



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Analisi

Matematica 1

Esercizi, volume 4 — Limiti

Gli esercizi svolti sui limiti, in due parti come il volume delle dispense, una scheda per capitolo, con la soluzione subito dopo ogni testo. Limiti di successioni: proprietà delle successioni, verifica e calcolo di limiti, esercizi aggiuntivi. Limiti di funzioni: limiti di funzioni reali di variabile reale. Le schede sono di Fabio Furini e Gianluca Priori; molti esercizi sono tratti da M. Bramanti, *Esercitazioni di Analisi matematica 1*, Esculapio.

Fabio Furini

fabiofurini.github.io

Dipartimento di Ingegneria informatica, automatica e gestionale — Sapienza Università di Roma

Versione online e materiale scaricabile:
fabiofurini.github.io/analisi-matematica-1/
github.com/fabiofurini/analisi-matematica-1

Anno accademico 2026–2027

Indice

I	Limiti di successioni	2
1	Proprietà delle successioni	3
2	Verifica di limiti di successioni	10
3	Calcolo limiti di successioni	14
3.1	Calcolo dei limiti con tecniche di base	14
3.2	Calcolo dei limiti usando la gerarchia degli infiniti	19
3.3	Calcolo dei limiti usando stime asintotiche	22
3.4	Calcolo dei limiti con la successione convergente al numero di Nepero	24
3.5	Calcolo dei limiti col teorema del confronto	27
3.6	Calcolo dei limiti col teorema del rapporto	29
3.7	Discussione al variare di un parametro	32
3.8	Esercizi a risposta multipla	33
4	Esercizi aggiuntivi	36
II	Limiti di funzioni e continuità	41
1	Limiti di funzioni reali di variabile reale	42

Parte I

Limiti di successioni



Proprietà delle successioni

Esercizio 1.1

Si consideri la successione

$$a_n = \log \left(1 + (-1)^n \frac{n}{n+1} \right), \quad \text{per } n = 1, 2, 3, \dots$$

Domande:

1. La successione è limitata superiormente? In caso affermativo determinare il $\sup \{a_n\}$.
2. La successione ammette massimo? In caso affermativo determinare il $\max \{a_n\}$.
3. La successione è inferiormente limitata? In caso affermativo determinare l' $\inf \{a_n\}$.
4. La successione ammette minimo? In caso affermativo determinare il $\min \{a_n\}$.

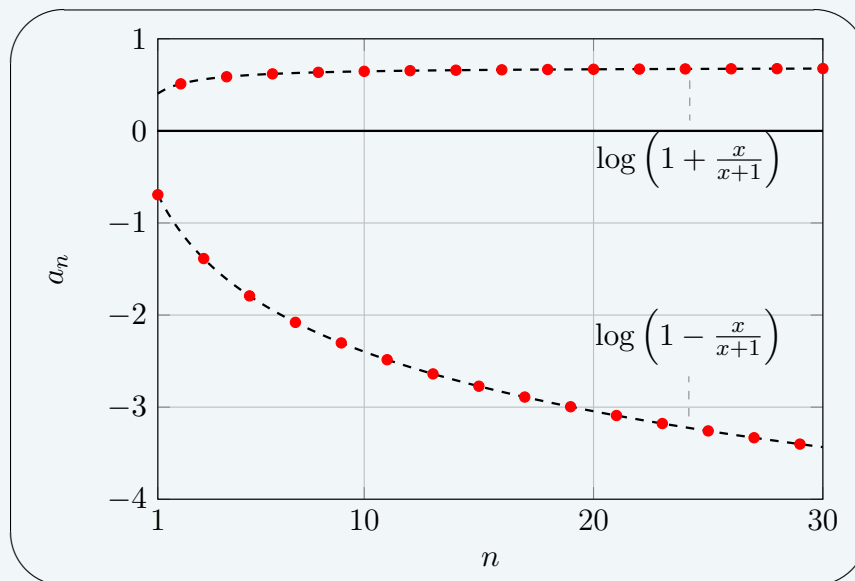
Soluzione

Con $n = 1$ abbiamo

$$\log \left(1 - 1 \frac{1}{2} \right) = \log \frac{1}{2} \approx -0.69314.$$

Con $n = 2$ abbiamo

$$\log \left(1 + 1 \frac{2}{3} \right) = \log \frac{5}{3} \approx 0.510826.$$



La presenza del segno alternato $(-1)^n$ suggerisce di ragionare sull'andamento della successione distinguendo cosa succede per n pari e n dispari.

Soluzione

- Se n è pari:

$$a_n = \log \left(1 + \frac{n}{n+1} \right), \quad \text{per } n = 2, 4, 6 \dots$$

quindi l'argomento del logaritmo è

$$1 + \frac{n}{n+1} = 1 + \frac{n+1-1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}$$

che varia in

$$\left[\frac{5}{3}, 2 \right) \text{ e il logaritmo in } \left[\log \frac{5}{3}, \log 2 \right),$$

ovvero è positivo e superiormente limitato. Quindi

$$\sup \{ a_n : n \text{ è pari} \} = \log 2 \approx 0.69314$$

ma $\log 2$ non è il massimo di questi valori.

- Se n è dispari:

$$a_n = \log \left(1 - \frac{n}{n+1} \right), \quad \text{per } n = 1, 3, 5 \dots$$

quindi l'argomento del logaritmo è

$$1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

che varia in

$$\left(0, \frac{1}{2} \right] \text{ e il logaritmo in } \left(-\infty, \log \frac{1}{2} \right],$$

ovvero è negativo e al crescere di n è inferiormente illimitato.

La successione, nel suo complesso, è quindi superiormente ma non inferiormente limitata, non ammette massimo (pur avendo $\sup$ finito) né minimo (perché è inferiormente illimitata).

Esercizio 1.2

Si consideri la successione

$$a_n = e^{-\frac{1}{n}} \sin n, \quad \text{per } n = 1, 2, 3, \dots$$

Domande:

1. La successione è limitata superiormente?
2. La successione è limitata inferiormente?
3. È definitivamente positiva?
4. Non si annulla mai?
5. Ha limite (finito o infinito)?

Soluzione

Con $n = 1$ abbiamo

$$e^{-1} \sin 1 \approx 0.3679 \cdot 0.8415 \approx 0.309560.$$

Con $n = 2$ abbiamo

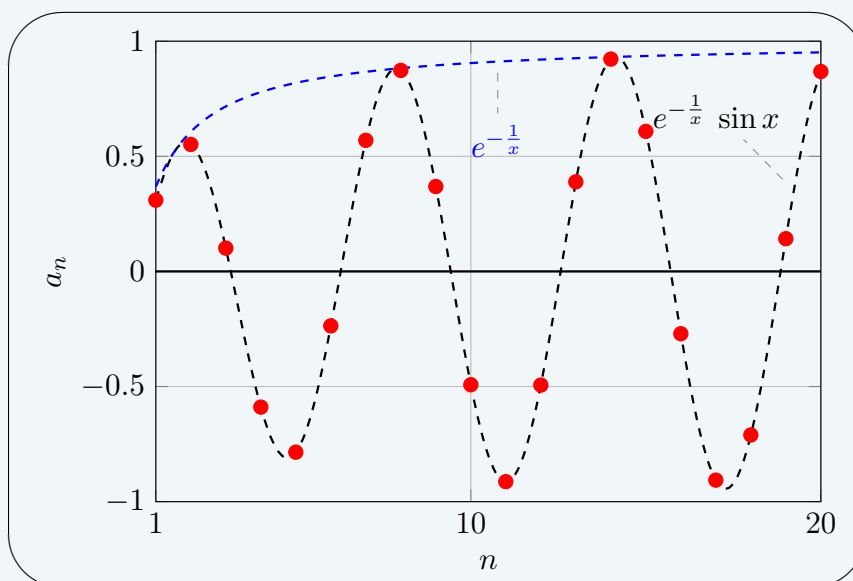
$$e^{-\frac{1}{2}} \sin 2 \approx 0.6065 \cdot 0.9093 \approx 0.551517.$$

Con $n = 10$ abbiamo

$$e^{-\frac{1}{10}} \sin 10 \approx 0.9048 \cdot -0.5440 \approx -0.492251.$$

Con $n = 20$ abbiamo

$$e^{-\frac{1}{20}} \sin 20 \approx 0.9512 \cdot 0.9129 \approx 0.8684.$$



Soluzione

La successione è il prodotto della successione

$$n \mapsto e^{-\frac{1}{n}} \quad \text{con} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{n}} = 1,$$

limitata, sempre diversa da zero, convergente, e della successione

$$n \mapsto \sin n,$$

limitata ma irregolare, mai nulla (dato che n parte da 1, per l'irrazionalità di π , l'angolo n non è mai multiplo intero di π).

Quindi, la successione data dal prodotto di queste due sarà limitata, mai nulla e irregolare.

Poiché

$$e^{-\frac{1}{n}} \rightarrow 1$$

e il segno di $\sin n$ non è definitivamente costante, la successione data dal prodotto delle due non è definitivamente positiva.

Esercizio 1.3

Si consideri la successione

$$a_n = e^n \sin n, \quad \text{per } n = 1, 2, 3, \dots$$

Domande:

1. La successione è limitata superiormente?
2. La successione è limitata inferiormente?
3. È definitivamente positiva?
4. Non si annulla mai?
5. Ha limite (finito o infinito)?

Soluzione

Con $n = 1$ abbiamo

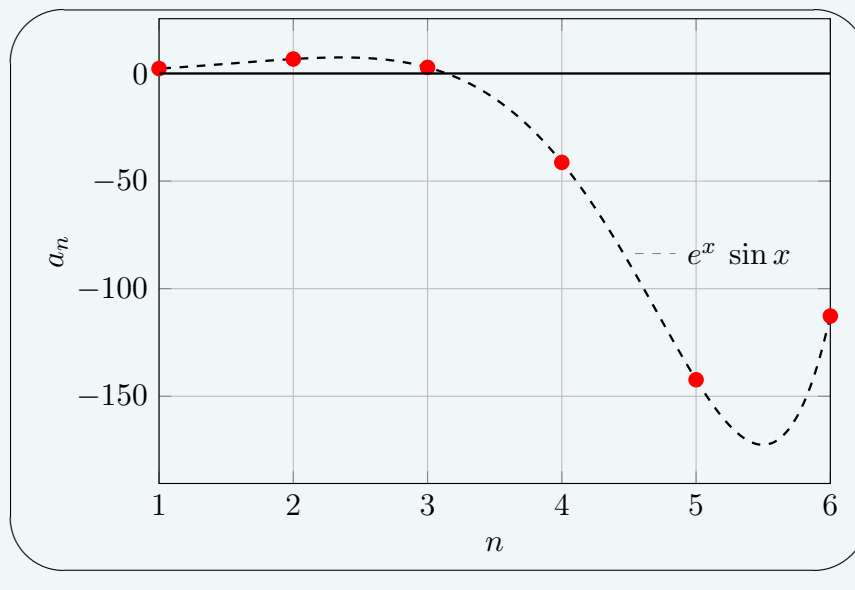
$$e^1 \sin 1 \approx 2.7183 \cdot 0.8415 \approx 2.2874.$$

Con $n = 2$ abbiamo

$$e^2 \sin 2 \approx 7.3891 \cdot 0.9093 \approx 6.7188.$$

Con $n = 5$ abbiamo

$$e^5 \sin 5 \approx 148.4132 \cdot -0.9589 \approx -142.3170.$$



Soluzione

La successione è il prodotto della successione

$$n \mapsto e^n \quad \text{con} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty,$$

illimitata superiormente, limitata inferiormente, sempre diversa da zero, divergente, e della successione

$$n \mapsto \sin n,$$

limitata ma irregolare, mai nulla (dato che n parte da 1, per l'irrazionalità di π , l'angolo n non è mai multiplo intero di π).

Quindi, la successione data dal prodotto di queste due sarà illimitata superiormente, illimitata inferiormente, mai nulla e irregolare.

Poiché

$$e^n \rightarrow +\infty$$

e il segno di $\sin n$ non è definitivamente costante, la successione data dal prodotto delle due non è definitivamente positiva.

Esercizio 1.4

Si consideri la successione

$$a_n = \frac{n(-1)^n}{n+1}, \quad \text{per } n = 1, 2, 3, \dots$$

Domande:

1. La successione è limitata superiormente? In caso affermativo determinare il $\sup \{a_n\}$.

2. La successione ammette massimo? In caso affermativo determinare il $\max \{a_n\}$.
3. La successione è inferiormente limitata? In caso affermativo determinare l' $\inf \{a_n\}$.
4. La successione ammette minimo? In caso affermativo determinare il $\min \{a_n\}$.

Soluzione

Con $n = 1$ abbiamo

$$1^{(-1)^1} \frac{1}{2} = 1 \frac{1}{2}$$

Con $n = 2$ abbiamo

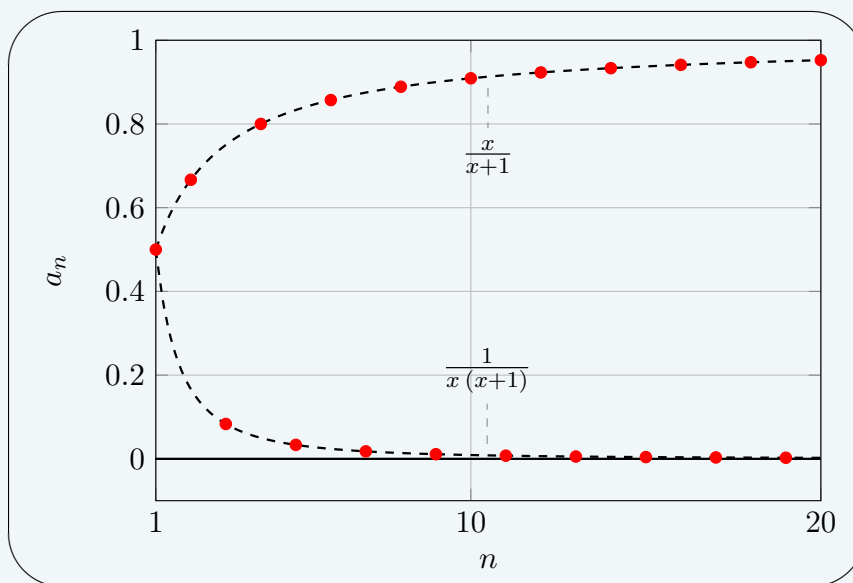
$$2^{(-1)^2} \frac{1}{3} = 2 \frac{1}{3}.$$

Con $n = 3$ abbiamo

$$3^{(-1)^3} \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \frac{1}{4}.$$

Con $n = 4$ abbiamo

$$4^{(-1)^4} \frac{1}{5} = 4 \frac{1}{5}.$$



La presenza del segno alternato $(-1)^n$ suggerisce di ragionare sull'andamento della successione distinguendo cosa succede per n pari e n dispari.

Soluzione

- Se n è pari:

$$a_n = \frac{n}{n+1}, \quad \text{per } n = 2, 4, 6 \dots$$

Aggiungendo $+1$ e -1 al numeratore, ottengo

$$a_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

che varia in

$$\left[\frac{2}{3}, 1\right),$$

ovvero è positiva e superiormente limitata. Quindi

$$\sup \{a_n : n \text{ è pari} \} = 1$$

ma 1 non è il massimo di questi valori.

- Se n è dispari:

$$a_n = \frac{\frac{1}{n}}{n+1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}, \quad \text{per } n = 1, 3, 5 \dots$$

che varia in

$$\left(0, \frac{1}{2}\right],$$

ovvero è positiva e inferiormente limitata. Quindi

$$\inf \{a_n : n \text{ è dispari} \} = 0$$

ma 0 non è il minimo di questi valori.

La successione, nel suo complesso, è limitata, non ammette massimo (pur avendo sup finito) né minimo (pur avendo inf finito).

Verifica di limiti di successioni

Esercizio 2.1

Utilizzando la definizione di limite, verificare che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n+5} = \frac{1}{2}$$

Soluzione

Abbiamo

$$a_n = \frac{n}{2n+5}$$

Dobbiamo verificare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che

$$n > n(\varepsilon) \Rightarrow \frac{1}{2} - \varepsilon < a_n < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

Abbiamo

$$a_n - \frac{1}{2} = -\frac{5}{4n+10},$$

quindi si deve verificare che

$$n > n(\varepsilon) \Rightarrow -\varepsilon < -\frac{5}{4n+10} < \varepsilon$$

La seconda disuguaglianza è sempre vera mentre la prima equivale a

$$4n+10 > \frac{5}{\varepsilon} \quad \text{quindi è soddisfatta per } n > \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{5}{2}$$

Fissato $\varepsilon > 0$, basterà scegliere il primo intero

$$n(\varepsilon) > \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{5}{2}$$

per soddisfare la condizione richiesta dalla definizione di limite.

Esercizio 2.2

Utilizzando la definizione di limite, verificare che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$$

Soluzione

Abbiamo

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Dobbiamo verificare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che

$$n > n(\varepsilon) \Rightarrow -\varepsilon < a_n < \varepsilon$$

La prima disuguaglianza è sempre vera mentre la seconda equivale a

$$\sqrt{n+1} > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{quindi è soddisfatta per } n > \frac{1}{\varepsilon^2} - 1$$

Fissato $\varepsilon > 0$, basterà scegliere il primo intero

$$n(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon^2} - 1$$

per soddisfare la condizione richiesta dalla definizione di limite.

Esercizio 2.3

Utilizzando la definizione di limite, verificare che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 0$$

Soluzione

Abbiamo

$$a_n = \log \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

Dobbiamo verificare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che

$$n > n(\varepsilon) \Rightarrow -\varepsilon < a_n < \varepsilon$$

La prima disuguaglianza è sempre vera mentre la seconda equivale a

$$1 + \frac{1}{n} < e^\varepsilon \quad \text{quindi è soddisfatta per } n > \frac{1}{e^\varepsilon - 1}$$

Fissato $\varepsilon > 0$, basterà scegliere il primo intero

$$n(\varepsilon) > \frac{1}{e^\varepsilon - 1}$$

per soddisfare la condizione richiesta dalla definizione di limite.

Esercizio 2.4

Utilizzando la definizione di limite, verificare che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{4 + \frac{1}{n}} = 2$$

Soluzione

Abbiamo

$$a_n = \sqrt{4 + \frac{1}{n}}$$

Dobbiamo verificare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che

$$n > n(\varepsilon) \Rightarrow 2 - \varepsilon < a_n < 2 + \varepsilon$$

La prima disuguaglianza è sempre vera dato che $a_n > 2$ per ogni n , mentre la seconda equivale a

$$4 + \frac{1}{n} < 4 + \varepsilon^2 + 4\varepsilon \quad \text{quindi è soddisfatta per } n > \frac{1}{\varepsilon^2 + 4\varepsilon}$$

Fissato $\varepsilon > 0$, basterà scegliere il primo intero

$$n(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon^2 + 4\varepsilon}$$

per soddisfare la condizione richiesta dalla definizione di limite.

Esercizio 2.5

Utilizzando la definizione di limite, verificare che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 1) = +\infty$$

Soluzione

Abbiamo

$$a_n = n^2 - 1$$

Dobbiamo verificare che per ogni $M > 0$ esiste $n(M) \in \mathbb{N}$ tale che

$$n > n(M) \Rightarrow a_n > M$$

La disuguaglianza

$$n^2 - 1 > M \quad \text{è soddisfatta per } n > \sqrt{M+1}$$

Fissato $M > 0$, quindi basterà scegliere il primo intero

$$n(M) > \sqrt{M+1}$$

per soddisfare la condizione richiesta di divergenza.

Esercizio 2.6

Utilizzando la definizione di limite, verificare che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \log(\sqrt{n} + 1) = +\infty$$

Soluzione

Abbiamo

$$a_n = \log(\sqrt{n} + 1)$$

Dobbiamo verificare che per ogni $M > 0$ esiste $n(M) \in \mathbb{N}$ tale che

$$n > n(M) \Rightarrow a_n > M$$

La disuguaglianza

$$\log(\sqrt{n} + 1) > M \quad \text{è soddisfatta per } n > (e^M - 1)^2$$

Fissato $M > 0$, quindi basterà scegliere il primo intero

$$n(M) > (e^M - 1)^2$$

per soddisfare la condizione richiesta di divergenza.

Calcolo limiti di successioni

3.1 Calcolo dei limiti con tecniche di base

Se:

$$a_n \rightarrow \ell_a \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad b_n \rightarrow \ell_b \in \mathbb{R},$$

abbiamo:

$$a_n \pm b_n \rightarrow \ell_a \pm \ell_b, \quad \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{\ell_a}{\ell_b} \quad (b_n, \ell_b \neq 0, \text{ definitivamente}),$$

$$a_n b_n \rightarrow \ell_a \ell_b, \quad a_n^{b_n} \rightarrow \ell_a^{\ell_b} \quad (a_n, \ell_a > 0, \text{ definitivamente}).$$

Se:

$$a_n \rightarrow \ell_a \in \mathbb{R}, \quad b_n \rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad c_n \rightarrow +\infty,$$

abbiamo:

$$a_n + b_n \rightarrow \ell_a + \infty = +\infty, \quad a_n - b_n \rightarrow \ell_a - \infty = -\infty,$$

$$b_n + c_n \rightarrow +\infty + \infty = +\infty, \quad -b_n - c_n \rightarrow -\infty - \infty = -\infty.$$

Se:

$$a_n \rightarrow \ell_a \in \mathbb{R}, \quad b_n \rightarrow 0^+ \text{ oppure } b_n \rightarrow 0^- \quad \text{e} \quad c_n \rightarrow \infty,$$

abbiamo:

$$a_n c_n \rightarrow \ell_a \infty = \infty \quad (\ell_a \neq 0), \quad \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{\ell_a}{0} = \infty \quad (\ell_a \neq 0), \quad \frac{a_n}{c_n} \rightarrow \frac{\ell_a}{\infty} = 0.$$

L'ipotesi che $\{b_n\}$ tenda a zero per eccesso o per difetto (e quindi che sia definitivamente di segno costante, con $b_n \neq 0$) è necessaria: con $a_n = 1$ e $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$ si ha $\frac{a_n}{b_n} = (-1)^n n$, che è irregolare.

Le quattro principali forme di indecisione sono:

$$[+\infty - \infty], \quad [0 \cdot \infty], \quad \left[\frac{0}{0} \right] \quad \text{e} \quad \left[\frac{\infty}{\infty} \right].$$

Si hanno anche altre tre forme di indecisione derivanti da $[0 \cdot \infty]$:

$$[1^\infty], \quad [0^0] \quad \text{e} \quad [\infty^0].$$

Abbiamo:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } |a| < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } a \leq -1 \end{cases}$$

Esercizio 3.1

Calcolare il seguente limite che si presenta in forma indeterminata (elementare):

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 2n}{n + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

Soluzione

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 2n}{n + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\overbrace{n^2}^{\rightarrow 1} \left(1 + \overbrace{\frac{2}{n}}^{\rightarrow 0} \right)}{\underbrace{n}_{\rightarrow 1} \left(1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\rightarrow 0} \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty.$$

Esercizio 3.2

Calcolare il seguente limite che si presenta in forma indeterminata (elementare):

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4 + 5}{n^5 + 7n - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

Soluzione

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4 + 5}{n^5 + 7n - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4 \left(1 + \frac{5}{n^4}\right)}{n^5 \left(1 + \frac{7}{n^4} - \frac{1}{n^5}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4}{n^5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Esercizio 3.3

Calcolare il seguente limite che si presenta in forma indeterminata (elementare):

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - n^2}{(n + 2)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

Soluzione

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - n^2}{(n + 2)^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n^2 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{4}{n} + \frac{4}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n^2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -1 = -1.$$

Esercizio 3.4

Calcolare il seguente limite che si presenta in forma indeterminata (elementare):

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n} = [+ \infty - \infty]$$

Soluzione

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\underbrace{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}_{\substack{\rightarrow 0 \\ \rightarrow 1}} - \underbrace{\sqrt{\frac{1}{n}}}_{\rightarrow 0} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty.$$

Soluzione

Metodo alternativo: moltiplicando e dividendo per $\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n}$ otteniamo

$$\frac{(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n})(\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n}} = \frac{(\sqrt{n^2 + 1})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n}} = \frac{n^2 + 1 - n}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n}},$$

ricordando che $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$. Abbiamo inoltre

$$\frac{n^2 + 1 - n}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n}} = \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} + \sqrt{n}} = \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}\right)}{n \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} + n^{\frac{1}{2}}} = \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}\right)}{n \left(\sqrt{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} + \frac{1}{n^{1/2}}\right)}.$$

Quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \frac{\overbrace{\left(1 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}\right)}^{\rightarrow 1}}{\underbrace{\left(\sqrt{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} + \frac{1}{n^{1/2}}\right)}_{\rightarrow 1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty.$$

Esercizio 3.5

Calcolare il seguente limite che si presenta in forma indeterminata (elementare):

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n - 2^n = [+ \infty - \infty]$$

Soluzione

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n - 2^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^n \underbrace{\left(1 - \underbrace{\left(\frac{2}{e}\right)^n}_{\rightarrow 0}\right)}_{\rightarrow 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$$

in quanto

$$e^n \rightarrow +\infty \text{ e } \left(\frac{2}{e}\right)^n \rightarrow 0.$$

Esercizio 3.6

Calcolare il seguente limite che si presenta in forma indeterminata (elementare):

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n + 4^n - 5^n = [+ \infty + \infty - \infty] = [+ \infty - \infty]$$

Soluzione

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n + 4^n - 5^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -5^n \underbrace{\left(1 - \underbrace{\left(\frac{3}{5}\right)^n}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\left(\frac{4}{5}\right)^n}_{\rightarrow 0} \right)}_{\rightarrow 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -5^n = -\infty$$

in quanto

$$-5^n \rightarrow -\infty, \quad \left(\frac{3}{5}\right)^n \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \left(\frac{4}{5}\right)^n \rightarrow 0.$$

Esercizio 3.7

Calcolare il seguente limite semplice

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\sqrt{2}}$$

Soluzione

Per ogni $\alpha > 0$, anche irrazionale, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty$.

Esercizio 3.8

Calcolare il seguente limite semplice

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-e}$$

Soluzione

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-e} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^e} = 0.$$

Esercizio 3.9

Calcolare il seguente limite semplice

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n+5}{n^2+120} \right)^{2n}$$

Soluzione

Abbiamo

$$\frac{3n+5}{n^2+120} = \frac{3n\left(1+\frac{5}{3n}\right)}{n^2\left(1+\frac{120}{n^2}\right)} = \frac{3}{n} \frac{\left(1+\frac{5}{3n}\right)}{\left(1+\frac{120}{n^2}\right)} \rightarrow 0 \text{ e } 2n \rightarrow +\infty.$$

Quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n+5}{n^2+120} \right)^{2n} = 0^{+\infty} = 0.$$

Esercizio 3.10

Calcolare il seguente limite semplice

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{10n^2 - 5n}{n^3 - 8} \right)^{-3n+8}$$

Soluzione

Abbiamo

$$\frac{10n^2 - 5n}{n^3 - 8} = \frac{10n^2\left(1 - \frac{5}{10n}\right)}{n^3\left(1 - \frac{8}{n^3}\right)} = \frac{10}{n} \frac{\left(1 - \frac{5}{10n}\right)}{\left(1 - \frac{8}{n^3}\right)} \rightarrow 0 \text{ e } -3n+8 \rightarrow -\infty.$$

Quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{10n^2 - 5n}{n^3 - 8} \right)^{-3n+8} = 0^{-\infty} = \frac{1}{0^{+\infty}} = \frac{1}{0} = +\infty.$$

3.2 Calcolo dei limiti usando la gerarchia degli infiniti

Per ogni $a > 1$ e $\alpha > 0$ abbiamo:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_a n}{n^\alpha} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Quindi i seguenti infiniti, sono elencati in ordine crescente:

$$\log n, \quad n^\alpha, \quad a^n, \quad n!, \quad n^n.$$

Esercizio 3.11

Calcolare il limite della seguente successione se esiste

$$a_n = \frac{2^{1/n} + n^2 + 3^{-n}}{\log^6 n + 2 + n}$$

Soluzione

Consideriamo il numeratore, abbiamo:

$$2^{1/n} \rightarrow 1, \quad n^2 \rightarrow +\infty, \quad 3^{-n} \rightarrow 0$$

La potenza di n di grado maggiore è n^2 e inoltre abbiamo

$$\frac{3^{-n}}{n^2} = \frac{1}{3^n n^2} \quad \text{quindi} \quad \frac{3^{-n}}{n^2} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \frac{2^{1/n}}{n^2} \rightarrow 0.$$

Consideriamo il denominatore, abbiamo:

$$\log^6 n \rightarrow +\infty, \quad 2 \rightarrow 2, \quad n \rightarrow +\infty$$

Per il teorema della gerarchia degli infiniti, abbiamo

$$\frac{\log^6 n}{n} = \left(\underbrace{\frac{\log n}{n^{1/6}}}_{\rightarrow 0} \right)^6 \rightarrow 0.$$

Raccogliamo quindi n^2 al numeratore e n al denominatore e otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{n^2 \left(1 + \frac{2^{1/n}}{n^2} + \frac{3^{-n}}{n^2} \right)}{n \left(1 + \frac{\log^6 n}{n} + \frac{2}{n} \right)} &= n \frac{\left(1 + \frac{\overbrace{2^{1/n}}^{\rightarrow 0}}{n^2} + \frac{\overbrace{3^{-n}}^{\rightarrow 0}}{n^2} \right)}{\left(1 + \underbrace{\frac{\log^6 n}{n}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{2}{n}}_{\rightarrow 0} \right)} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{1/n} + n^2 + 3^{-n}}{\log^6 n + 2 + n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n \frac{\overbrace{\left(1 + \frac{2^{1/n}}{n^2} + \frac{3^{-n}}{n^2} \right)}^{\rightarrow 1}}{\left(1 + \frac{\log^6 n}{n} + \frac{2}{n} \right)} = +\infty \end{aligned}$$

Esercizio 3.12

Calcolare il limite della seguente successione se esiste

$$a_n = \frac{3n^3 + 3^n + \log n}{\log^6 n + 2^{2n} + n^5}$$

Soluzione

Consideriamo il numeratore, abbiamo:

$$3n^3 \rightarrow +\infty, \quad 3^n \rightarrow +\infty, \quad \log n \rightarrow +\infty$$

ovvero una somma di successioni infinite. Abbiamo anche:

$$\frac{3n^3}{3^n} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \frac{\log n}{3^n} \rightarrow 0,$$

per il teorema della gerarchia degli infiniti. Quindi la parte principale è 3^n . Consideriamo il denominatore, abbiamo:

$$\log^6 n \rightarrow +\infty, \quad 2^{2n} = 4^n \rightarrow +\infty, \quad n^5 \rightarrow +\infty$$

ovvero una somma di successioni infinite. Abbiamo anche:

$$\frac{\log^6 n}{4^n} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \frac{n^5}{4^n} \rightarrow 0,$$

per il teorema della gerarchia degli infiniti. Quindi la parte principale è 4^n .

Raccogliamo quindi 3^n al numeratore e 4^n al denominatore e otteniamo:

$$\frac{3^n \left(1 + \frac{3n^3}{3^n} + \frac{\log n}{3^n} \right)}{4^n \left(1 + \frac{\log^6 n}{4^n} + \frac{n^5}{4^n} \right)} = \left(\frac{3}{4} \right)^n \frac{\left(1 + \overbrace{\frac{3n^3}{3^n}}^{\rightarrow 0} + \overbrace{\frac{\log n}{3^n}}^{\rightarrow 0} \right)}{\left(1 + \underbrace{\frac{\log^6 n}{4^n}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{n^5}{4^n}}_{\rightarrow 0} \right)}$$

quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^3 + 3^n + \log n}{\log^6 n + 2^{2n} + n^5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n \underbrace{\frac{\left(1 + \frac{3n^3}{3^n} + \frac{\log n}{3^n} \right)}{\left(1 + \frac{\log^6 n}{4^n} + \frac{n^5}{4^n} \right)}}_{\rightarrow 1} = 0$$

Esercizio 3.13

Calcolare il seguente limite semplice

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^2}$$

Soluzione

Abbiamo

$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\log n^{1/n}} = e^{\frac{\log n}{n}}$$

e studiando la successione all'esponente

$$a_n = \frac{\log n}{n} \quad \text{abbiamo} \quad a_n \rightarrow 0$$

grazie al teorema della gerarchia degli infiniti. Quindi abbiamo :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{\log n}{n}} = 1.$$

Di conseguenza

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{n})^2 = 1^2 = 1.$$

3.3 Calcolo dei limiti usando stime asintotiche

Abbiamo $a_n \sim b_n$ se $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$ oppure se $a_n = b_n c_n$ con $c_n \rightarrow 1$.

Inoltre abbiamo $a_n + b_n \sim a_n$ se $\frac{b_n}{a_n} \rightarrow 0$

Esercizio 3.14

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n + n^2 + 1}{5^n + 2^n + n}$$

Soluzione

Abbiamo

$$2^n + n^2 + 1 \sim 2^n \text{ dato che } \frac{n^2}{2^n} \rightarrow 0 \text{ e } \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$$

e

$$5^n + 2^n + n \sim 5^n \text{ dato che } \frac{2^n}{5^n} = \left(\frac{2}{5}\right)^n \rightarrow 0 \text{ e } \frac{n}{5^n} \rightarrow 0$$

quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n + n^2 + 1}{5^n + 2^n + n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{5^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$$

Esercizio 3.15

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! - 5^n}{7^n}$$

Soluzione

Abbiamo

$$n! - 5^n \sim n! \text{ dato che } \frac{5^n}{n!} \rightarrow 0$$

quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! - 5^n}{7^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{7^n} = +\infty$$

Esercizio 3.16

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{3n-1} - n^2}{(2n)! - 5^n}$$

Soluzione

Abbiamo

$$2^{3n-1} - n^2 \sim 2^{3n-1} \quad \text{dato che} \quad -\frac{n^2}{2^{3n-1}} \rightarrow 0$$

e

$$(2n)! - 5^n \sim (2n)! \quad \text{dato che} \quad -\frac{5^n}{(2n)!} \rightarrow 0$$

quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{3n-1} - n^2}{(2n)! - 5^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{3n-1}}{(2n)!} = 0$$

Esercizio 3.17

Calcolare il limite della seguente successione, se esiste

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{n! n^{1/n}}$$

Soluzione

Abbiamo

$$n! n^{1/n} \sim n! \quad \text{dato che} \quad n^{1/n} = \sqrt[n]{n} \rightarrow 1$$

perché

$$n^{1/n} = e^{\log n^{1/n}} = e^{\frac{\log n}{n}} \quad \text{e} \quad \frac{\log n}{n} \rightarrow 0.$$

Quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{n! n^{1/n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{n!} = 0.$$

Esercizio 3.18

Calcolare il limite della seguente successione, se esiste

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + e^n)}{\sqrt{1 + n^2}}$$

Soluzione

Osservando che

$$\log(1 + e^n) \sim \log(e^n) = n \log e = n$$

si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + e^n)}{\sqrt{1 + n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{1 + n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n^2}{1 + n^2}} = 1$$

perché

$$\frac{n^2}{1 + n^2} \rightarrow 1.$$

Esercizio 3.19

Calcolare il limite della seguente successione, se esiste

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + 1}{\log_2(3 + n^n)}$$

Soluzione

Osservando che

$$\log_2(3 + n^n) \sim \log_2(n^n) = n \log_2 n$$

si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + 1}{\log_2(3 + n^n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + 1}{n \log_2 n} = 0$$

perché

$$\frac{n + 1}{n} \rightarrow 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{\log_2 n} \rightarrow 0.$$

3.4 Calcolo dei limiti con la successione convergente al numero di Nepero

Per forme indeterminate $1^{\pm\infty}$, si può usare:

$$\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \rightarrow e \quad \text{per } a_n \rightarrow \pm\infty.$$

Esercizio 3.20

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n-1}{n-3} \right)^n$$

Soluzione

Abbiamo

$$\left(\frac{n-1}{n-3} \right)^n = \left(\frac{n-3-1+3}{n-3} \right)^n = \left(1 + \frac{2}{n-3} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{\frac{n-3}{2}} \right)^n$$

quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n-1}{n-3} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n-3}{2}} \right)^{\frac{n-3}{2}} \right]^{\frac{2n}{n-3}} = e^2,$$

dato che

$$\left(1 + \frac{1}{\frac{n-3}{2}} \right)^{\frac{n-3}{2}} \rightarrow e, \quad 2 \left(\frac{n}{n-3} \right) = 2 \left(\frac{n-3+3}{n-3} \right) = 2 \left(1 + \underbrace{\frac{3}{n-3}}_{\rightarrow 0} \right) \rightarrow 2$$

e

$$\frac{n-3}{2} \rightarrow +\infty.$$

Esercizio 3.21

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2} \right)^n$$

Soluzione

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{n^2} \right]^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1$$

dato che

$$\left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{n^2} \rightarrow e, \quad \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

e

$$n^2 \rightarrow +\infty.$$

Esercizio 3.22

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n-5}{2n} \right)^{-n}$$

Soluzione

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n-5}{2n} \right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-\frac{2n}{5}} \right)^{-\frac{2n}{5}} \right]^{\frac{5}{2}} = \sqrt{e^5}.$$

dato che

$$\left(1 + \frac{1}{-\frac{2n}{5}} \right)^{-\frac{2n}{5}} \rightarrow e \quad \text{e} \quad -\frac{2n}{5} \rightarrow -\infty.$$

Esercizio 3.23

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{n-1}}{(n-1)^n}$$

Soluzione

Abbiamo

$$\frac{n^{n-1}}{(n-1)^n} = \frac{1}{n} \left(\frac{n}{n-1} \right)^n = \frac{1}{n} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{-n} = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{-n} \right)^{-n}$$

quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{n-1}}{(n-1)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{-n} \right)^{-n} = 0$$

dato che

$$\left(1 + \frac{1}{-n} \right)^{-n} \rightarrow e \quad \text{e} \quad \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Esercizio 3.24

Calcolare il limite della seguente successione, se esiste

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2+2}{n^2+n+1} \right)^{2n}$$

Soluzione

Dato che

$$\left(\frac{n^2 + 2}{n^2 + n + 1} \right) \rightarrow 1 \text{ e } 2n \rightarrow +\infty$$

abbiamo la forma indeterminata del tipo $[1^{+\infty}]$.

Dato che

$$\left(\frac{n^2 + 2}{n^2 + n + 1} \right)^{2n} = \left(\frac{n^2 + n + 1 - n + 1}{n^2 + n + 1} \right)^{2n} = \left(1 + \frac{-n + 1}{n^2 + n + 1} \right)^{2n},$$

possiamo quindi scrivere

$$\left(1 + \frac{-n + 1}{n^2 + n + 1} \right)^{2n} = \left(1 + \frac{1}{\frac{n^2 + n + 1}{-n + 1}} \right)^{2n} = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n^2 + n + 1}{-n + 1}} \right)^{\frac{n^2 + n + 1}{-n + 1}} \right]^{\left(\frac{-n + 1}{n^2 + n + 1} \right) 2n}.$$

Quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2 + 2}{n^2 + n + 1} \right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n^2 + n + 1}{-n + 1}} \right)^{\frac{n^2 + n + 1}{-n + 1}} \right]^{\left(\frac{-n + 1}{n^2 + n + 1} \right) 2n} = e^{-2},$$

dato che

$$\left(1 + \frac{1}{\frac{n^2 + n + 1}{-n + 1}} \right)^{\frac{n^2 + n + 1}{-n + 1}} \rightarrow e, \quad \left(\frac{-n + 1}{n^2 + n + 1} \right) 2n = \left(\frac{\overbrace{-2n^2 + 2n}^{\sim -2n^2}}{\underbrace{n^2 + n + 1}_{\sim n^2}} \right) \rightarrow -2$$

e

$$\frac{n^2 + n + 1}{-n + 1} = \frac{\overbrace{n^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}^{\rightarrow 1}}{\underbrace{-n \left(1 - \frac{1}{n} \right)}_{\rightarrow 1}} \rightarrow -\infty.$$

3.5 Calcolo dei limiti col teorema del confronto

- Se $c_n \rightarrow 0$ e $|b_n| \leq c_n$, definitivamente allora $b_n \rightarrow 0$.
- Se $c_n \rightarrow 0$ e b_n è limitata (anche non convergente) allora $c_n b_n \rightarrow 0$. Il prodotto di una successione infinitesima e una limitata è infinitesimo.
- Una somma di infiniti e di successioni limitate è equivalente all'infinito di ordine superiore.

Esercizio 3.25

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + \sin n}{\cos n + \log n}$$

Soluzione

Abbiamo

$$n + \sin n \sim n \quad \text{dato che} \quad \frac{\sin n}{n} \rightarrow 0$$

prodotto fra una successione infinitesima $\{\frac{1}{n}\}$ e una limitata $\{\sin n\}$. Inoltre

$$\cos n + \log n \sim \log n \quad \text{dato che} \quad \frac{\cos n}{\log n} \rightarrow 0$$

prodotto fra una successione infinitesima $\{\frac{1}{\log n}\}$ e una limitata $\{\cos n\}$. Quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + \sin n}{\cos n + \log n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\log n} = +\infty$$

Esercizio 3.26

Calcolare il limite della seguente successione, se esiste

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \sin n + \sin n^2}{n^2 + 1}$$

Soluzione

Abbiamo

$$\frac{n \sin n + \sin n^2}{n^2 + 1} = \frac{n \sin n}{n^2 + 1} + \frac{\sin n^2}{n^2 + 1}$$

e

$$\frac{n}{n^2 + 1} \sin n \rightarrow 0 \quad \text{dato che} \quad \frac{n}{n^2 + 1} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \sin n \quad \text{è limitata.}$$

Inoltre

$$\frac{1}{n^2 + 1} \sin n^2 \rightarrow 0 \quad \text{dato che} \quad \frac{1}{n^2 + 1} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \sin n^2 \quad \text{è limitata.}$$

Quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \sin n + \sin n^2}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{n \sin n}{n^2 + 1}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{\sin n^2}{n^2 + 1}}_{\rightarrow 0} = 0$$

Soluzione

Metodo alternativo.

Notiamo che le successioni $\{\sin n\}$ $\{\sin n^2\}$ sono irregolari ma limitate. Quindi possiamo scrivere la seguente maggiorazione

$$\left| \frac{n \sin n + \sin n^2}{n^2 + 1} \right| \leq \frac{n + 1}{n^2 + 1}$$

e abbiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + 1}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Quindi per il teorema del confronto abbiamo:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \sin n + \sin n^2}{n^2 + 1} = 0$$

3.6 Calcolo dei limiti col teorema del rapporto

Data una successione positiva ($a_n > 0$ per ogni n):

se esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ e $\ell < 1$, allora $a_n \rightarrow 0$,

se esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ e $\ell > 1$ (o $\ell = +\infty$), allora $a_n \rightarrow +\infty$.

Esercizio 3.27

Calcolare il limite della seguente successione, se esiste

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n-1}}{n(n+1)!}$$

Soluzione

Trattandosi di una successione a termini positivi il cui termine generale è il rapporto di successioni più semplici di tipo esponenziale e fattoriale, è naturale applicare il criterio del rapporto.

Calcoliamo quindi:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{3^n}{(n+1) \cdot (n+2)!}}{\frac{3^{n-1}}{n(n+1)!}} = \frac{3^n}{(n+1) \cdot \underbrace{(n+2)!}_{=(n+1)! \cdot (n+2)}} \cdot \frac{n(n+1)!}{3^{n-1}} =$$

$$= \frac{3n}{(n+1)(n+2)} = \frac{3n}{n^2 + 2n + n + 2} = \frac{3n}{n^2 \left(1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right)} = \frac{3}{n \left(1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}$$

Abbiamo:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n \left(1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right)} = 0$$

Quindi per il teorema del rapporto:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n-1}}{n(n+1)!} = 0$$

Esercizio 3.28

Calcolare il limite della seguente successione, se esiste

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 2^n}{n!}$$

Soluzione

Abbiamo una successione positiva, calcoliamo:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^3 2^{(n+1)}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^3 2^n} = \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^3}_{\rightarrow 1} \frac{2}{n+1} \sim \frac{2}{n+1}$$

Abbiamo quindi:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n+1} = 0$$

Allora per il teorema del rapporto:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 2^n}{n!} = 0$$

Esercizio 3.29

Calcolare il limite della seguente successione, se esiste

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{(n+1)!}$$

Soluzione

Abbiamo una successione positiva, calcoliamo:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1} (n+1)!}{(n+2)! n^n} = \underbrace{\frac{n+1}{n+2}}_{\rightarrow 1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \sim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Abbiamo quindi:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1$$

Allora per il teorema del rapporto:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{(n+1)!} = +\infty$$

Esercizio 3.30

Calcolare il limite della seguente successione, se esiste

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\frac{1}{n}} 2^n}{(n+1)!}$$

Soluzione

Abbiamo:

$$\frac{\underbrace{n^{\frac{1}{n}}}_{\rightarrow 1} 2^n}{(n+1)!} \sim \frac{2^n}{(n+1)!} \equiv b_n$$

Abbiamo ora la successione positiva $\{b_n\}$, calcoliamo:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+2)!} \frac{(n+1)!}{2^n} = \frac{2}{n+2}$$

Abbiamo quindi:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n+2} = 0$$

Allora per il teorema del rapporto:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\frac{1}{n}} 2^n}{(n+1)!} = 0$$

3.7 Discussione al variare di un parametro

Esercizio 3.31

Calcolare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il limite di successione

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5^{3\alpha n}}{2^{3n+1}}$$

Soluzione

Abbiamo

$$\frac{5^{3\alpha n}}{2^{3n+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{5^\alpha}{2} \right)^{3n}$$

quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5^{3\alpha n}}{2^{3n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{5^\alpha}{2} \right)^{3n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5^\alpha}{2} \right)^{3n} = \ell$$

A questo punto, è possibile studiare tre casi:

- *Caso 1*

$$\frac{5^\alpha}{2} > 1 \iff \alpha > \log_5 2$$

allora $\ell = +\infty$;

- *Caso 2*

$$0 < \frac{5^\alpha}{2} < 1 \iff \alpha < \log_5 2$$

allora $\ell = 0$;

- *Caso 3*

$$\frac{5^\alpha}{2} = 1 \iff \alpha = \log_5 2$$

allora $\ell = \frac{1}{2}$.

In definitiva:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5^{3\alpha n}}{2^{3n+1}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > \log_5 2 \\ \frac{1}{2} & \text{se } \alpha = \log_5 2 \\ 0 & \text{se } \alpha < \log_5 2 \end{cases}$$

Esercizio 3.32

Calcolare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il limite di successione

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{(2-\alpha)n} + 1) \log \left(1 + \frac{1}{e^n} \right)$$

Soluzione

Abbiamo

$$\begin{aligned} a_n &= (e^{(2-\alpha)n} + 1) \log \left(1 + \frac{1}{e^n} \right) = (e^{(2-\alpha)n} + 1) \frac{e^n}{e^n} \log \left(1 + \frac{1}{e^n} \right) \\ &= (e^{(2-\alpha)n} + 1) \frac{1}{e^n} \log \left(1 + \frac{1}{e^n} \right)^{e^n} \\ &\sim (e^{(2-\alpha)n} + 1) \frac{1}{e^n} \end{aligned}$$

in quanto

$$\left(1 + \frac{1}{e^n} \right)^{e^n} \rightarrow e \quad \text{e} \quad \log \left(1 + \frac{1}{e^n} \right)^{e^n} \rightarrow 1$$

Quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{(2-\alpha)n} + 1) \frac{1}{e^n}$$

D'altronde

$$(e^{(2-\alpha)n} + 1) \frac{1}{e^n} = e^{(1-\alpha)n} + e^{-n} \rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{se } 1 - \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } 1 - \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } 1 - \alpha < 0 \end{cases}$$

Riassumendo, otteniamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{(2-\alpha)n} + 1) \log \left(1 + \frac{1}{e^n} \right) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 1 \\ 1 & \text{se } \alpha = 1 \\ 0 & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

3.8 Esercizi a risposta multipla**Esercizio 3.33**

Sia

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{3} + n}{e - 2n} \right)^n = \ell$$

(a) $\ell = 0$

- (b) $\ell = e^{(\sqrt{3}-\frac{e}{2})}$
- (c) $\ell = +\infty$
- (d) Nessuna delle altre risposte è corretta.

Soluzione

Posto

$$a_n = \frac{\sqrt{3} + n}{e - 2n}$$

abbiamo $a_n < 0$ per $n \geq 2$ e

$$|a_n|^n = \left(\frac{\sqrt{3} + n}{2n - e} \right)^n \rightarrow 0$$

in quanto $|a_n| \rightarrow 1/2$. Da $|a_n|^n \rightarrow 0$ segue $(a_n)^n \rightarrow 0$. La risposta corretta è (a).

Esercizio 3.34

Sia

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n n^\alpha \left(\frac{1+3n}{2-n} \right)^n = \ell$$

- (a) ℓ non esiste se $\alpha \geq 0$
- (b) $\ell = +\infty$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
- (c) $\ell = 0$ se $\alpha < 0$
- (d) Nessuna delle altre risposte è corretta.

Soluzione

Poniamo

$$a_n = (-1)^n \left(\frac{1+3n}{2-n} \right)^n = \left(\frac{1+3n}{n-2} \right)^n.$$

Abbiamo $a_n \rightarrow +\infty$ in quanto $(1+3n)/(n-2) \rightarrow 3$. Confrontiamo a_n con 3^n :

$$\frac{a_n}{3^n} = \left(\frac{1+3n}{3n-6} \right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{3n-6}{7}} \right)^{\frac{3n-6}{7}} \right]^{\frac{7n}{3n-6}} \rightarrow e^{7/3}$$

da cui

$$a_n \sim 3^n e^{7/3}.$$

Ne segue

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n n^\alpha \left(\frac{1+3n}{2-n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{7/3} n^\alpha 3^n = +\infty$$

anche quando $\alpha < 0$ perché 3^n è un infinito di ordine superiore ad ogni potenza di n . La risposta corretta è (b).

Esercizio 3.35

Sia

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{an + 2}{en + a} \right)^n = \ell$$

- (a) $\ell = e^{\left(\frac{2}{e}-1\right)}$ se $a = e$
- (b) $\ell = 1$ se $a \leq e$
- (c) $\ell = 0$ se $a > 0$
- (d) Nessuna delle altre risposte è corretta.

Soluzione

Posto

$$a_n = \frac{an + 2}{en + a}$$

abbiamo $a_n \rightarrow a/e$ quindi

$$(a_n)^n \rightarrow \begin{cases} +\infty, & a > e \\ 0, & 0 < a < e \end{cases}$$

dunque le risposte (b) e (c) non sono corrette. Nel caso $a = e$ abbiamo una forma indeterminata 1^∞ :

$$\left(\frac{en + 2}{en + e} \right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{en+e}{2-e}} \right)^{\frac{en+e}{2-e}} \right]^{\frac{(2-e)n}{en+e}} \rightarrow e^{-1+\frac{2}{e}}.$$

La risposta corretta è (a).

Esercizi aggiuntivi

Esercizio 4.1

Calcolare, se esiste, il limite della successione giustificando i passaggi svolti:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{-n} + 3n^3}{\log^6 n + 2 - n^5}$$

Soluzione

Esercizio 4.2

Calcolare, se esiste, il limite della successione giustificando i passaggi svolti:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n + 3n^3 \log n}{2^{1/n} + n^5}$$

Soluzione

Esercizio 4.3

Calcolare, se esiste, il limite della successione giustificando i passaggi svolti:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + \log^3 n}{n \log n + 1}$$

Soluzione

Esercizio 4.4

Calcolare, se esiste, il limite della successione giustificando i passaggi svolti:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{2+\frac{1}{n}}}{1+n^{3-\frac{2}{n}}}$$

Soluzione**Esercizio 4.5**

Calcolare, se esiste, il limite della successione giustificando i passaggi svolti:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{2n}$$

Soluzione**Esercizio 4.6**

Calcolare, se esiste, il limite della successione giustificando i passaggi svolti:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{n^2}$$

Soluzione**Esercizio 4.7**

Calcolare, se esiste, il limite della successione giustificando i passaggi svolti:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{n} \right)^{-n}$$

Soluzione

Esercizio 4.8

Calcolare, se esiste, il limite della successione giustificando i passaggi svolti:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$$

Soluzione**Esercizio 4.9**

Calcolare, se esiste, il limite della successione giustificando i passaggi svolti:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + \log(n^2) - 2^n}{(\log n)^3 + n^2}$$

Soluzione**Esercizio 4.10**

Calcolare, se esiste, il limite della successione giustificando i passaggi svolti:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8 + 2n - n^{4/3}}{n^{-1/3} + 3n - n^{5/3}}$$

Soluzione**Esercizio 4.11**

Calcolare, se esiste, il limite della successione giustificando i passaggi svolti:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\sqrt{n^2 + 3} - n \right)$$

Soluzione

Esercizio 4.12

Calcolare, se esiste, il limite della successione giustificando i passaggi svolti:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + \log(5n^3) + (\log n)^2}{2(\log n)^3 + n \log n}$$

Soluzione**Esercizio 4.13**

Calcolare, se esiste, il limite della successione giustificando i passaggi svolti:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8 + 2n^2 - n^{4/3}}{n^{-1/3} + 3n^2 - n^{5/3}}$$

Soluzione**Esercizio 4.14**

Calcolare, se esiste, il limite della successione giustificando i passaggi svolti:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{n^4 + 1} - n \sqrt{n^2 + 1} \right)$$

Soluzione**Esercizio 4.15**

Calcolare, se esiste, il limite della successione giustificando i passaggi svolti:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 3^n + 2^{-n}}{2^{2n} + (\log n)^3}$$

Soluzione

Esercizio 4.16

Calcolare, se esiste, il limite della successione giustificando i passaggi svolti:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} (\sin^2 n) \cdot \sin(n^2)$$

Soluzione**Esercizio 4.17**

Calcolare, se esiste, il limite della successione giustificando i passaggi svolti:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(\pi n)}{\pi n} + \log \left(\sin \frac{\pi}{n} \right)$$

Soluzione

Parte II

Limiti di funzioni e continuità

Limiti di funzioni reali di variabile reale

Abbiamo il seguente limite notevole:

$$\left(1 + \frac{\alpha}{\eta(x)}\right)^{\eta(x)} \rightarrow e^{\alpha} \quad \text{per } \eta(x) \rightarrow \pm\infty, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$$

Abbiamo i seguenti principali 5 limiti notevoli:

$$\frac{\sin \varepsilon(x)}{\varepsilon(x)} \rightarrow 1 \quad \text{per } \varepsilon(x) \rightarrow 0$$

$$\frac{1 - \cos \varepsilon(x)}{\varepsilon^2(x)} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{per } \varepsilon(x) \rightarrow 0$$

$$\frac{\log(1 + \varepsilon(x))}{\varepsilon(x)} \rightarrow 1 \quad \text{per } \varepsilon(x) \rightarrow 0$$

$$\frac{e^{\varepsilon(x)} - 1}{\varepsilon(x)} \rightarrow 1 \quad \text{per } \varepsilon(x) \rightarrow 0$$

$$\frac{(1 + \varepsilon(x))^{\alpha} - 1}{\varepsilon(x)} \rightarrow \alpha \quad \text{per } \varepsilon(x) \rightarrow 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$$

Abbiamo anche i seguenti limiti notevoli delle funzioni iperboliche :

$$\frac{\sinh \varepsilon(x)}{\varepsilon(x)} \rightarrow 1 \quad \text{per } \varepsilon(x) \rightarrow 0$$

$$\frac{\cosh \varepsilon(x) - 1}{\varepsilon^2(x)} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{per } \varepsilon(x) \rightarrow 0$$

Abbiamo per il teorema della gerarchia degli infiniti:

$$\varepsilon^\beta(x) [\log_a \varepsilon(x)]^\alpha \rightarrow 0 \quad \text{per } \varepsilon(x) \rightarrow 0^+, \quad \alpha, \beta > 0, \quad a > 1$$

Dai 5 principali limiti notevoli seguono le equivalenze asintotiche:

$$\sin \varepsilon(x) \sim \varepsilon(x) \quad \text{per } \varepsilon(x) \rightarrow 0$$

$$1 - \cos \varepsilon(x) \sim \frac{1}{2} \varepsilon^2(x) \quad \text{per } \varepsilon(x) \rightarrow 0$$

$$e^{\varepsilon(x)} - 1 \sim \varepsilon(x) \quad \text{per } \varepsilon(x) \rightarrow 0$$

$$\log(1 + \varepsilon(x)) \sim \varepsilon(x) \quad \text{per } \varepsilon(x) \rightarrow 0$$

$$(1 + \varepsilon(x))^\alpha - 1 \sim \alpha \varepsilon(x) \quad \text{per } \varepsilon(x) \rightarrow 0$$

Dai 5 principali limiti notevoli seguono gli sviluppi asintotici:

$$\sin \varepsilon(x) = \varepsilon(x) + o(\varepsilon(x)) \quad \text{per } \varepsilon(x) \rightarrow 0$$

$$\cos \varepsilon(x) = 1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2(x) + o(\varepsilon^2(x)) \quad \text{per } \varepsilon(x) \rightarrow 0$$

$$\log(1 + \varepsilon(x)) = \varepsilon(x) + o(\varepsilon(x)) \quad \text{per } \varepsilon(x) \rightarrow 0$$

$$e^{\varepsilon(x)} = 1 + \varepsilon(x) + o(\varepsilon(x)) \quad \text{per } \varepsilon(x) \rightarrow 0$$

$$(1 + \varepsilon(x))^\alpha = 1 + \alpha \varepsilon(x) + o(\varepsilon(x)) \quad \text{per } \varepsilon(x) \rightarrow 0$$

Dai limiti notevoli seguono anche le equivalenze asintotiche:

$$\sinh \varepsilon(x) \sim \varepsilon(x) \quad \text{per } \varepsilon(x) \rightarrow 0$$

$$\cosh \varepsilon(x) - 1 \sim \frac{1}{2} \varepsilon^2(x) \quad \text{per } \varepsilon(x) \rightarrow 0$$

Per le funzioni iperboliche abbiamo gli sviluppi asintotici:

$$\sinh \varepsilon(x) = \varepsilon(x) + o(\varepsilon(x)) \quad \text{per } \varepsilon(x) \rightarrow 0$$

$$\cosh \varepsilon(x) = 1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2(x) + o(\varepsilon^2(x)) \quad \text{per } \varepsilon(x) \rightarrow 0$$

Operazioni tra "o piccoli":

$o(1)$ indica un generico infinitesimo;

$$C \cdot o(x^n) = o(x^n);$$

$$x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n});$$

$$o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$$

$$\frac{o(x^n)}{x^m} = o(x^{n-m}) \quad (n \geq m);$$

$$o(x^n) \pm o(x^m) = o(x^M) \quad \text{dove } M = \min \{m, n\}.$$

Esercizio 1.1

Da $e^x = 1 + x + o(x)$, $x \rightarrow 0$, dedurre che

$$\sinh(x) = x + o(x), \quad x \rightarrow 0.$$

Soluzione

Per $x \rightarrow 0$, abbiamo $e^{-x} = 1 - x + o(x)$ quindi

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \left((1 + x + o(x)) - (1 - x + o(x)) \right) = x + o(x).$$

Esercizio 1.2

Utilizzando $\cosh^2 x - 1 = \sinh^2 x$ e l'esercizio precedente provare che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

e dedurre

$$\cosh x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \quad x \rightarrow 0.$$

Soluzione

Dall'esercizio precedente abbiamo $\sinh^2 x \sim x^2$ per $x \rightarrow 0$ e inoltre $\cosh 0 = 1$ quindi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} \cdot \frac{\cosh x + 1}{\cosh x + 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh^2 x - 1}{x^2} \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cosh x + 1}}_{\rightarrow \frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh^2 x}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Inoltre

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} \right) - \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1 - \frac{1}{2}x^2}{x^2} = 0$$

che significa

$$\begin{aligned} \cosh x - 1 - \frac{1}{2}x^2 &= o(x^2), \\ \cosh x &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Esercizio 1.3

Precisare l'equivalenza

$$\log(x^2 + 1) \sim 2 \log x, \quad x \rightarrow +\infty$$

dimostrando che

$$\log(x^2 + 1) = 2 \log x + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Soluzione

$$\log(x^2 + 1) = \log\left(x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right) = \log x^2 + \log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$

Ora

$$1/x^2 \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

e

$$\log(1 + y) = y + o(y) \quad \text{per } y \rightarrow 0,$$

quindi

$$\log(x^2 + 1) = 2 \log x + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Esercizio 1.4

Calcolare il seguente limite di funzioni di variabile reale:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x - \sqrt{x}$$

Soluzione

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x - \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{x} = -\infty.$$

Esercizio 1.5

Calcolare il seguente limite di funzioni di variabile reale:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x - x^2$$

Soluzione

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x - x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty.$$

Esercizio 1.6

Calcolare il seguente limite di funzioni di variabile reale:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x^2 + 1)}{2^x}$$

Soluzione

Usiamo l'equivalenza $\log(x^2 + 1) \sim 2 \log x$ per $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x^2 + 1)}{2^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \log x}{2^x} = 0.$$

Esercizio 1.7

Calcolare il seguente limite di funzioni di variabile reale:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^x$$

Soluzione

Usiamo il limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x+1} \right)^{x+1} \right]^{\frac{x}{x+1}} = e^1 = e.$$

Esercizio 1.8

Calcolare il seguente limite di funzioni di variabile reale:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\log x}$$

Soluzione

Abbiamo

$$x^{\log x} = e^{\log x^{\log x}} = e^{\log x \log x},$$

quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\log x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\overbrace{\log x}^{\rightarrow -\infty} \overbrace{\log x}^{\rightarrow -\infty}} = e^{+\infty} = +\infty.$$

Inoltre, la base x tende a 0, l'esponente $\log x$ tende a $-\infty$ quindi il limite non è in forma indeterminata:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\log x} = 0^{-\infty} = +\infty$$

Esercizio 1.9

Sia

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x (\log(x+2) - \log x) = L.$$

- (a) $L = 2$
- (b) L non esiste
- (c) $L = 1$
- (d) Nessuna delle altre risposte è corretta.

Soluzione

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x (\log(x+2) - \log x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left(1 + \frac{2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{2}{x} = 2.$$

La risposta corretta è (a).

Esercizio 1.10

Calcolare il seguente limite di quoziente utilizzando funzioni potenza equivalenti per ciascun termine:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$$

Soluzione

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Esercizio 1.11

Calcolare il seguente limite di quoziente utilizzando funzioni potenza equivalenti per ciascun termine:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$$

Soluzione

Abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{quindi} \quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2 \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Inoltre abbiamo

$$\sin x \sim x \quad \text{per } x \rightarrow 0 \quad \text{quindi} \quad (\sin x)^2 \sim x^2 \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Abbiamo allora:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 1.12

Calcolare il seguente limite di quoziente utilizzando funzioni potenza equivalenti per ciascun termine:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x}$$

Soluzione

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}$$

Esercizio 1.13

Calcolare il seguente limite di quoziente utilizzando funzioni potenza equivalenti per ciascun termine:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - e^{2x})^2}{1 - \cos 5x}$$

Soluzione

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - e^{2x})^2}{1 - \cos 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-2x)^2}{\frac{1}{2}(5x)^2} = \frac{8}{25}$$

Esercizio 1.14

Calcolare il seguente limite di quoziente utilizzando funzioni potenza equivalenti per ciascun termine:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3}{(1 - e^x)^3}$$

Soluzione

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3}{(1 - e^x)^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{(-x)^3} = -1.$$

Esercizio 1.15

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{\sqrt{\pi}}{x} \sin(x \log 7)}$$

Soluzione

Analizziamo l'esponente utilizzando l'equivalenza $\sin(x \log 7) \sim x \log 7$ per $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\pi}}{x} \sin(x \log 7) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\pi}}{x} \cdot x \log 7 = \sqrt{\pi} \log 7.$$

Il limite dato vale

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{\sqrt{\pi}}{x} \sin(x \log 7)} = 0 \cdot e^{\sqrt{\pi} \log 7} = 0 \cdot 7^{\sqrt{\pi}} = 0.$$

Esercizio 1.16

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} + \log x \right)$$

Soluzione

Utilizzando

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \log x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0,$$

abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} + \log x \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \sin x \log x}{\sin x} = +\infty$$

in quanto il numeratore $1 + \sin x \log x$ tende a 1 mentre il denominatore $\sin x$ è una funzione positiva che tende a 0.

In maniera equivalente, sempre da

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \log x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0,$$

abbiamo che $1/\sin x$ è infinito di ordine superiore rispetto a $\log x$ per $x \rightarrow 0^+$, quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} + \log x \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sin x} = +\infty.$$

Dimostriamo anche che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0$$

Facciamo un cambio di variabile $x = \frac{1}{y}$ quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} \log \frac{1}{y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-\log y}{y} = 0$$

Esercizio 1.17

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^3 - \sin x^6}{x^6}$$

Soluzione

Da

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \quad \sin x \sim x, \quad x \rightarrow 0,$$

abbiamo

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^3 - \sin x^6}{x^6} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^3}{x^6} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^6}{x^6} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{8}x^6}{x^6} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6}{x^6} = \frac{1}{8} - 1 = -\frac{7}{8}.\end{aligned}$$

In maniera equivalente, usando il calcolo dei simboli di Landau, da

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \quad \sin x = x + o(x), \quad x \rightarrow 0,$$

abbiamo

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^3 - \sin x^6}{x^6} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{8}x^6 - x^6 + o(x^6)}{x^6} = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{7}{8}x^6 + o(x^6)}{x^6} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{7}{8}x^6}{x^6} = -\frac{7}{8}.\end{aligned}$$

Esercizio 1.18

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8(1 - \cos x)^3 - \sin x^6}{x^6}$$

Soluzione

Da

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \quad \sin x \sim x, \quad x \rightarrow 0,$$

abbiamo

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8(1 - \cos x)^3 - \sin x^6}{x^6} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8(1 - \cos x)^3}{x^6} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^6}{x^6} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6}{x^6} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6}{x^6} = 1 - 1 = 0.\end{aligned}$$

In maniera equivalente, usando il calcolo dei simboli di Landau, da

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \quad \sin x = x + o(x), \quad x \rightarrow 0,$$

abbiamo

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8(1 - \cos x)^3 - \sin x^6}{x^6} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6 - x^6 + o(x^6)}{x^6} = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^6)}{x^6} &= 0\end{aligned}$$

in quanto il numeratore $o(x^6)$, per definizione stessa del simbolo di Landau, è infinitesimo di ordine superiore al denominatore x^6 .

Abbiamo gli sviluppi asintotici per $x \rightarrow 0$:

$$\sin x = x + o(x), \quad \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \quad e^x = 1 + x + o(x),$$

$$\sinh x = x + o(x), \quad \cosh x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

Esercizio 1.19

Calcolare i seguenti limiti utilizzando il confronto tra infinitesimi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)^2 + x}{x^3 - \sin x}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)^2 + x}{x^3 - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + o(x))^2 + x}{x^3 - x + o(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + o(x^2) + x}{x^3 - x + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + o(x)}{-x + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{-x} = -1. \end{aligned}$$

Esercizio 1.20

Calcolare i seguenti limiti utilizzando il confronto tra infinitesimi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|1 - \cos x + \sin x|}{(e^x - 1)^2}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|1 - \cos x + \sin x|}{(e^x - 1)^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\frac{1}{2}x^2 + o(x^2) + x + o(x)|}{(x + o(x))^2} = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x + o(x)|}{x^2 + o(x^2)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty. \end{aligned}$$

Esercizio 1.21

Calcolare i seguenti limiti utilizzando il confronto tra infinitesimi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin^2 x}{e^x - 1}$$

Soluzione

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin^2 x}{e^x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + o(x) - (x + o(x))^2}{x + o(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + o(x) - x^2 + o(x^2)}{x + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + o(x)}{x + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = 2.\end{aligned}$$

Esercizio 1.22

Calcolare i seguenti limiti utilizzando il confronto tra infinitesimi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x - \sin 4x}{\cosh x - 1 + x}$$

Soluzione

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x - \sin 4x}{\cosh x - 1 + x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + o(x))^3 - 4x + o(x)}{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2) + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + o(x^3) - 4x + o(x)}{x + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4x + o(x)}{x + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4x}{x} = -4.\end{aligned}$$

Esercizio 1.23

Calcolare i seguenti limiti utilizzando il confronto tra infinitesimi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin x^2}{\sinh(2x) - \sinh(2x)^2}$$

Soluzione

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin x^2}{\sinh(2x) - \sinh(2x)^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + o(x) - x^2 + o(x^2)}{2x + o(x) - (2x + o(x))^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + o(x)}{2x + o(x) - 4x^2 + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + o(x)}{2x + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Esercizio 1.24

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\log(1 + \sqrt{x-1})}{\sqrt{x^2-1}}$$

Soluzione

Abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\log(1 + \sqrt{x-1})}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\log(1 + \sqrt{x-1})}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\log(1 + \sqrt{x-1})}{\sqrt{x-1}}.$$

Ponendo $y = \sqrt{x-1}$ il limite diventa

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+y)}{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

per il limite notevole

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1.$$

Esercizio 1.25

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 3x}{x^2 - 5x} \right)^{(x+\log x)}$$

Soluzione

Abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 3x}{x^2 - 5x} \right)^{(x+\log x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x-5} \right)^{(x+\log x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{8}{x-5} \right)^{(x+\log x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x-5}{8}} \right)^{(x+\log x)} \end{aligned}$$

Usando il limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 3x}{x^2 - 5x} \right)^{(x+\log x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x-5}{8}} \right)^{\frac{x-5}{8}} \right]^{\frac{8(x+\log x)}{x-5}} = e^8$$

in quanto

$$\frac{8(x+\log x)}{x-5} \sim \frac{8x}{x-5} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 8.$$

Esercizio 1.26

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\pi^x - e^x)}{\cos(x) - 1}$$

Soluzione

Abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\pi^x - e^x)}{\cos(x) - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\pi^x(1 - (\frac{e}{\pi})^x)}{\cos(x) - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \pi^x \frac{x(1 - (\frac{e}{\pi})^x)}{\cos(x) - 1}$$

Poiché

$$1 - \left(\frac{e}{\pi}\right)^x \sim -x \log\left(\frac{e}{\pi}\right)$$

e anche

$$\cos(x) - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$$

otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\pi^x - e^x)}{\cos(x) - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \pi^x \frac{-x^2 \log\left(\frac{e}{\pi}\right)}{-\frac{1}{2}x^2} = 2 \log\left(\frac{e}{\pi}\right).$$

Esercizio 1.27

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\ln(1-x))}{1-2^x}$$

Soluzione

Il limite è di fatto immediato se si osserva che, per $x \rightarrow 0$,

$$\ln(1-x) \sim -x$$

e anche

$$1 - 2^x \sim -x \log 2$$

ottenendo dunque

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\ln(1-x))}{1-2^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(-x)}{-x \log 2} = \frac{1}{\log 2}$$

in quanto

$$\sin(-x) \sim -x$$

Esercizio 1.28

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 \sin^2(\pi - 2 \arctan(x))}{x^2 + 3}$$

Soluzione

Ricordando che

$$\arctan(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$$

e che quindi

$$\pi - 2 \arctan(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

si può subito sfruttare la stima asintotica

$$\sin^2(\pi - 2 \arctan(x)) \sim (\pi - 2 \arctan(x))^2$$

così come

$$\frac{x^4}{x^2 + 3} \sim x^2$$

e dire che

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 \sin^2(\pi - 2 \arctan(x))}{x^2 + 3} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 (\pi - 2 \arctan(x))^2}{x^2 + 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (\pi - 2 \arctan(x))^2 \end{aligned}$$

che è ancora una forma indeterminata del tipo $[0 \cdot +\infty]$. Tuttavia, con il cambio di variabile $y = \pi - 2 \arctan(x)$ e osservando che

$$x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{2}\right) = \cot\left(\frac{y}{2}\right)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (\pi - 2 \arctan(x))^2 &= \lim_{y \rightarrow 0} y^2 \cot^2\left(\frac{y}{2}\right) \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2}{\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)} \cos^2\left(\frac{y}{2}\right) = 4. \end{aligned}$$

Esercizio 1.29

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(x^x) - \log x}{1 - \cos(x-1)}$$

Soluzione

Ricordando che

$$\log(x^x) - \log x = \log(e^{x \log x}) - \log x = x \log x - \log x = (x-1) \log x$$

si ha subito che

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(x^x) - \log x}{1 - \cos(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \log x}{1 - \cos(x-1)}$$

Ponendo, per maggior chiarezza nell'uso delle stime asintotiche, $x-1 = t$, otteniamo per sostituzione

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \log x}{1 - \cos(x-1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \log(1+t)}{1 - \cos t} = 2$$

in quanto

$$\frac{t \log(1+t)}{1 - \cos t} \sim \frac{t^2}{\frac{1}{2}t^2}$$

Esercizio 1.30

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left(\frac{3x + x^2}{1 + x + x^2} \right)$$

Soluzione

Osserviamo da subito come il limite si presenti nella forma indeterminata del tipo $[\infty \cdot 0]$, in quanto

$$\frac{3x + x^2}{1 + x + x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$$

Al fine di sciogliere l'indeterminazione, possiamo pensare di aggiungere e sottrarre 1 all'interno dell'argomento del logaritmo:

$$\log \left(\frac{3x + x^2}{1 + x + x^2} \right) = \log \left(1 + \frac{3x + x^2}{1 + x + x^2} - 1 \right)$$

A questo punto, poiché

$$\frac{3x + x^2}{1 + x + x^2} - 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

possiamo sfruttare la ben nota stima asintotica del logaritmo, valida per un certo $\varepsilon(x) \rightarrow 0$, ottenendo

$$\log \left(1 + \frac{3x + x^2}{1 + x + x^2} - 1 \right) \sim \frac{3x + x^2}{1 + x + x^2} - 1 = \frac{2x - 1}{1 + x + x^2}$$

Il limite si riduce a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{2x - 1}{1 + x + x^2} \right) = 2.$$

Esercizio 1.31

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{\sqrt{x^2+x}} - e^{\sqrt{x^2-1}} \right)$$

Soluzione

Raccogliendo $e^{\sqrt{x^2-1}}$ si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\sqrt{x^2-1}} \left(e^{\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-1}} - 1 \right).$$

Esaminiamo la forma indeterminata $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-1}$ per $x \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{x^2+x - x^2+1}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} \right)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Il limite dato vale quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\sqrt{x^2-1}} \left(e^{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-1}} - 1 \right) = (\sqrt{e} - 1) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\sqrt{x^2-1}} = +\infty.$$

In maniera equivalente, da $1/x \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$ e da

$$\sqrt{1+y} = 1 + (1/2)y + o(y)$$

per $y \rightarrow 0$, abbiamo

$$\sqrt{x^2+x} = x\sqrt{1+\frac{1}{x}} = x \left(1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) = x + \frac{1}{2} + o(1), \quad x \rightarrow +\infty,$$

dove $o(1)$ indica un generico infinitesimo, e

$$\sqrt{x^2-1} = x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = x \left(1 - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = x - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Il limite dato vale quindi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{\sqrt{x^2+x}} - e^{\sqrt{x^2-1}} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{x+1/2+o(1)} - e^{x-1/(2x)+o(1/x)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(e^{1/2+o(1)} - e^{-1/(2x)+o(1/x)} \right) = (\sqrt{e} - 1) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty. \end{aligned}$$

Abbiamo che $1/x \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$ e abbiamo gli sviluppi asintotici per $y \rightarrow 0$

$$\sin y = y + o(y), \quad \cos y = 1 - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2), \quad e^y = 1 + y + o(y), \quad \log(1+y) = y + o(y).$$

Esercizio 1.32

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x^4 \sin(1/x^4)}{x^2(1 - \cos(1/x^2))}$$

Soluzione

Abbiamo dallo sviluppo asintotico:

$$\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{x^2}\right)^2\right) = 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty.$$

Sviluppando asintoticamente il rapporto abbiamo:

- per il numeratore

$$1 + x^4 \sin\left(\frac{1}{x^4}\right) = 1 + x^4 \left(\frac{1}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) = 1 + 1 + o(1) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty;$$

- per il denominatore

$$\begin{aligned} x^2 \left[1 - \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] &= x^2 \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)\right] = \\ &= x^2 \left[\frac{1}{2} \frac{1}{x^4} - o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right] = \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} - o\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Quindi risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x^4 \sin\left(\frac{1}{x^4}\right)}{x^2 \left[1 - \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + o(1)}{\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)} = +\infty$$

dove, come sempre, $o(1)$ indica un generico infinitesimo.

Esercizio 1.33

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 e^{-1/x^4} - x^2}{\log(x^2 + 1) - 2 \log x}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 (e^{-1/x^4} - 1)}{\log(x^2 + 1) - \log x^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(-\frac{1}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)}{\log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = -1. \end{aligned}$$

Esercizio 1.34

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^4} - x^4 - 1}{x^2 \cos x - x^2}$$

Soluzione

Usiamo lo sviluppo

$$e^{-x^4} = 1 - x^4 + o(x^4) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

e l'equivalenza

$$\cos x - 1 \sim -x^2/2 \text{ per } x \rightarrow 0.$$

Quindi abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^4} - x^4 - 1}{x^2(\cos x - 1)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x^4 + o(x^4) - x^4 - 1}{x^2\left(-\frac{x^2}{2}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x^4 + o(x^4)}{-\frac{x^4}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x^4}{-\frac{x^4}{2}} = 4. \end{aligned}$$

Esercizio 1.35

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} (2 \sin^2 x)^{\frac{1}{\cos 2x}}$$

Soluzione

Utilizzando $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ e ponendo $y = 1 - 2 \sin^2 x$, si osserva che $y \rightarrow 0$ per $x \rightarrow \pi/4$ ed il limite dato vale

$$\lim_{y \rightarrow 0} (1 - y)^{\frac{1}{y}} = \lim_{y \rightarrow 0} e^{\frac{\log(1-y)}{y}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

in forza anche del limite notevole

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1 - y)}{y} = -1.$$

Esercizio 1.36

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 + x^5)^{\frac{1}{x^2 \sin 2x}} - 1}{2 \log(1 + x^3)}$$

Soluzione

Scriviamo il numeratore nella forma

$$e^{\frac{\log(1+x^5)}{x^2 \sin 2x}} - 1$$

ed analizziamo l'esponente. Per $x \rightarrow 0$ si ha

$$\frac{\log(1 + x^5)}{x^2 \sin 2x} \sim \frac{x^5}{x^2 \cdot 2x} = \frac{x^2}{2}.$$

Da questo e da $e^y - 1 \sim y$ per $y \rightarrow 0$, segue

$$e^{\frac{\log(1+x^5)}{x^2 \sin 2x}} - 1 \sim \frac{\log(1 + x^5)}{x^2 \sin 2x} \sim \frac{x^2}{2}.$$

Il limite dato vale

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1+x^5)^{\frac{1}{x^2 \sin 2x}} - 1}{2 \log(1+x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x^2}{2}}{2x^3} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Esercizio 1.37

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - x^x}{x^2}$$

Soluzione

Scritto il numeratore nella forma

$$1 - e^{x \log x},$$

l'esponente $x \log x$ tende a zero per $x \rightarrow 0^+$. Poiché $1 - e^y \sim -y$ per $y \rightarrow 0$, ne segue

$$1 - e^{x \log x} \sim -x \log x, \quad x \rightarrow 0^+.$$

Il limite dato vale

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - x^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x \log x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\log x}{x} = +\infty.$$

Esercizio 1.38

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^{x^3} - 1)}{\sqrt{1+x^3} - 1}$$

Soluzione

Abbiamo

$$\sin(e^{x^3} - 1) \sim e^{x^3} - 1 \sim x^3, \quad x \rightarrow 0^+$$

e

$$\sqrt{1+x^3} - 1 \sim \frac{1}{2}x^3, \quad x \rightarrow 0^+.$$

Il limite dato vale

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^{x^3} - 1)}{\sqrt{1+x^3} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\frac{1}{2}x^3} = 2.$$

Esercizio 1.39

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - e^x + x^\alpha}{\sin \sqrt{x}} = L$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.**Soluzione**

Abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \log x}{x^\alpha} = \begin{cases} 0, & \alpha < 1 \\ -\infty, & \alpha = 1 \end{cases}$$

quindi, per $x \rightarrow 0^+$, l'infinitesimo $x \log x$ è di ordine inferiore rispetto ad x ($x = o(x \log x)$) ma di ordine superiore ad x^α se $\alpha < 1$ ($x \log x = o(x^\alpha)$, $\alpha < 1$).

Dunque, dallo sviluppo

$$e^y = 1 + y + o(y), \quad y \rightarrow 0,$$

segue

$$\begin{aligned} x^x - e^x + x^\alpha &= e^{x \log x} - e^x + x^\alpha = \\ &= 1 + x \log x + o(x \log x) - 1 - x + o(x) + x^\alpha = \\ &= \begin{cases} x \log x + o(x \log x), & \alpha \geq 1 \\ x^\alpha + o(x^\alpha), & 0 < \alpha < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Il limite dato vale

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - e^x + x^\alpha}{\sin \sqrt{x}} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \log x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \log x = 0, & \alpha \geq 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha}{\sqrt{x}} = 0, & 1/2 < \alpha < 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1, & \alpha = 1/2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha}{\sqrt{x}} = +\infty, & 0 < \alpha < 1/2. \end{cases}$$