarrow 1^\pm} \frac{y}{\log y} = \pm\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{\log y} = +\infty.$$

Si ha poi

$$f'(x) = \frac{e^x [\log(e^x - 1) - 1]}{\log^2(e^x - 1)},$$

da cui si ha f strettamente decrescente in $(0, \log 2)$, dove assume tutti valori tra i limiti $-\infty$ e 0 ; strettamente decrescente in $(\log 2, \log(e+1))$, dove assume tutti i valori $k > e$; il punto $x = \log(e+1)$ è di minimo relativo con valore $f(\log(1+e)) = e$; f è di nuovo strettamente crescente nell'intervallo $(\log(1+e), +\infty)$ dove assume ancora tutti i valori $k > e$.

Concludendo, per ogni valore $k < 0$ l'equazione $f(x) = k$ ha una soluzione che si trova nell'intervallo $(0, \log 2)$.

Per $0 \leq k < e$, l'equazione $f(x) = k$ non ha soluzioni.

Per $k = e$, l'equazione $f(x) = e$ ha l'unica soluzione $x = \log(e + 1)$.

Per $k > e$, l'equazione $f(x) = k$ ha due soluzioni, una in $(\log 2, \log(1 + e))$, l'altra in $(\log(e + 1), +\infty)$.

Soluzione

La funzione $f(x) = \log^2 x + 2 \log x$ è definita per $x > 0$. Abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{y \rightarrow -\infty} y^2 + 2y = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} y^2 + 2y = +\infty.$$

Si ha poi

$$f'(x) = \frac{2(\log x + 1)}{x},$$

da cui si ha f strettamente decrescente in $(0, 1/e)$, dove assume tutti i valori $k > -1$; il punto $x = 1/e$ è di minimo assoluto con valore $f(1/e) = -1$; f è strettamente crescente nell'intervallo $(1/e, +\infty)$ dove assume ancora tutti i valori $k > -1$.

Concludendo, per ogni valore $k < -1$ l'equazione $f(x) = k$ non ha soluzioni.

Per $k = -1$, l'equazione $f(x) = -1$ ha l'unica soluzione $x = 1/e$.

Per $k > -1$, l'equazione $f(x) = k$ ha due soluzioni, una in $(0, 1/e)$, l'altra in $(1/e, +\infty)$. In particolare, l'equazione $f(x) = 0$ ha le due soluzioni $x = 1/e^2$, $x = 1$.

Soluzione

La funzione $f(x) = e - x \log^2 x$ è definita per $x > 0$. Abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

Si ha poi

$$f'(x) = -\log x(\log x + 2),$$

da cui si ha f strettamente decrescente in $(0, 1/e^2)$, dove assume tutti i valori $k \in (e - \frac{4}{e^2}, e)$; il punto $x = 1/e^2$ è di minimo relativo con valore $f(1/e^2) = e - \frac{4}{e^2}$; f è strettamente crescente nell'intervallo $(1/e^2, 1)$ dove assume ancora tutti i valori $k \in (e - \frac{4}{e^2}, e)$; il punto $x = 1$ è di massimo assoluto con valore $f(1) = e$; f è di nuovo strettamente decrescente in $(1, +\infty)$, dove assume tutti i valori $k \in (-\infty, e)$.

Concludendo, per ogni valore $k < e - \frac{4}{e^2}$ l'equazione $f(x) = k$ ha una sola soluzione che si trova nell'intervallo $(1, +\infty)$. In particolare l'equazione $f(x) = 0$ ha l'unica soluzione $x = e$. Per $k = e - \frac{4}{e^2}$, l'equazione $f(x) = e - \frac{4}{e^2}$ ha due soluzioni, una è $x = 1/e^2$, l'altra si trova nell'intervallo $(1, e)$.

Per $e - \frac{4}{e^2} < k < e$, l'equazione $f(x) = k$ ha tre soluzioni, una in $(0, 1/e^2)$, una in $(1/e^2, 1)$, una in $(1, e)$.

Per $k = e$, l'equazione $f(x) = e$ ha l'unica soluzione $x = 1$.

Per $k > e$, l'equazione $f(x) = k$ non ha soluzioni.

Soluzione

La funzione $f(x) = \frac{x}{x+1} - \arctan x$ è definita per $x \neq -1$. Abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 + \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -1^\pm} f(x) = \mp\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 - \frac{\pi}{2}.$$

Si ha poi

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x+1)^2(x^2+1)}$$

da cui si ha f strettamente crescente in $(-\infty, -1)$, dove assume tutti i valori $k \in (1 + \frac{\pi}{2}, +\infty)$; f è strettamente crescente anche nell'intervallo $(-1, 0)$ dove assume tutti i valori $k \in (-\infty, 0)$; il punto $x = 0$ è di massimo relativo con valore $f(0) = 0$; f è strettamente decrescente in $(0, +\infty)$, dove assume tutti i valori $k \in (1 - \frac{\pi}{2}, 0)$.

Concludendo, per ogni valore $k \leq 1 - \frac{\pi}{2}$ l'equazione $f(x) = k$ ha una sola soluzione che si trova nell'intervallo $(-1, 0)$.

Per $1 - \frac{\pi}{2} < k < 0$, l'equazione $f(x) = k$ ha due soluzioni, una è in $(-1, 0)$, l'altra si trova nell'intervallo $(0, +\infty)$.

Per $k = 0$, l'equazione $f(x) = 0$ ha l'unica soluzione $x = 0$.

Per $0 < k \leq 1 + \frac{\pi}{2}$, l'equazione $f(x) = k$ non ha soluzioni.

Per $k > 1 + \frac{\pi}{2}$, l'equazione $f(x) = k$ ha una unica soluzione che si trova nell'intervallo $(-\infty, -1)$.

Studi di funzione

Esercizio 8.1

Delle seguenti funzioni di variabile reale x , determinare:

1. dominio e relativi limiti agli estremi evidenziando eventuali prolungamenti continui;
2. eventuali estremanti locali ed andamento di monotonia;
3. eventuali flessi ed andamento di convessità;
4. eventuali asintoti;
5. grafico qualitativo che tenga conto di tutti gli elementi precedenti.

Esercizio 8.2

$$f(x) = x - \frac{1}{x}$$

Soluzione

La funzione $f(x) = x - \frac{1}{x}$ è definita per $x \neq 0$, quindi il suo dominio naturale D è dato da

$$D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

in particolare la retta $x = 0$ (asse y) è asintoto verticale. Da

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

si ha poi che la retta $y = x$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow \pm\infty$. La presenza di questi asintoti, del resto, si ottiene anche dalla geometria analitica: la curva di equazione $y = x - \frac{1}{x}$, in forma implicita $x^2 - xy - 1 = 0$, è un'iperbole di asintoti proprio le rette $x = 0$ ed $y = x$ (gli

asintoti di una iperbole si ottengono uguagliando a 0 la parte omogenea di grado 2 della equazione).

La funzione $f(x)$ è derivabile infinite volte nel proprio dominio D . La derivata prima vale

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$$

e risulta $f'(x) > 0$ per ogni $x \in D$. La funzione $f(x)$ è quindi strettamente crescente sull'intervallo $(-\infty, 0)$ e strettamente crescente anche sull'intervallo $(0, +\infty)$.

La derivata seconda vale

$$f''(x) = -\frac{2}{x^3}$$

e ha il segno contrario di x . La funzione $f(x)$ è quindi strettamente convessa sull'intervallo $(-\infty, 0)$ e strettamente concava sull'intervallo $(0, +\infty)$.

La posizione del grafico rispetto all'asintoto obliquo è facilmente deducibile da $f(x) - x = -1/x$: si ha $f(x) > x$ per $x < 0$ mentre $f(x) < x$ per $x > 0$.

Si raccolgano ora tutti gli elementi precedenti in un grafico qualitativo.

Esercizio 8.3

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$$

Soluzione

La funzione $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ è definita per $x \geq 0$, $x \neq 1$, quindi il suo dominio naturale D è dato da

$$D = [0, 1) \cup (1, +\infty).$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +1,$$

in particolare la retta $x = 1$ è asintoto verticale, la retta $y = 1$ è asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$.

La funzione $f(x)$ è continua in D , derivabile infinite volte in $D \setminus \{0\}$. Nel punto $x = 0$ il rapporto incrementale ha limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x(\sqrt{x}-1)} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = -\infty$$

quindi la funzione $f(x)$ non è derivabile per $x = 0$ e nel punto $(0, 0)$ il grafico ha per tangente verticale l'asse y .

Per $x \in D \setminus \{0\}$ la derivata prima vale

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$$

e risulta $f'(x) < 0$ per ogni x . La funzione $f(x)$ è quindi strettamente decrescente sull'intervallo $[0, 1)$ e strettamente decrescente anche sull'intervallo $(1, +\infty)$.

La derivata seconda vale

$$f''(x) = \frac{1}{4} \frac{3\sqrt{x} - 1}{x\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)^3}$$

che si annulla per $x = 1/9$, è positiva per $0 < x < 1/9$, negativa per $1/9 < x < 1$, di nuovo positiva per $x > 1$. La funzione $f(x)$ è quindi strettamente convessa sull'intervallo $(0, 1/9)$, strettamente concava sull'intervallo $(1/9, 1)$, di nuovo strettamente convessa sull'intervallo $(1, +\infty)$. Per $x = 1/9$ si ha un flesso: nel punto $(1/9, -1/2)$ il grafico passa da sopra a sotto la retta tangente.

Si raccolgano ora tutti gli elementi precedenti in un grafico qualitativo.

Esercizio 8.4

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 1}$$

Soluzione

La funzione $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 1}$ è definita per $x \leq -1$, $x \geq 1$, quindi il suo dominio naturale D è dato da

$$D = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$$

La funzione in esame è pari: lo studio seguente si potrebbe limitare all'intervallo $[1, +\infty)$. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2}{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 + 1}} = 0$$

in particolare la retta $y = 0$ (asse x) è asintoto orizzontale per $x \rightarrow \pm\infty$. Si ha poi

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) = -\sqrt{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = -\sqrt{2}.$$

La funzione $f(x)$ è continua in D , derivabile infinite volte in $D \setminus \{-1, 1\}$.

Per $x \in D \setminus \{-1, 1\}$ la derivata prima vale

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})}{\sqrt{x^4 - 1}}$$

ed ha lo stesso segno di x . La funzione $f(x)$ è quindi strettamente decrescente sull'intervallo $(-\infty, -1)$, strettamente crescente sull'intervallo $(1, +\infty)$.

Nei punti $x = \pm 1$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1} f'(x) = \pm\infty$$

quindi la funzione $f(x)$ non è derivabile per $x = \pm 1$ e nei punti $(\pm 1, -\sqrt{2})$ il grafico ha tangente verticale.

La derivata seconda vale

$$f''(x) = -\frac{1}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$$

ed è negativa per ogni x . La funzione $f(x)$ è quindi strettamente concava sull'intervallo $(-\infty, -1)$ e sull'intervallo $(1, +\infty)$.

Si raccolgano ora tutti gli elementi precedenti in un grafico qualitativo, rispettando in particolare la simmetria del grafico rispetto all'asse y (simmetria pari).

Esercizio 8.5

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x-1}}{\log(2x-1)}$$

Soluzione

La funzione $f(x) = \frac{\sqrt{2x-1}}{\log(2x-1)}$ è definita per $2x-1 > 0$, $2x-1 \neq 1$, quindi il suo dominio naturale D è dato da

$$D = (1/2, 1) \cup (1, +\infty).$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 1/2} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^\pm} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^{1/2}}{\log y} = +\infty$$

in particolare la retta $x = 1$ è asintoto verticale. L'ordine di infinito di $f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ è inferiore a quello di $\sqrt{x}$ il che esclude l'asintoto obliquo (l'ordine di infinito di funzioni con asintoto obliquo è quello di x).

La funzione $f(x)$ è continua in D ; il limite $\lim_{x \rightarrow 1/2} f(x) = 0$ consente di prolungare con continuità la funzione anche in $x = 1/2$ ponendo $f(1/2) = 0$.

La funzione è derivabile infinite volte in D . La derivata prima vale

$$f'(x) = \frac{\log(2x-1) - 2}{\sqrt{2x-1} \log^2(2x-1)}.$$

Nel punto $x = 1/2$, il rapporto incrementale del prolungamento continuo ha limite

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{f(x) - f(1/2)}{x - 1/2} &= \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{\sqrt{2x-1}}{(x - 1/2) \log(2x-1)} = \\ \sqrt{2} \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{1}{\sqrt{x - 1/2} \log(2x-1)} &= \sqrt{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y^{1/2} \log y} = -\infty. \end{aligned}$$

Il prolungamento continuo di f non è derivabile per $x = 1/2$. Nel punto $(1/2, 0)$ il suo grafico ha tangente verticale.

Tornando ad $f'(x)$ nei punti di D , si ha $f'(x) > 0$ per $x > (e^2 + 1)/2$, $f'(x) < 0$ per $x < (e^2 + 1)/2$, $f'(x) = 0$ per $x = (e^2 + 1)/2$. La funzione $f(x)$ è quindi strettamente decrescente sull'intervallo $(1/2, 1)$ e sull'intervallo $(1, (e^2 + 1)/2)$, strettamente crescente sull'intervallo $((e^2 + 1)/2, +\infty)$. Il punto $x = (e^2 + 1)/2$ è di minimo locale con valore $f((e^2 + 1)/2) = e/2$.

La derivata seconda vale

$$f''(x) = -\frac{\log^2(2x-1) - 8}{(2x-1)\sqrt{2x-1} \log^3(2x-1)}$$

ed è positiva per $x \in (1/2, (e^{-\sqrt{8}} + 1)/2)$, negativa per $x \in ((e^{-\sqrt{8}} + 1)/2, 1)$, positiva per $x \in (1, (e^{\sqrt{8}} + 1)/2)$, negativa per $x \in ((e^{\sqrt{8}} + 1)/2, +\infty)$. Ne segue che f è strettamente convessa per $x \in (1/2, (e^{-\sqrt{8}} + 1)/2)$, strettamente concava per $x \in ((e^{-\sqrt{8}} + 1)/2, 1)$, strettamente convessa per $x \in (1, (e^{\sqrt{8}} + 1)/2)$, strettamente concava per $x \in ((e^{\sqrt{8}} + 1)/2, +\infty)$. I punti $x = (e^{\pm\sqrt{8}} + 1)/2$ sono di flesso con rispettivi valori $f((e^{\pm\sqrt{8}} + 1)/2) = \pm e^{\pm\sqrt{2}}/\sqrt{8}$.

Si raccolgano ora tutti gli elementi precedenti in un grafico qualitativo.

Esercizio 8.6

$$f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$$

Soluzione

La funzione $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ è definita per $x \neq 0$, quindi il suo dominio naturale D è dato da

$$D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

in particolare la retta $x = 0$ (asse y) è asintoto verticale. Per $x \rightarrow \pm\infty$, da $e^y = 1 + y + o(y)$ per $y \rightarrow 0$, si ottiene

$$f(x) = xe^{\frac{1}{x}} = x \left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) = x + 1 + o(1)$$

quindi la retta $y = x + 1$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow \pm\infty$.

La funzione $f(x)$ è continua in D ; il limite $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ consente di prolungare con continuità a sinistra la funzione in $x = 0$ ponendo $f(0) = 0$.

La funzione è derivabile infinite volte in D . La derivata prima vale

$$f'(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x} e^{\frac{1}{x}}.$$

Nel punto $x = 0$, il rapporto incrementale sinistro del prolungamento ha limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

Il prolungamento continuo a sinistra di f è derivabile a sinistra per $x = 0$ con $f'_-(0) = 0$. Il semiasse negativo delle x è semiretta tangente al grafico nel punto $(0, 0)$.

Tornando ad $f'(x)$ nei punti di D , si ha $f'(x) > 0$ per $x < 0$, $f'(x) < 0$ per $0 < x < 1$, di nuovo $f'(x) > 0$ per $x > 1$, $f'(x) = 0$ per $x = 1$. La funzione $f(x)$ è quindi strettamente crescente sull'intervallo $(-\infty, 0)$, strettamente decrescente sull'intervallo $(0, 1)$, di nuovo strettamente crescente sull'intervallo $(1, +\infty)$. Il punto $x = 1$ è di minimo locale con valore $f(1) = e$.

La derivata seconda vale

$$f''(x) = \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}}$$

ed ha lo stesso segno di x . Ne segue che f è strettamente convessa per $x \in (0, +\infty)$, strettamente concava per $x \in (-\infty, 0)$.

Si raccolgano ora tutti gli elementi precedenti in un grafico qualitativo.

Esercizio 8.7

$$f(x) = e^{\frac{1-|x|}{1+x}}$$

Soluzione

La funzione $f(x) = e^{\frac{1-|x|}{1+x}}$ è definita per $x \neq -1$, quindi il suo dominio naturale D è dato da

$$D = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty).$$

Nell'insieme $(-\infty, -1) \cup (-1, 0]$ la funzione è costante: $f(x) = e^{\frac{1+x}{1+x}} = e$ per ogni $x \leq 0$, $x \neq -1$. Ovviamente si può prolungare con continuità la funzione per $x = -1$ definendo $f(-1) = e$. Si ha poi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1-x}{1+x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

in particolare la retta $y = 1/e$ è asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$.

La funzione $f(x)$ è continua in D .

La funzione è derivabile infinite volte in $D \setminus \{0\}$. La derivata prima vale ovviamente 0 per $x < 0$ mentre vale

$$f'(x) = -\frac{2}{(x+1)^2} e^{\frac{1-x}{1+x}} \quad \text{per } x > 0.$$

Nel punto $x = 0$, la derivata sinistra vale 0 mentre

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -2e.$$

La funzione non è derivabile per $x = 0$ in quanto $f'_-(0) \neq f'_+(0)$. Il grafico presenta un punto angoloso nel punto $(0, e)$: a sinistra è formato dalla semiretta $y = e$, $x \leq 0$, mentre il ramo di destra ha semiretta tangente $y = -2ex + e$, $x \geq 0$.

Si ha poi $f'(x) < 0$ per ogni $x > 0$ quindi f è strettamente decrescente sull'intervallo $(0, +\infty)$.

Visto che la funzione è costante per $x \leq 0$, interessa calcolare la derivata seconda solo per $x > 0$ dove vale

$$f''(x) = \frac{4x+8}{(x+1)^4} e^{\frac{1-x}{1+x}}$$

ed è positiva. Ne segue che f è strettamente convessa per $x \in (0, +\infty)$.

Si raccolgano ora tutti gli elementi precedenti in un grafico qualitativo.

Esercizio 8.8

$$f(x) = \left| \frac{\log x}{x} \right|$$

Soluzione

La funzione $f(x) = \left| \frac{\log x}{x} \right|$ è definita per $x > 0$, quindi il suo dominio naturale D è dato da

$$D = (0, +\infty)$$

dove la sua espressione può essere semplificata in

$$f(x) = \frac{|\log x|}{x}, \quad x \in D.$$

Si tenga conto ora e nel seguito del segno di $\log x$ che porta a $|\log x| = -\log x$ per $0 < x < 1$, $|\log x| = \log x$ per $x > 1$. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\log x}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

in particolare la retta $x = 0$ (asse y) è asintoto verticale mentre la retta $y = 0$ (asse x) è asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$.

La funzione $f(x)$ è continua in D , assume in maniera evidente solo valori non negativi ed il punto $x = 1$ dove $f(1) = 0$ è di minimo assoluto.

La funzione è derivabile infinite volte in $D \setminus \{1\}$. La derivata prima vale

$$f'(x) = -\frac{1 - \log x}{x^2} \quad \text{per } 0 < x < 1; \quad f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2} \quad \text{per } x > 1.$$

Nel punto $x = 1$, la derivata sinistra vale

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -\frac{1 - \log x}{x^2} = -1,$$

mentre la derivata destra vale

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \log x}{x^2} = 1$$

La funzione non è derivabile per $x = 1$ in quanto $f'_-(1) \neq f'_+(1)$. Il grafico presenta un punto angoloso in $(1, 0)$: a sinistra la semiretta tangente ha equazione $y = -x + 1$, a destra $y = x - 1$.

Soluzione

Si ha poi $f'(x) < 0$ per ogni $x \in (0, 1)$ quindi f è strettamente decrescente sull'intervallo $(0, 1)$. Vale $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (1, e)$ e $f'(x) < 0$ per ogni $x \in (e, +\infty)$, $f'(e) = 0$, quindi f è strettamente crescente sull'intervallo $(1, e)$, strettamente decrescente sull'intervallo $(e, +\infty)$, il punto $x = e$ è di massimo relativo con valore $f(e) = 1/e$.

In $D \setminus \{1\}$ la derivata seconda vale

$$f''(x) = \frac{3 - 2 \log x}{x^3} \quad \text{per } 0 < x < 1; \quad f''(x) = \frac{2 \log x - 3}{x^3} \quad \text{per } x > 1.$$

Ne segue che f è strettamente convessa per $x \in (0, 1)$ ed in $(e^{3/2}, +\infty)$; strettamente concava in $(1, e^{3/2})$. Il punto $x = e^{3/2}$ è di flesso con valore $f(e^{3/2}) = 3/2e^{3/2}$.

Si raccolgano ora tutti gli elementi precedenti in un grafico qualitativo.

Esercizio 8.9

$$f(x) = \sqrt{1 - |e^{2x} - 1|}$$

Soluzione

La funzione $f(x) = \sqrt{1 - |e^{2x} - 1|}$ è definita per $|e^{2x} - 1| \leq 1$, quindi per $-1 \leq e^{2x} - 1 \leq 1$ da cui $0 \leq e^{2x} \leq 2$ ed infine $x \leq (\log 2)/2$ dal momento che $e^{2x} > 0$ per ogni x . Il dominio naturale D è dato da

$$D = (-\infty, (\log 2)/2].$$

Si tenga conto ora e nel seguito del segno di $e^{2x} - 1$ che porta a $|e^{2x} - 1| = 1 - e^{2x}$ per $x < 0$, $|e^{2x} - 1| = e^{2x} - 1$ per $x > 0$. In particolare

$$f(x) = \sqrt{e^{2x}} = e^x \quad \text{per } x < 0; \quad f(x) = \sqrt{2 - e^{2x}} \quad \text{per } 0 \leq x \leq (\log 2)/2.$$

L'andamento di e^x per $x < 0$ è ben noto, ne segue in particolare

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

(asse x asintoto orizzontale per $x \rightarrow -\infty$) e che f è strettamente crescente in $(-\infty, 0)$. Si ha poi

$$\lim_{x \rightarrow (\log 2)/2} f(x) = f((\log 2)/2) = 0.$$

La funzione $f(x)$ è continua in D , assume in maniera evidente solo valori non negativi ed il punto $x = (\log 2)/2$ dove $f((\log 2)/2) = 0$ è di minimo assoluto.

La funzione è derivabile infinite volte in $D \setminus \{0, (\log 2)/2\}$. La derivata prima vale

$$f'(x) = e^x \quad \text{per } x < 0; \quad f'(x) = -\frac{e^{2x}}{\sqrt{2 - e^{2x}}} \quad \text{per } 0 < x < (\log 2)/2.$$

Nel punto $x = 0$, la derivata sinistra vale

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1,$$

mentre la derivata destra vale

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{e^{2x}}{\sqrt{2 - e^{2x}}} = -1$$

La funzione non è derivabile per $x = 0$ in quanto $f'_-(0) \neq f'_+(0)$. Il grafico presenta un punto angoloso in $(0, 1)$: a sinistra la semiretta tangente ha equazione $y = x + 1$, a destra $y = -x + 1$.

Soluzione

Nel punto $x = (\log 2)/2$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow (\log 2)/2} f'(x) = \lim_{x \rightarrow (\log 2)/2} -\frac{e^{2x}}{\sqrt{2 - e^{2x}}} = -\infty.$$

La funzione non è derivabile per $x = (\log 2)/2$. Nel punto $((\log 2)/2, 0)$ il grafico ha tangente verticale.

Si ha poi $f'(x) < 0$ per ogni $x \in (0, (\log 2)/2)$ quindi f è strettamente decrescente sull'intervallo $(0, (\log 2)/2)$. Il punto $x = 0$ è di massimo (assoluto) con valore $f(0) = 1$.

In $(-\infty, 0)$ la funzione coincide con e^x ed è ben noto che la funzione esponenziale è strettamente convessa. Si ha poi

$$f''(x) = -\frac{e^{2x}(4 - e^{2x})}{(2 - e^{2x})^{3/2}} \quad \text{per } 0 < x < (\log 2)/2$$

con segno negativo su tale intervallo. Ne segue che f è strettamente concava per $x \in (0, (\log 2)/2)$.

Si raccolgano ora tutti gli elementi precedenti in un grafico qualitativo.

(i) La funzione $f(x) = x - \arctan x$ ha dominio naturale $D = \mathbb{R}$ con

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

Si tratta di una funzione dispari, il che consentirebbe di studiarla solo per $x \geq 0$.

Da

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\arctan x = \mp \frac{\pi}{2}$$

segue poi che la funzione ha asintoti obliqui

$$y = x + \pi/2, \quad x \rightarrow -\infty; \quad y = x - \pi/2, \quad x \rightarrow +\infty.$$

La funzione è derivabile infinite volte su tutto $\mathbb{R}$. La derivata prima vale

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

con $f'(0) = 0$ ed $f'(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$. Ne segue che f è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$ e che il punto $x = 0$ è di flesso con tangente orizzontale con relativo valore $f(0) = 0$.

La derivata seconda vale

$$f''(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

ed ha lo stesso segno di x . In particolare f è strettamente concava in $(-\infty, 0)$, strettamente convessa su $(0, +\infty)$.

Si raccolgano ora tutti gli elementi precedenti in un grafico qualitativo, rispettando la simmetria centrale del grafico rispetto all'origine (simmetria dispari).

Esercizio 8.10

$$f(x) = x - \arctan x$$

Soluzione

La funzione $f(x) = x - \arctan x$ ha dominio naturale $D = \mathbb{R}$ con

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

Si tratta di una funzione dispari, il che consentirebbe di studiarla solo per $x \geq 0$.

Da

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\arctan x = \mp \frac{\pi}{2}$$

segue poi che la funzione ha asintoti obliqui

$$y = x + \pi/2, \quad x \rightarrow -\infty; \quad y = x - \pi/2, \quad x \rightarrow +\infty.$$

La funzione è derivabile infinite volte su tutto $\mathbb{R}$. La derivata prima vale

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

con $f'(0) = 0$ ed $f'(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$. Ne segue che f è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$ e che il punto $x = 0$ è di flesso con tangente orizzontale con relativo valore $f(0) = 0$.

La derivata seconda vale

$$f''(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

ed ha lo stesso segno di x . In particolare f è strettamente concava in $(-\infty, 0)$, strettamente convessa su $(0, +\infty)$.

Si raccolgano ora tutti gli elementi precedenti in un grafico qualitativo, rispettando la simmetria centrale del grafico rispetto all'origine (simmetria dispari).

Esercizio 8.11

$$f(x) = 1 - x^2 + \log |x|$$

Soluzione

La funzione $f(x) = 1 - x^2 + \log |x|$ è definita per $x \neq 0$ quindi il suo dominio naturale D è dato da

$$D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

Si tratta di una funzione pari il che consentirebbe di studiarla solo per $x > 0$.

Da $f(x) \sim -x^2$ per $x \rightarrow \pm\infty$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$$

e si evince che la funzione non ha asintoti obliqui. Si ha poi

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = -\infty,$$

in particolare la retta $x = 0$ (asse y) è asintoto verticale.

La funzione è derivabile infinite volte su tutto D . La derivata prima vale

$$f'(x) = -2x + \frac{1}{x} = \frac{1 - 2x^2}{x}.$$

Analizzandone il segno per $x > 0$, si ha $f'(\sqrt{1/2}) = 0$, $f'(x) > 0$ per $0 < x < \sqrt{1/2}$, $f'(x) < 0$ per $x > \sqrt{1/2}$. Ne segue che f è strettamente crescente su $(0, \sqrt{1/2})$, strettamente decrescente su $(\sqrt{1/2}, +\infty)$ e che il punto $x = \sqrt{1/2}$ è di massimo (assoluto) con relativo valore $f(\sqrt{1/2}) = 1/2 - (\log 2)/2$. In particolare il grafico incontra l'asse x in due punti di ascissa positiva. Uno di questi punti si ha per $x = 1$, l'altro ha ascissa nell'intervallo $(0, \sqrt{1/2})$ e può essere approssimato all'occorrenza con uno degli algoritmi studiati per la ricerca degli zeri di funzioni regolari.

Lo studio della monotonia e degli estremanti di f per $x < 0$ si ottiene per simmetria pari: il punto $x = -\sqrt{1/2}$ è di massimo (assoluto) con relativo valore $f(-\sqrt{1/2}) = 1/2 - (\log 2)/2$ etc., etc.

La derivata seconda vale

$$f''(x) = -2 - \frac{1}{x^2}$$

ed è negativa per ogni $x \in D$. In particolare f è strettamente concava sia in $(-\infty, 0)$ che su $(0, +\infty)$.

Si raccolgano ora tutti gli elementi precedenti in un grafico qualitativo, rispettando la simmetria assiale del grafico rispetto all'asse y (simmetria pari).

Sviluppi di Mc Laurin

Esercizio 9.1

Attraverso lo sviluppo di Mc Laurin delle seguenti funzioni $f(x)$, determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $(0, f(0))$ e la posizione locale del grafico rispetto a tale tangente

$$f(x) = 1 + \sin(\sqrt{1+x^3} - 1)$$

$$f(x) = 2\sqrt{1 + \sinh x} - x$$

$$f(x) = 8\sqrt{1 + \sin x} + x^2$$

$$f(x) = 8\sqrt{1 + \log(1+x)} + 3x^2$$

$$f(x) = 8\sqrt{1 - 2x - x^2} - 8 + 8x$$

Soluzione

Da

$$\sqrt{1+x^3} - 1 = \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$$

e

$$\sin y = y - \frac{1}{6}y^3 + o(y^3)$$

si ha

$$f(x) = 1 + \sin(\sqrt{1+x^3} - 1) = 1 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3).$$

L'equazione della retta tangente è

$$y = 1.$$

Il termine $\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$ dice che esiste un intorno $(-\delta, \delta)$, $\delta > 0$, di $x = 0$ dove il grafico attraversa la retta tangente da sotto per $-\delta < x < 0$ a sopra per $0 < x < \delta$. Il punto $x = 0$ è di flesso con tangente orizzontale.

Soluzione

Da

$$\sinh x = x + o(x^2)$$

e

$$2\sqrt{1+y} = 2 + y - \frac{1}{4}y^2 + o(y^2)$$

si ha

$$f(x) = 2\sqrt{1+\sinh x} - x = 2 + x - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2) - x = 2 - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2).$$

L'equazione della retta tangente è

$$y = 2.$$

Il termine $-\frac{1}{4}x^2 + o(x^2)$ dice che esiste un intorno $(-\delta, \delta)$, $\delta > 0$, di $x = 0$ dove il grafico è al di sotto della retta tangente per $-\delta < x < \delta$, $x \neq 0$. In particolare, visto che la retta tangente è orizzontale, il punto $x = 0$ è di massimo locale.

Soluzione

Da

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

e

$$8\sqrt{1+y} = 8 + 4y - y^2 + \frac{1}{2}y^3 + o(y^3)$$

si ha

$$f(x) = 8\sqrt{1+\sin x} + x^2 =$$

$$8 + 4x - \frac{2}{3}x^3 - \left(x - \frac{1}{6}x^3\right)^2 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)^3 + o(x^3) + x^2 =$$

$$8 + 4x - \frac{2}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x^3 + x^2 + o(x^3) = 8 + 4x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

L'equazione della retta tangente è

$$y = 8 + 4x.$$

Il termine $-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ dice che esiste un intorno $(-\delta, \delta)$, $\delta > 0$, di $x = 0$ dove il grafico attraversa la retta tangente da sopra per $-\delta < x < 0$ a sotto per $0 < x < \delta$. Il punto $x = 0$ è di flesso.

Soluzione

Da

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

e

$$8\sqrt{1+y} = 8 + 4y - y^2 + \frac{1}{2}y^3 + o(y^3)$$

si ha

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 8\sqrt{1 + \log(1+x)} + 3x^2 = \\
 &= 8 + 4\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right) - \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)^2 + \\
 &\quad \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)^3 + o(x^3) + 3x^2 = \\
 &= 8 + 4x - 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 - x^2 + x^3 + \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 + o(x^3) = \\
 &= 8 + 4x + \frac{17}{6}x^3 + o(x^3).
 \end{aligned}$$

L'equazione della retta tangente è

$$y = 8 + 4x.$$

Il termine $\frac{17}{6}x^3 + o(x^3)$ dice che esiste un intorno $(-\delta, \delta)$, $\delta > 0$, di $x = 0$ dove il grafico attraversa la retta tangente da sotto per $-\delta < x < 0$ a sopra per $0 < x < \delta$. Il punto $x = 0$ è di flesso.

Esercizio 9.2

Scrivere lo sviluppo di Maclaurin al 3° ordine della funzione

$$f(x) = e^x - e^{-x^2} - \sin x$$

e stabilirne l'ordine di infinitesimo. In base al solo sviluppo determinato, dire se la funzione presenta in $x = 0$ un punto di minimo relativo, di massimo relativo, di flesso, o nessuna di queste cose. Giustificare la risposta.

Soluzione

Dovendo sviluppare $f(x)$ al terzo ordine, potremo arrestarci al secondo ordine di sviluppo per e^{-x^2} . Cioè:

$$\begin{aligned}
 e^x &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \\
 e^{-x^2} &= 1 - x^2 + o(x^3) \\
 \sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)
 \end{aligned}$$

Si ha poi

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - (1 - x^2 + o(x^3)) - \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) \\
 &= \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)
 \end{aligned}$$

In particolare, si ha

$$f(x) \sim \frac{3}{2}x^2 \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

da cui possiamo subito dichiarare che l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ è $\alpha = 2$, la parte principale è $\frac{3}{2}x^2$. Il punto $x = 0$ è un punto di minimo locale; infatti, il termine $\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$ dice che esiste un intorno $(-\delta, \delta)$, $\delta > 0$, di $x = 0$ dove il grafico è tutto sopra la retta tangente, orizzontale, $y = 0$.

Esercizio 9.3

Determinare il polinomio di Taylor di ordine 3, centrato nel punto $x_0 = \frac{\pi}{3}$, della funzione $f(x) = \cos x$.

Soluzione

In generale, il polinomio di Taylor di ordine n , centrato in x_0 , di una funzione $f(x)$ è

$$T_{n,f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

con $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$. In questo caso, avremo bisogno della derivata prima, seconda e terza, valutate in $x_0 = \frac{\pi}{3}$. Si ha

$$f' \left(\frac{\pi}{3} \right) = -\sin \left(\frac{\pi}{3} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'' \left(\frac{\pi}{3} \right) = -\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2}$$

$$f''' \left(\frac{\pi}{3} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e il polinomio di Taylor di ordine 3, centrato nel punto $x_0 = \frac{\pi}{3}$, della funzione $f(x) = \cos x$ è

$$T_{3,f,\frac{\pi}{3}}(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - \frac{1}{4} \left(x - \frac{\pi}{3} \right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12} \left(x - \frac{\pi}{3} \right)^3$$

Limiti con sviluppi asintotici

Esercizio 10.1

Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6(x - \sin x) - x^3}{\sin x^5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh^2 x + 2(1 - \cosh x)}{(1 - \cos x)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(1 - \cos x)^2 - x^2 \sin^2 x}{\sin^2 x \log(1 + x^4)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \sin x - e^{x^2}}{x \sin(x^3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos x - \sinh x^2 + \frac{1}{2}x^4}{x^2 - \arctan x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sinh x - 2 \cosh x + 2}{(e^{\sin x} - 1)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8\sqrt{1 + \sin x} - 8 - 4x + x^2}{(2e^x - 2 - 2x - x^2) \cosh^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \log(1 + \sin x) - 2x + x^2}{(2e^x - 2 - 2x - x^2) \cos^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{4 + \frac{5}{x}} - 2 \cos \frac{1}{x} \right)$$

Soluzione

Determiniamo la parte principale nello sviluppo di Mc Laurin del numeratore:

$$6(x - \sin x) - x^3 = 6\left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) - x^3 = -\frac{x^5}{20} + o(x^5).$$

Il denominatore equivale ad x^5 :

$$\sin x^5 \sim x^5.$$

Il limite dato vale quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6(x - \sin x) - x^3}{\sin x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^5}{20}}{x^5} = -\frac{1}{20}$$

Soluzione

Determiniamo la parte principale nello sviluppo di Mc Laurin del numeratore:

$$\sinh^2 x + 2(1 - \cosh x) = \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 - x^2 - \frac{x^4}{12} + o(x^4) = \frac{x^4}{4} + o(x^4).$$

Il denominatore equivale ad $x^4/4$:

$$(1 - \cos x)^2 \sim \frac{x^4}{4}.$$

Il limite dato vale quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh^2 x + 2(1 - \cosh x)}{(1 - \cos x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{4}}{\frac{x^4}{4}} = 1.$$

Soluzione

Determiniamo la parte principale nello sviluppo di Mc Laurin del numeratore:

$$\begin{aligned} 4(1 - \cos x)^2 - x^2 \sin^2 x &= 4\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2 - x^2\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 \\ &= \frac{x^6}{6} + o(x^6). \end{aligned}$$

Il denominatore equivale ad x^6 :

$$\sin^2 x \log(1 + x^4) \sim x^2 \cdot x^4 = x^6.$$

Il limite dato vale quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(1 - \cos x)^2 - x^2 \sin^2 x}{\sin^2 x \log(1 + x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^6}{6}}{x^6} = \frac{1}{6}.$$

Soluzione

Determiniamo la parte principale nello sviluppo di Mc Laurin del numeratore:

$$\begin{aligned} 1 + x \sin x - e^{x^2} &= 1 + x \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) - \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) \right) \\ &= -\frac{2}{3}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Il denominatore equivale ad x^4 :

$$x \sin(x^3) \sim x \cdot x^3 = x^4.$$

Il limite dato vale quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \sin x - e^{x^2}}{x \sin(x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{2}{3}x^4}{x^4} = -\frac{2}{3}.$$

Soluzione

Determiniamo la parte principale nello sviluppo di Mc Laurin del numeratore:

$$\begin{aligned} x^2 \cos x - \sinh x^2 + \frac{1}{2}x^4 \\ = x^2 \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) - \left(x^2 + \frac{x^6}{6} + o(x^6) \right) + \frac{1}{2}x^4 = -\frac{x^6}{8} + o(x^6). \end{aligned}$$

Per il denominatore, dallo sviluppo $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, segue

$$x^2 - \arctan x^2 = \frac{x^6}{3} + o(x^6).$$

Il limite dato vale quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos x - \sinh x^2 + \frac{1}{2}x^4}{x^2 - \arctan x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^6}{8}}{\frac{x^6}{3}} = -\frac{3}{8}.$$

Soluzione

Determiniamo la parte principale nello sviluppo di Mc Laurin del numeratore:

$$\begin{aligned} x \sinh x - 2 \cosh x + 2 \\ = x \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) - 2 \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) + 2 = \frac{x^4}{12} + o(x^4). \end{aligned}$$

Il denominatore equivale ad x^2 :

$$(e^{\sin x} - 1)^2 \sim (\sin x)^2 \sim x^2.$$

Il limite dato vale quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sinh x - 2 \cosh x + 2}{(e^{\sin x} - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{12}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{12} = 0.$$

Soluzione

Sviluppiamo all'ordine 3 la funzione composta $8\sqrt{1 + \sin x}$ con punto iniziale $x = 0$. Da $\sin x \sim x - x^3/6$ e $8\sqrt{1 + y} \sim 8 + 4y - y^2 + y^3/2$, componendo, abbiamo

$$\begin{aligned} 8\sqrt{1 + \sin x} &= 8 + 4 \left(x - \frac{x^3}{6} \right) - \left(x - \frac{x^3}{6} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} \right)^3 + o(x^3) \\ &= 8 + 4x - x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Ne segue che il numeratore, nel limite dato, è equivalente a $-x^3/6$.

A denominatore abbiamo il fattore $\cosh^2 x$ che converge a 1 mentre

$$2e^x - 2 - 2x - x^2 \sim x^3/3.$$

Il limite dato vale

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8\sqrt{1 + \sin x} - 8 - 4x + x^2}{(2e^x - 2 - 2x - x^2) \cosh^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{6}}{\frac{x^3}{3}} = -\frac{1}{2}.$$

Soluzione

Sviluppiamo all'ordine 3 la funzione composta $2 \log(1 + \sin x)$ con punto iniziale $x = 0$. Da $\sin x \sim x - x^3/6$ e $2 \log(1 + y) \sim 2y - y^2 + 2y^3/3$, componendo, abbiamo

$$\begin{aligned} 2 \log(1 + \sin x) &= 2 \left(x - \frac{x^3}{6} \right) - \left(x - \frac{x^3}{6} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(x - \frac{x^3}{6} \right)^3 + o(x^3) \\ &= 2x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Ne segue che il numeratore, nel limite dato, è equivalente a $x^3/3$.

A denominatore abbiamo il fattore $\cos^2 x$ che converge a 1 mentre

$$2e^x - 2 - 2x - x^2 \sim x^3/3.$$

Il limite dato vale

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \log(1 + \sin x) - 2x + x^2}{(2e^x - 2 - 2x - x^2) \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{3}x^3} = 1.$$

Soluzione

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{4 + \frac{5}{x}} - 2 \cos \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \left(\sqrt{1 + \frac{5}{4x}} - \cos \frac{1}{x} \right)$$

Da $\cos y = 1 + o(y)$ e $\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y + o(y)$, componendo, abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \left(\sqrt{1 + \frac{5}{4x}} - \cos \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - 1 + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \left(\frac{5}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) \\ &= \frac{5}{4} + o(1) \\ &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Metodi di Newton

Esercizio 11.1

Considerare

$$f(x) = e^{-x} - x$$

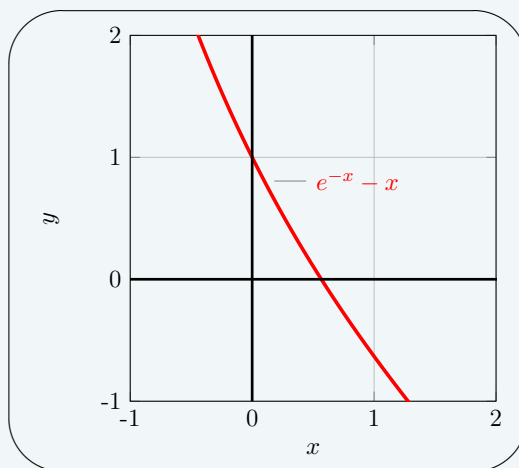
e verificare se il metodo di Newton può essere applicato nell'intervallo $[0, 1]$. In caso positivo trovare una stima di $x \in [0, 1]$ tale che:

$$e^{-x} - x = 0$$

Soluzione

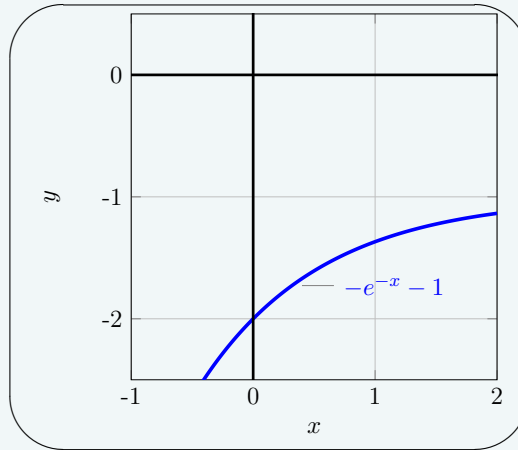
Consideriamo la funzione:

$$f(x) = e^{-x} - x, \quad f'(x) = -e^{-x} - 1, \quad f''(x) = e^{-x}$$



Abbiamo:

$$f(0) = 1 > 0 \quad \text{e} \quad f(1) < 0$$



Consideriamo l'intervallo $[0, 1]$, abbiamo per $x \in [0, 1]$:

$$f'(x) < 0 \quad \text{e} \quad f''(x) > 0$$

Soluzione

Quindi nell'intervallo $[0, 1]$ la funzione $f(x) = e^{-x} - x$ rispetta le ipotesi del teorema.

Siamo nel caso di funzione strettamente decrescente in $[0, 1]$, dato che $f'(x) < 0, x \in [0, 1]$. E funzione convessa in $[0, 1]$, dato che $f''(x) > 0, x \in [0, 1]$. Gli estremi dell'intervallo scelto sono: $a = 0$ e $b = 1$.

Vale l'ipotesi 3, ovvero $f(0) \cdot f''(0) > 0$ e la successione diventa:

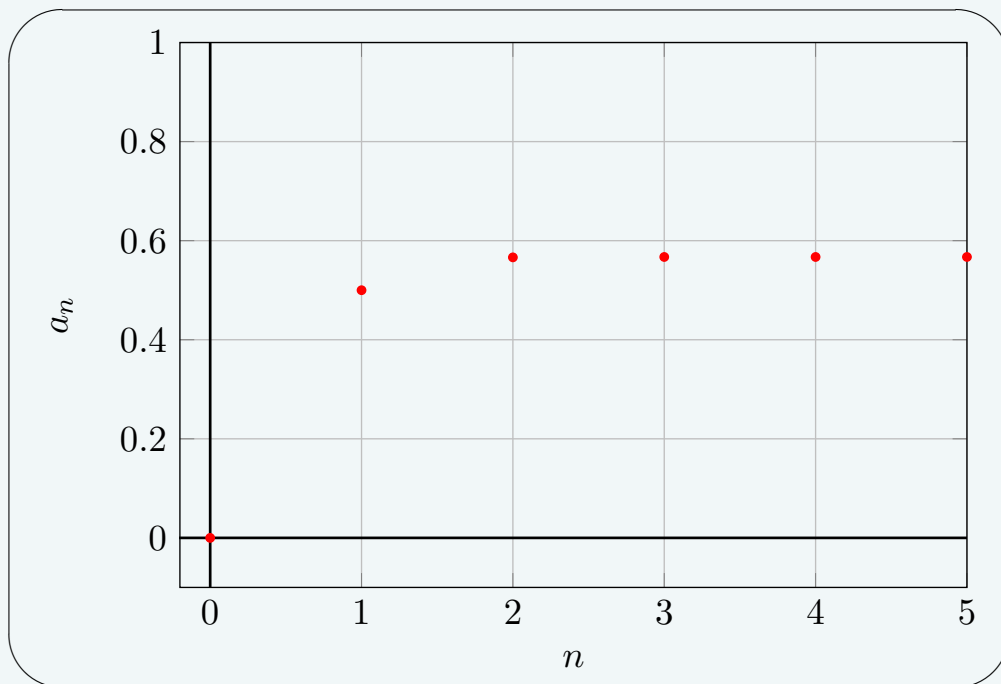
$$x_0 = 0, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{e^{-x_n} - x_n}{-e^{-x_n} - 1} = \frac{x_n + 1}{1 + e^{x_n}} \quad \text{con } n \in \mathbb{N}$$

Dato che

$$\begin{aligned} x_n - \frac{e^{-x_n} - x_n}{-e^{-x_n} - 1} &= x_n + \frac{e^{-x_n} - x_n}{e^{-x_n} + 1} = x_n + \frac{e^{-x_n}}{e^{-x_n}} \frac{1 - e^{x_n} x_n}{1 + e^{x_n}} \\ &= \frac{x_n(1 + e^{x_n}) + 1 - e^{x_n} x_n}{1 + e^{x_n}} = \frac{x_n + 1}{1 + e^{x_n}} \end{aligned}$$

quindi abbiamo:

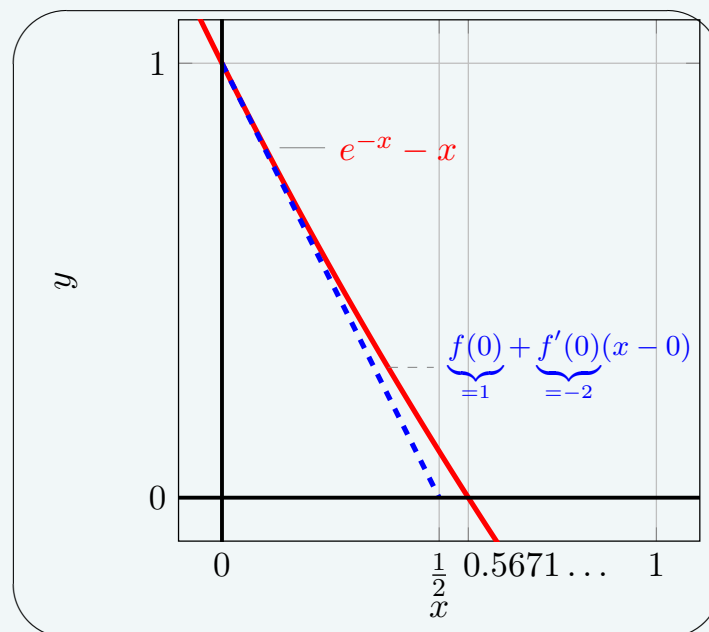
$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.5, \quad x_2 = 0.5663 \dots, \quad x_3 = 0.5671 \dots, \quad x_4 = 0.5671 \dots, \quad x_5 = 0.5671 \dots$$



Soluzione

Alla prima iterazione la retta tangente è:

$$y = 1 - 2x \quad \text{e} \quad x_1 = 0 - \frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$



Metodo di bisezione

Esercizio 12.1

Utilizzando il metodo della bisezione, individuare le soluzioni dell'equazione

$$x^3 + 2x - 1 = 0$$

con due decimali esatti.

(Anzitutto occorre stabilire quante sono le soluzioni.)

Soluzione

Scritta nella forma

$$x^3 = 1 - 2x,$$

l'equazione suggerisce di confrontare innanzitutto i grafici delle funzioni $y = x^3$ e $y = 1 - 2x$, al fine di stabilire preliminarmente il numero delle soluzioni dell'equazione. Dal confronto fra i due grafici, si evince che esiste un'unica soluzione $\alpha \in (0, 1)$, cioè un unico zero della funzione $f(x) = x^3 + 2x - 1$ in quell'intervallo. Più formalmente:

$$\exists! \alpha \in (0, 1) : f(\alpha) = 0$$

Procediamo, dunque, con l'applicazione del metodo di bisezione all'intervallo $[a, b] = [0, 1]$, con $f(0) = -1 < 0$ e $f(1) = 2 > 0$.

Iterazione 1 ($n = 0$)

$$\begin{aligned} [a_0, b_0] &= [0, 1] \\ c_0 &= \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

con $f(c_0) = \frac{1}{8} > 0$. Allora, nella prossima iterazione, $b_1 = c_0$.

Soluzione

Iterazione 2 ($n = 1$)

$$[a_1, b_1] = \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad f(0) < 0, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$$

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{1}{4}$$

con $f(c_1) < 0$. Allora, nella prossima iterazione, $a_2 = c_1$.

Iterazione 3 ($n = 2$)

$$[a_2, b_2] = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right], f\left(\frac{1}{4}\right) < 0, f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$$

$$c_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{3}{8}$$

con $f(c_2) < 0$. Allora, nella prossima iterazione, $a_3 = c_2$. Per raggiungere il livello di approssimazione desiderato, dovremo attendere fino all'iterazione 9 ($n = 8$), in cui si otterrà

$$a_8 = \frac{29}{64} \simeq 0,453 \quad b_8 = \frac{117}{256} \simeq 0,457$$

Possiamo dichiarare che, in definitiva, $\alpha \in \left(\frac{29}{64}, \frac{117}{256}\right)$ con due decimali esatti.

Esercizio 12.2

Utilizzando il metodo della bisezione, individuare le soluzioni dell'equazione

$$x + \log x = 0$$

con due decimali esatti.

(Anzitutto occorre stabilire quante sono le soluzioni.)

Soluzione

Scritta nella forma

$$\log x = -x,$$

l'equazione suggerisce di confrontare innanzitutto i grafici delle funzioni $y = \log x$ e $y = -x$, al fine di stabilire preliminarmente il numero delle soluzioni dell'equazione. Dal confronto fra i due grafici, si evince che esiste un'unica soluzione $\alpha \in (0, 1)$, cioè un unico zero della funzione $f(x) = x + \log x$ in quell'intervallo. Più formalmente:

$$\exists! \alpha \in (0, 1) : f(\alpha) = 0$$

Procediamo, dunque, con l'applicazione del metodo di bisezione all'intervallo $[a, b] = [0 + \varepsilon, 1]$, $\varepsilon > 0$, con $f(1) = 1 > 0$ e $f < 0$ in un intorno destro del punto $x_0 = 0$ di raggio ε arbitrariamente piccolo (si noti che $y = \log x$ non è definita per $x = 0$).

Iterazione 1 ($n = 0$)

$$[a_0, b_0] = [0 + \varepsilon, 1]$$

$$c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{1 + \varepsilon}{2} \simeq \frac{1}{2}$$

con $f(c_0) = \frac{1}{2} - \log 2 < 0$. Allora, nella prossima iterazione, $a_1 = c_0$.

Iterazione 2 ($n = 1$)

$$[a_1, b_1] = \left[\frac{1}{2}, 1 \right], f\left(\frac{1}{2}\right) < 0, f(1) > 0$$

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{3}{4}$$

con $f(c_1) > 0$. Allora, nella prossima iterazione, $b_2 = c_1$.

Iterazione 3 ($n = 2$)

$$[a_2, b_2] = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right], f\left(\frac{1}{2}\right) < 0, f\left(\frac{3}{4}\right) > 0$$

$$c_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{5}{8}$$

con $f(c_2) > 0$. Allora, nella prossima iterazione, $b_3 = c_2$.

Soluzione

Iterazione 4 ($n = 3$)

$$[a_3, b_3] = \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8} \right], f\left(\frac{1}{2}\right) < 0, f\left(\frac{5}{8}\right) > 0$$

$$c_3 = \frac{a_3 + b_3}{2} = \frac{9}{16}$$

con $f(c_3) < 0$. Allora, nella prossima iterazione, $a_4 = c_3$. Si osservi che

$$a_3 = 0,5, b_3 = 0,625$$

e siamo, dunque, ancora lontani dall'avere due cifre decimali esatte. Per raggiungere il livello di approssimazione desiderato, dovremo attendere fino all'iterazione 10 ($n = 9$), in cui si otterrà

$$a_9 = \frac{145}{256} \simeq 0,566 \quad b_9 = \frac{291}{512} \simeq 0,568$$

Possiamo dichiarare che, in definitiva, $\alpha \in \left(\frac{145}{256}, \frac{291}{512}\right)$ con due decimali esatti.

Esercizio 12.3

Utilizzando il metodo della bisezione, individuare le soluzioni dell'equazione

$$2 \sin x = x$$

con un decimale esatto.

(Anzitutto occorre stabilire quante sono le soluzioni.)

Esercizio 12.4

Utilizzando il metodo della bisezione, individuare le soluzioni dell'equazione

$$x^2 - 2 - \log x = 0$$

con un decimale esatto.
(Anzitutto occorre stabilire quante sono le soluzioni.)

Ricerca di estremi e punti di estremo locali e globali

Esercizio 13.1

Calcolare tutti i punti di massimo e minimo (globali e locali) della funzione:

$$f(x) = 5 + 54x - 2x^3 \quad \text{nell'intervallo } [0, 4]$$

Soluzione

1. I valori della funzione agli estremi dell'intervallo sono: $f(0) = 5$ e $f(4) = 93$.

2. La funzione derivata è:

$$f'(x) = 54 - 6x^2 = -6(x^2 - 9) = -6(x + 3)(x - 3)$$

Risolviemo l'equazione:

$$f'(x) = 0 \iff -6(x + 3)(x - 3) = 0 \iff x = \pm 3$$

$$x_1 = 3 \in [0, 4] \quad \text{punto stazionario}$$

3. Abbiamo $f'(x) \geq 0$ per $x \in [-3, 3]$. Studiando il segno di f' vicino a $x = 3$, si deduce che $x = 3$ è un punto di massimo locale e $f(3) = 113$ è un massimo locale.

4. Abbiamo:

$$f(3) = 113 > f(0) = 5, \quad f(3) = 113 > f(4) = 93$$

Si conclude quindi che:

- $f(0) = 5$ è il **minimo globale** e $x = 0$ è **punto di minimo globale**
- $f(3) = 113$ è il **massimo globale** e $x = 3$ è **punto di massimo globale**
- $f(4) = 93$ è un **minimo locale** e $x = 4$ è **punto di minimo locale**

Esercizio 13.2

Calcolare tutti i punti di massimo e minimo (globali e locali) della funzione:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 \quad \text{nell'intervallo } [-2, 3]$$

Soluzione

1. I valori della funzione agli estremi dell'intervallo sono: $f(-2) = -3$ e $f(3) = -8$.

2. La funzione derivata è:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x + 1)(x - 2)$$

RisolviAMO l'equazione:

$$f'(x) = 0 \iff 6(x^2 - x - 2) = 0 \iff x = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = -1 \in [-2, 3] \quad \text{e} \quad x_2 = 2 \in [-2, 3] \quad \text{punti stazionari}$$

3. Abbiamo $f'(x) \geq 0$ per $x \in (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$. Studiando il segno di f' vicino a $x = -1$, si deduce che $x = -1$ è un punto di massimo locale e $f(-1) = 8$ è un massimo locale. Studiando il segno di f' vicino a $x = 2$, si deduce che $x = 2$ è un punto di minimo locale e $f(2) = -19$ è un minimo locale.

4. Abbiamo:

$$f(-1) = 8 > f(-2) = -3, \quad f(-1) = 8 > f(3) = -8$$

$$f(2) = -19 < f(-2) = -3, \quad f(2) = -19 < f(3) = -8$$

Si conclude quindi che:

- $f(-2) = -3$ è un **minimo locale** e $x = -2$ è **punto di minimo locale**
- $f(-1) = 8$ è il **massimo globale** e $x = -1$ è **punto di massimo globale**
- $f(2) = -19$ è il **minimo globale** e $x = 2$ è **punto di minimo globale**
- $f(3) = -8$ è un **massimo locale** e $x = 3$ è **punto di massimo locale**

Esercizio 13.3

Calcolare tutti i punti di massimo e minimo (globali e locali) della funzione:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2 \quad \text{nell'intervallo } [-1, 4]$$

Soluzione

1. I valori della funzione agli estremi dell'intervallo sono: $f(-1) = -14$ e $f(4) = 6$.

2. La funzione derivata è:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x - 3)(x - 1)$$

Risolviamo l'equazione:

$$f'(x) = 0 \iff 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \iff x = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = 1 \in [-1, 4] \text{ e } x_2 = 3 \in [-1, 4] \text{ punti stazionari}$$

3. Abbiamo $f'(x) \geq 0$ per $x \in (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$. Studiando il segno di f' vicino a $x = 1$, si deduce che $x = 1$ è un punto di massimo locale e $f(1) = 6$ è un massimo locale. Studiando il segno di f' vicino a $x = 3$, si deduce che $x = 3$ è un punto di minimo locale e $f(3) = 2$ è un minimo locale.

4. Abbiamo:

$$f(1) = 6 > f(-1) = -14, \quad f(1) = 6 \geq f(4) = 6$$

$$f(3) = 2 > f(-1) = -14, \quad f(3) = 2 < f(4) = 6$$

Si conclude quindi che:

- $f(-1) = -14$ è il **minimo globale** e $x = -1$ è **punto di minimo globale**
- $f(1) = 6$ è il **massimo globale** e $x = 1$ è **punto di massimo globale**
- $f(3) = 2$ è un **minimo locale** e $x = 3$ è **punto di minimo locale**
- $f(4) = 6$ è il **massimo globale** e $x = 4$ è **punto di massimo globale**

Esercizio 13.4

Calcolare tutti i punti di massimo e minimo (globali e locali) della funzione:

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 3 \quad \text{nell'intervallo } [-2, 3]$$

Soluzione

1. I valori della funzione agli estremi dell'intervallo sono: $f(-2) = 11$ e $f(3) = 66$.

2. La funzione derivata è:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$$

Risolviamo l'equazione:

$$f'(x) = 0 \iff 4x(x^2 - 1) = 0 \iff x = \pm 1 \text{ e } x = 0$$

$$x_1 = -1 \in [-2, 3], \quad x_2 = 0 \in [-2, 3] \text{ e } x_3 = 1 \in [-2, 3] \text{ punti stazionari}$$

3. Abbiamo $f'(x) \geq 0$ per $x \in [-1, 0] \cup [1, +\infty)$. Studiando il segno di f' vicino a $x = -1$, si deduce che $x = -1$ è un punto di minimo locale e $f(-1) = 2$ è un minimo locale. Studiando il segno di f' vicino a $x = 0$, si deduce che $x = 0$ è un punto di massimo locale e $f(0) = 3$ è un massimo locale. Studiando il segno di f' vicino a $x = 1$, si deduce che $x = 1$ è un punto di minimo locale e $f(1) = 2$ è un minimo locale.

4. Abbiamo:

$$f(-1) = 2 < f(-2) = 11, \quad f(-1) = 2 < f(3) = 66$$

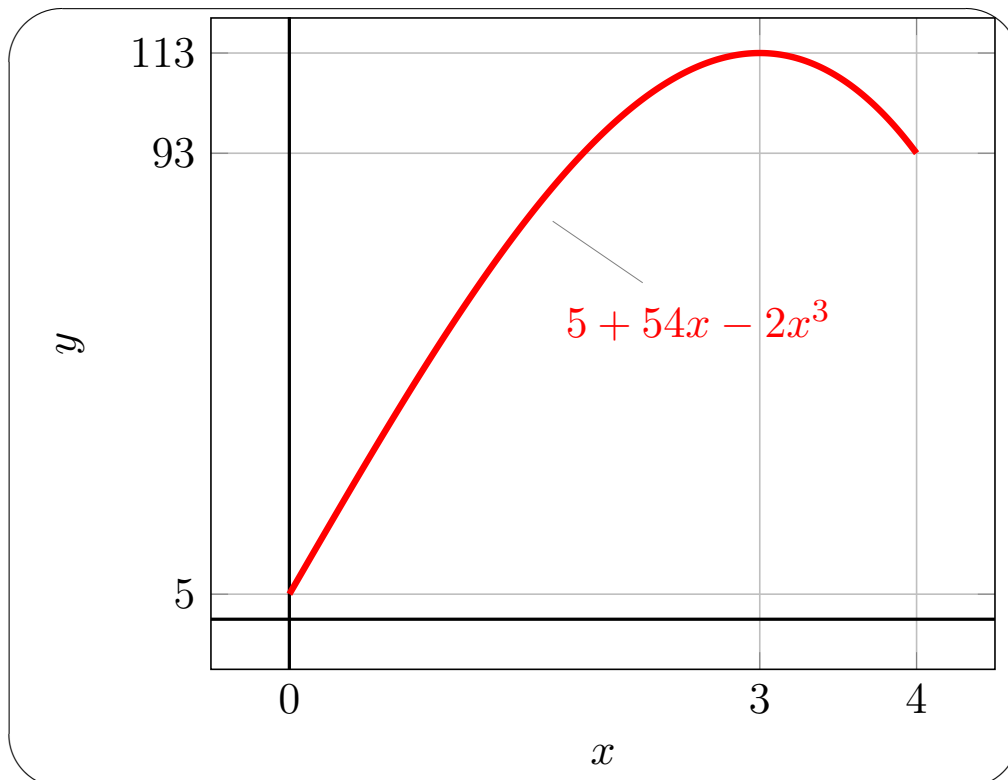
$$f(0) = 3 < f(-2) = 11, \quad f(0) = 3 < f(3) = 66$$

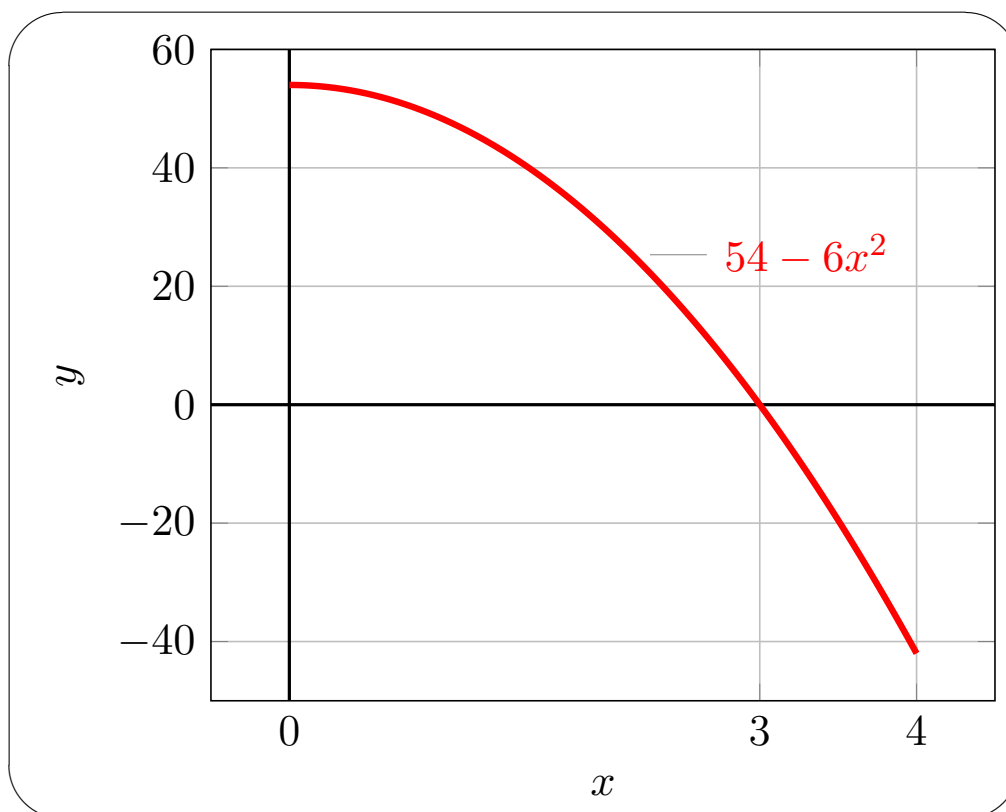
$$f(1) = 2 < f(-2) = 11, \quad f(1) = 2 < f(3) = 66$$

Si conclude quindi che:

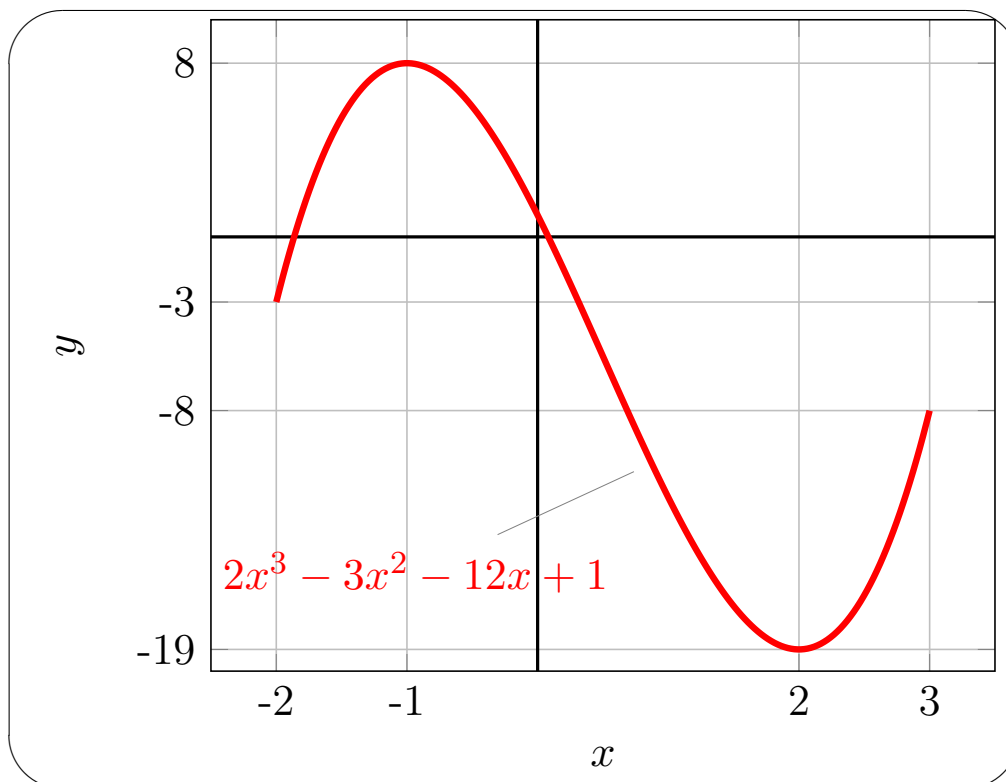
- $f(-2) = 11$ è un **massimo locale** e $x = -2$ è **punto di massimo locale**
- $f(-1) = 2$ è il **minimo globale** e $x = -1$ è **punto di minimo globale**
- $f(0) = 3$ è un **massimo locale** e $x = 0$ è **punto di massimo locale**
- $f(1) = 2$ è il **minimo globale** e $x = 1$ è **punto di minimo globale**
- $f(3) = 66$ è il **massimo globale** e $x = 3$ è **punto di massimo globale**

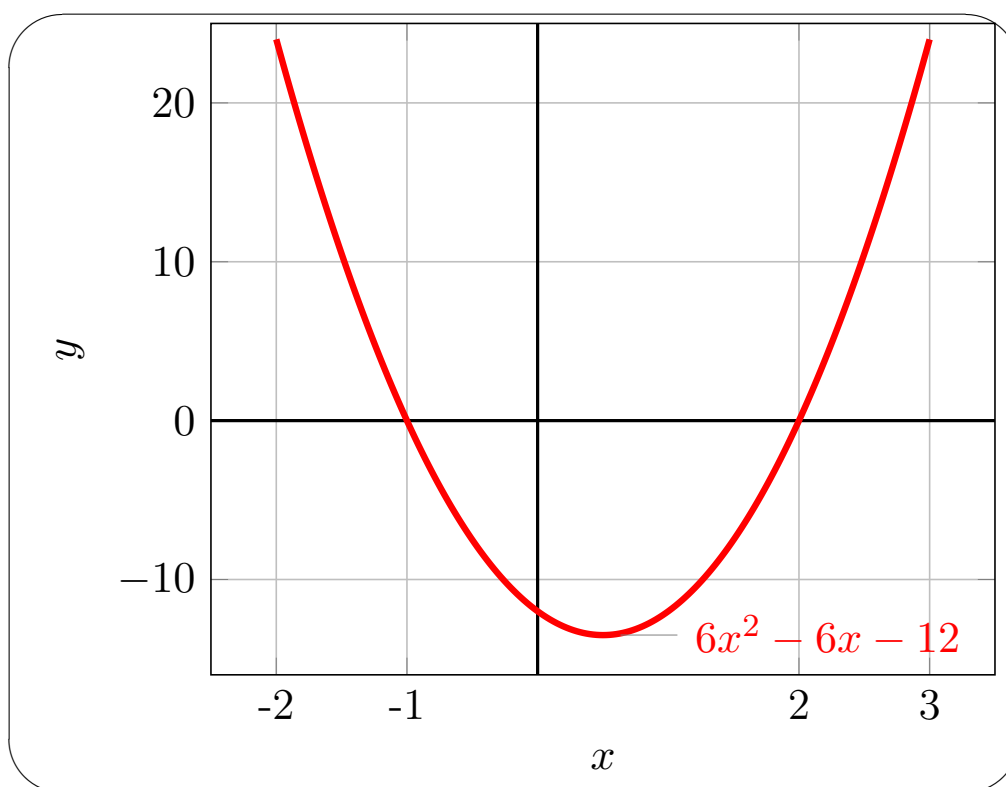
Questi sono i grafici della funzione $f(x) = 5 + 54x - 2x^3$ e della derivata nell'intervallo $[0, 4]$:



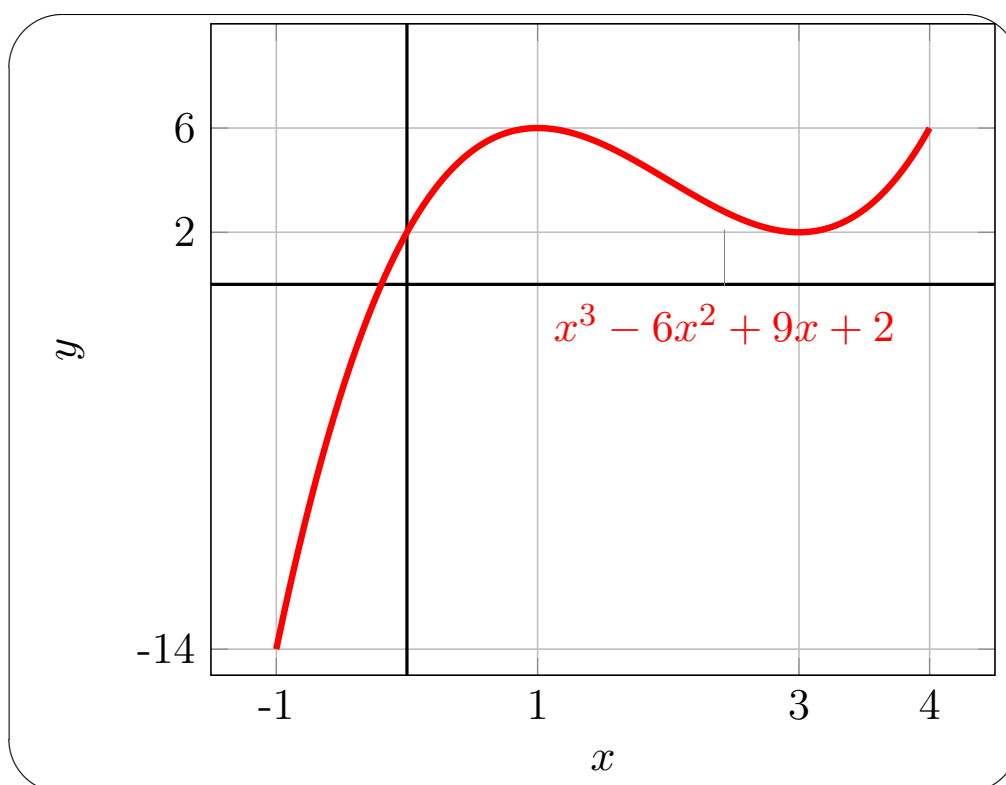


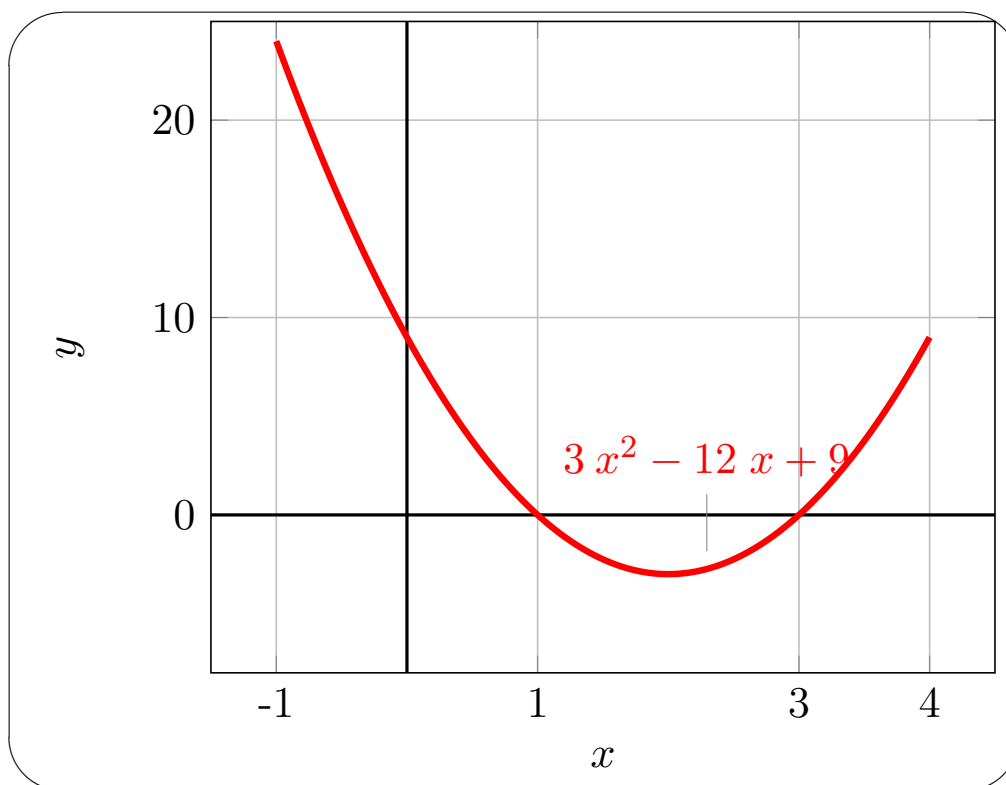
Questi sono i grafici della funzione $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ e della derivata nell'intervallo $[-2, 3]$:





Questi sono i grafici della funzione $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ e della derivata nell'intervallo $[-1, 4]$:





Questi sono i grafici della funzione $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ e della derivata nell'intervallo $[-2, 3]$:

