



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Analisi

Matematica 1

Esercizi, volume 3 — Funzioni

Gli esercizi svolti sulle funzioni, una scheda per capitolo, con la soluzione subito dopo ogni testo: insiemi di definizione e funzioni inverse. Le schede sono di Fabio Furini e Gianluca Priori; molti esercizi sono tratti da M. Bramanti, *Esercitazioni di Analisi matematica 1*, Esculapio.

Fabio Furini

fabiofurini.github.io

Dipartimento di Ingegneria informatica, automatica e gestionale — Sapienza Università di Roma

Versione online e materiale scaricabile:
fabiofurini.github.io/analisi-matematica-1/
github.com/fabiofurini/analisi-matematica-1

Anno accademico 2026–2027

Indice

1	Insiemi di definizione	2
2	Funzioni inverse	3



Insiemi di definizione

Esercizio 1.1

Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x) = \frac{\log_2(3+x)}{\sqrt[3]{x+2}}$$

si determina studiando il numeratore e il denominatore della funzione

- Il numeratore:
La funzione $\log_2 t$ è definita per $t > 0$, quindi la funzione $\log_2(3+x)$ è definita per $3+x > 0$, cioè $x > -3$.
- Il denominatore:
La funzione $\sqrt[3]{t}$ è sempre definita tuttavia essendo al denominatore non deve annullarsi.
Quindi imponiamo $\sqrt[3]{x+2} \neq 0$, cioè $x \neq -2$.

Quindi l'insieme di definizione è

$$(-3, -2) \cup (-2, +\infty)$$

Esercizio 1.2

Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x) = \sqrt{2^x - 8} \cdot \log|x-4|$$

Esercizio 1.3

Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x) = \tan(\log x)$$

Esercizio 1.4

Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x) = \log(\tan x)$$

Funzioni inverse

Una funzione $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ è **invertibile** nel dominio D se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

$$\forall x_1, x_2 \in D, \quad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$\forall x_1, x_2 \in D, \quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

$$\forall y \in f(D), \quad \exists! x \in D : y = f(x)$$

ovvero se f è **iniettiva**. Negli esercizi che seguono, per verificare l'iniettività di una funzione f sarà utilizzata prevalentemente la seconda condizione.

Data una funzione invertibile $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, la funzione che associa a ogni uscita $y \in f(D)$ l'unico ingresso $x \in D$ tale che $f(x) = y$ si chiama **funzione inversa** di f e si indica con il simbolo f^{-1} .

Si ricorda che la condizione di invertibilità equivale a richiedere che il grafico di f sia intersecato al massimo in un punto da ogni retta parallela all'asse delle ascisse.

Se una funzione $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ è strettamente crescente (decescente) in D allora è invertibile in D . Inoltre, la sua funzione inversa è strettamente crescente (decescente). In definitiva, per stabilire se una funzione $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ sia invertibile o meno in D , basta verificare una qualsiasi delle seguenti tre condizioni:

- f è **iniettiva**;
- f è **biiettiva**, in quanto ogni funzione biiettiva è sia iniettiva che suriettiva;
- f è strettamente crescente (o decrescente) in D , in quanto condizione *sufficiente* per l'iniettività.

Le relazioni tra una funzione invertibile f e la sua funzione inversa f^{-1} :

$$f : \begin{cases} y = f(x) \\ x \in D \end{cases} \quad f^{-1} : \begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in f(D) \end{cases}$$

indicano che se il punto (x_0, y_0) è sul grafico di f allora il punto (y_0, x_0) è sul grafico di f^{-1} . Essendo i punti (x_0, y_0) e (y_0, x_0) **simmetrici rispetto alla bisettrice** di equazione $y = x$, il grafico di f^{-1} si ricava da quello di f per simmetria rispetto alla bisettrice.

Esercizio 2.1

Provare che la funzione

$$f(x) = \log(2 + 3x)$$

è invertibile nel suo dominio e determinare l'espressione analitica dell'inversa f^{-1} . Specificare il dominio di f^{-1} .

Soluzione

L'insieme di definizione della funzione proposta è

$$\left(-\frac{2}{3}, +\infty\right),$$

intervallo in cui l'argomento del logaritmo è strettamente positivo. Per dimostrare che f è invertibile, basta verificare che è iniettiva, ovvero

$$\forall x_1, x_2 \in D \quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

Imporre $f(x_1) = f(x_2)$ equivale ad imporre che

$$\log(2 + 3x_1) = \log(2 + 3x_2)$$

$$2 + 3x_1 = 2 + 3x_2$$

$$3x_1 = 3x_2 \iff x_1 = x_2$$

La funzione f è iniettiva e, conseguentemente, invertibile. Cerchiamo l'espressione analitica della funzione inversa f^{-1} risolvendo, rispetto alla variabile x , l'equazione

$$\log(2 + 3x) = y.$$

che è univocamente risolta per

$$x = \frac{1}{3}(e^y - 2)$$

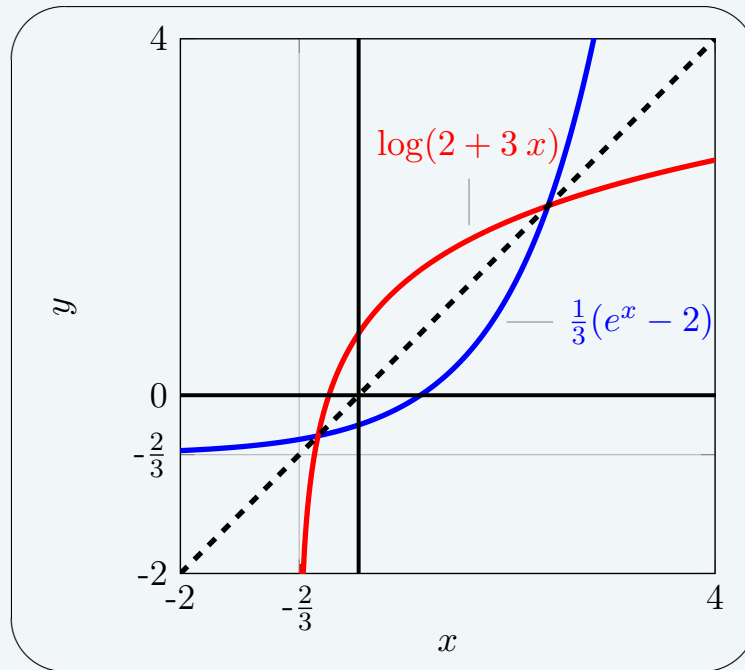
Soluzione

La funzione inversa di f è, più formalmente,

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{3}(e^y - 2)$$

il cui insieme di definizione è l'immagine della funzione di partenza f , ovvero $\mathbb{R}$. Quindi $f : (-\frac{2}{3}, +\infty) \rightarrow (-\infty, +\infty)$, mentre $f^{-1} : (-\infty, +\infty) \rightarrow (-\frac{2}{3}, +\infty)$.

I grafici $y = \log(2 + 3x)$ e $y = \frac{1}{3}(e^x - 2)$ sono simmetrici rispetto alla bisettrice $y = x$:

**Esercizio 2.2**

Provare che la funzione

$$f(x) = \sqrt{1 - 2x}$$

è invertibile nel suo dominio e determinare l'espressione analitica dell'inversa f^{-1} . Specificare il dominio di f^{-1} .

Soluzione

L'insieme di definizione della funzione proposta è

$$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right],$$

intervallo in cui il radicando è non negativo.

Soluzione

Per dimostrare che f è invertibile, basta verificare che è iniettiva, ovvero

$$\forall x_1, x_2 \in D \quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

Imporre $f(x_1) = f(x_2)$ equivale ad imporre che

$$\begin{aligned}\sqrt{1-2x_1} &= \sqrt{1-2x_2} \\ 1-2x_1 &= 1-2x_2 \\ -2x_1 &= -2x_2 \iff x_1 = x_2\end{aligned}$$

La funzione f è iniettiva e, conseguentemente, invertibile. Cerchiamo l'espressione analitica della funzione inversa f^{-1} risolvendo, rispetto alla variabile x , l'equazione

$$\sqrt{1-2x} = y.$$

che, per $y \geq 0$ (un radicale non è mai negativo in $\mathbb{R}$), è univocamente risolta da

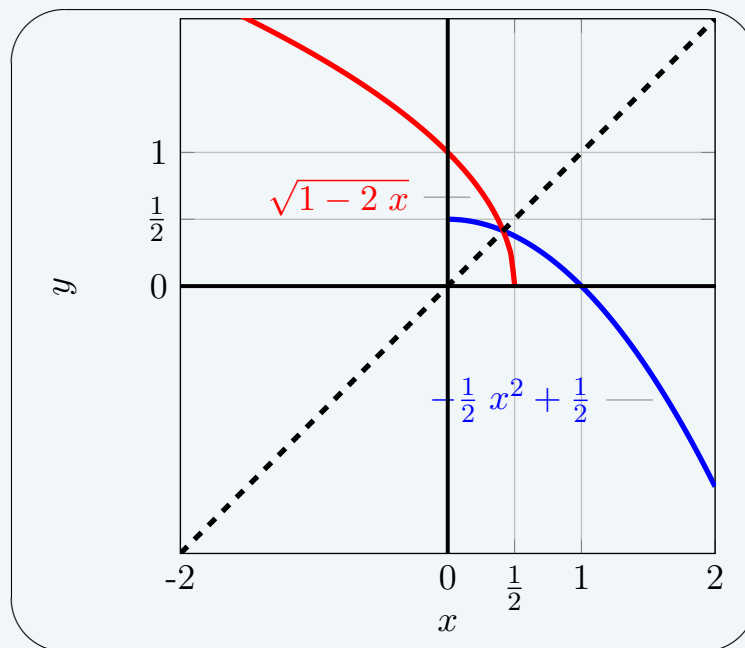
$$x = -\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}$$

La funzione inversa di f è, più formalmente,

$$f^{-1}(y) = -\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}$$

il cui insieme di definizione è l'immagine della funzione di partenza f , ovvero $[0, +\infty)$. Quindi $f : (-\infty, \frac{1}{2}] \rightarrow [0, +\infty)$, $f^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow (-\infty, \frac{1}{2}]$.

I grafici $y = \sqrt{1-2x}$ e $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ sono simmetrici rispetto alla bisettrice $y = x$:



Esercizio 2.3

Provare che la funzione

$$f(x) = e^{2x-3}$$

è invertibile nel suo dominio e determinare l'espressione analitica dell'inversa f^{-1} . Specificare il dominio di f^{-1} .

Soluzione

L'insieme di definizione della funzione proposta è

$$(-\infty, +\infty),$$

in quanto la funzione esponenziale è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Per dimostrare che f è invertibile, basta verificare che è iniettiva, ovvero

$$\forall x_1, x_2 \in D \quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

Imporre $f(x_1) = f(x_2)$ equivale ad imporre che

$$e^{2x_1-3} = e^{2x_2-3}$$

$$2x_1 - 3 = 2x_2 - 3$$

$$2x_1 = 2x_2 \iff x_1 = x_2$$

La funzione f è iniettiva e, conseguentemente, invertibile. Cerchiamo l'espressione analitica della funzione inversa f^{-1} risolvendo, rispetto alla variabile x , l'equazione

$$e^{2x-3} = y.$$

Ha senso risolvere tale equazione solo per $y > 0$, in quanto essa non avrebbe soluzioni nel caso in cui $y \leq 0$ (l'esponenziale non si annulla mai e non è mai negativo). L'equazione è univocamente risolta da

$$x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \log y$$

La funzione inversa di f è, più formalmente,

$$f^{-1}(y) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \log y$$

il cui insieme di definizione è l'immagine della funzione di partenza f , ovvero $(0, +\infty)$. Quindi $f : (-\infty, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, $f^{-1} : (0, +\infty) \rightarrow (-\infty, +\infty)$.

Esercizio 2.4

Provare che la funzione

$$f(x) = \arctan(2x - 1)$$

è invertibile nel suo dominio e determinare l'espressione analitica dell'inversa f^{-1} . Specificare il dominio di f^{-1} .

Soluzione

La funzione arcotangente, che ricordiamo essere la funzione inversa della restrizione di $y = \tan(x)$ all'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, presenta le seguenti caratteristiche:

- ha come *dominio* l'insieme $\mathbb{R}$;
- ha come immagine l'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$;
- è una funzione monotona **strettamente crescente**.

In virtù del suo essere monotona strettamente crescente, la funzione f è invertibile (si noti come questa sia una condizione solo *sufficiente*). Cerchiamo l'espressione analitica della funzione inversa f^{-1} risolvendo, rispetto alla variabile x , l'equazione

$$\arctan(2x - 1) = y,$$

dove $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. L'equazione diviene

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= \tan(y) \\ x &= \frac{1}{2} + \frac{\tan(y)}{2} \end{aligned}$$

La funzione inversa di f è, più formalmente,

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{2} + \frac{\tan(y)}{2}$$

il cui insieme di definizione è l'immagine della funzione di partenza f , ovvero $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Quindi $f: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, mentre $f^{-1}: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$

Esercizio 2.5

Provare che la funzione

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2}$$

è invertibile nel suo dominio e determinare l'espressione analitica dell'inversa f^{-1} . Specificare il dominio di f^{-1} .

Soluzione

L'insieme di definizione della funzione proposta è

$$(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty),$$

in quanto definita $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq -2$. Per dimostrare che f è invertibile, basta verificare che è iniettiva, ovvero

$$\forall x_1, x_2 \in D \quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

Per facilitare successivamente i calcoli, conviene riscrivere la funzione f come:

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2} = \frac{x+2-3}{x+2} = 1 - \frac{3}{x+2}$$

Imporre $f(x_1) = f(x_2)$ equivale ad imporre che

$$\begin{aligned} 1 - \frac{3}{x_1 + 2} &= 1 - \frac{3}{x_2 + 2} \\ \frac{3}{x_1 + 2} &= \frac{3}{x_2 + 2} \\ x_1 + 2 &= x_2 + 2 \iff x_1 = x_2 \end{aligned}$$

La funzione f è iniettiva e, conseguentemente, invertibile. Cerchiamo l'espressione analitica della funzione inversa f^{-1} risolvendo, rispetto alla variabile x , l'equazione

$$\frac{x - 1}{x + 2} = y.$$

Riscrivendo nuovamente la funzione come prima

$$1 - \frac{3}{x + 2} = y$$

otteniamo

$$x = \frac{3}{1 - y} - 2 = \frac{2y + 1}{1 - y}$$

La funzione inversa di f è, più formalmente,

$$f^{-1}(y) = \frac{2y + 1}{1 - y}$$

il cui insieme di definizione è l'immagine della funzione di partenza f , ovvero $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Quindi $f : (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty) \rightarrow (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, $f^{-1} : (-\infty, 1) \cup (1, +\infty) \rightarrow (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.

Esercizio 2.6

Provare che la funzione

$$f(x) = e^{1+x^2}$$

è invertibile in una restrizione del suo dominio e determinare l'espressione analitica dell'inversa f^{-1} . Specificare il dominio di f^{-1} .

Soluzione

L'insieme di definizione della funzione proposta è

$$(-\infty, +\infty),$$

in quanto la funzione esponenziale è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Risulta chiaro come f non sia invertibile su tutto $\mathbb{R}$, in quanto è una funzione pari, cioè simmetrica rispetto all'asse y :

$$f(-x) = e^{1+(-x)^2} = e^{1+x^2} = f(x)$$

Ciò implica che qualsiasi retta orizzontale interseca il grafico della funzione in due punti. La funzione non è iniettiva, dunque non invertibile su $\mathbb{R}$. Tuttavia, è possibile operare una

restrizione del dominio considerando unicamente il semiasse positivo delle ascisse compresa l'origine, cioè l'insieme

$$[0, +\infty)$$

Verifichiamo che, in tale dominio ristretto, la funzione f è iniettiva. A tale scopo, imponiamo $f(x_1) = f(x_2)$, ovvero

$$\begin{aligned} e^{1+x_1^2} &= e^{1+x_2^2} \\ 1 + x_1^2 &= 1 + x_2^2 \\ x_1^2 &= x_2^2 \iff x_1 = x_2 \end{aligned}$$

dove l'ultima doppia implicazione è vera in quanto $x \in [0, +\infty)$, ovvero $x \geq 0$, rimanendo esclusa la soluzione $x_1 = -x_2$. Abbiamo così dimostrato che la funzione f è iniettiva sul dominio ristretto e, conseguentemente, invertibile in $[0, +\infty)$.

Cerchiamo l'espressione analitica della funzione inversa f^{-1} risolvendo, rispetto alla variabile x , l'equazione

$$e^{1+x^2} = y.$$

L'equazione è risolta da

$$x = \pm \sqrt{\log(y) - 1}$$

in cui, tuttavia, appare ora chiaro come si debba escludere la soluzione negativa, in quanto x varia nella restrizione $[0, +\infty)$.

Soluzione

La funzione inversa di f è, più formalmente,

$$f^{-1}(y) = \sqrt{\log(y) - 1}$$

il cui insieme di definizione è l'immagine della funzione di partenza f , ovvero $[e, +\infty)$. Quindi $f : [0, +\infty) \rightarrow [e, +\infty)$, $f^{-1} : [e, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$.

Esercizio 2.7

Provare che la funzione

$$f(x) = \frac{4}{5^{3x}}$$

è invertibile nel suo dominio e determinare l'espressione analitica dell'inversa f^{-1} . Specificare il dominio di f^{-1} .

Soluzione

L'insieme di definizione della funzione proposta è

$$(-\infty, +\infty),$$

in quanto il denominatore è sempre diverso da zero (l'esponenziale non si annulla mai). Per

dimostrare che f è invertibile, basta verificare che è iniettiva, ovvero

$$\forall x_1, x_2 \in D \quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

Imporre $f(x_1) = f(x_2)$ equivale ad imporre che

$$\begin{aligned} \frac{4}{5^{3x_1}} &= \frac{4}{5^{3x_2}} \\ 5^{3x_1} &= 5^{3x_2} \\ 3x_1 &= 3x_2 \iff x_1 = x_2 \end{aligned}$$

La funzione f è iniettiva e, conseguentemente, invertibile. Cerchiamo l'espressione analitica della funzione inversa f^{-1} risolvendo, rispetto alla variabile x , l'equazione

$$\frac{4}{5^{3x}} = y,$$

con $y > 0$, che è univocamente risolta per

$$x = \frac{1}{3} \log_5 \left(\frac{4}{y} \right) = -\frac{1}{3} \log_5 \left(\frac{y}{4} \right)$$

Soluzione

La funzione inversa di f è, più formalmente,

$$f^{-1}(y) = -\frac{1}{3} \log_5 \left(\frac{y}{4} \right)$$

il cui insieme di definizione è l'immagine della funzione di partenza f , ovvero $(0, +\infty)$. Quindi $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, mentre $f^{-1} : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Esercizio 2.8

Provare che la funzione

$$f(x) = -1 + \sqrt[5]{1+x}$$

è invertibile nel suo dominio e determinare l'espressione analitica dell'inversa f^{-1} . Specificare il dominio di f^{-1} .

Soluzione

L'insieme di definizione della funzione proposta è

$$(-\infty, +\infty),$$

in quanto i radicali con indice dispari sono sempre definiti. Per dimostrare che f è invertibile, basta verificare che è iniettiva, ovvero

$$\forall x_1, x_2 \in D \quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

Imporre $f(x_1) = f(x_2)$ equivale ad imporre che

$$\begin{aligned} -1 + \sqrt[5]{1+x_1} &= -1 + \sqrt[5]{1+x_2} \\ \sqrt[5]{1+x_1} &= \sqrt[5]{1+x_2} \\ 1+x_1 &= 1+x_2 \iff x_1 = x_2 \end{aligned}$$

La funzione f è iniettiva (è anche strettamente crescente) e, conseguentemente, invertibile. Cerchiamo l'espressione analitica della funzione inversa f^{-1} resolvendo, rispetto alla variabile x , l'equazione

$$-1 + \sqrt[5]{1+x} = y,$$

che è univocamente risolta per

$$x = -1 + (y+1)^5$$

Soluzione

La funzione inversa di f è, più formalmente,

$$f^{-1}(y) = -1 + (y+1)^5$$

il cui insieme di definizione è l'immagine della funzione di partenza f , ovvero $\mathbb{R}$. Quindi $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, e anche $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Esercizio 2.9

Provare che la funzione

$$f(x) = \frac{1-3x}{x+1}$$

è invertibile nel suo dominio e determinare l'espressione analitica dell'inversa f^{-1} . Specificare il dominio di f^{-1} .

(Suggerimento: effettuare la divisione fra $1-3x$ e $x+1$).

Esercizio 2.10

Provare che la funzione

$$f(x) = 3^{x^2}$$

è invertibile in una restrizione del suo dominio e determinare l'espressione analitica dell'inversa f^{-1} sulla restrizione. Specificare il dominio di f^{-1} .

Esercizio 2.11

Provare che la funzione

$$f(x) = \sqrt{\log\left(\frac{x-1}{x}\right)}$$

è invertibile nel suo dominio e determinare l'espressione analitica dell'inversa f^{-1} .

Specificare il dominio di f^{-1} .