



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Analisi

Matematica 1

Esercizi, volume 2 — Numeri e insiemi

Gli esercizi svolti della seconda parte del corso, una scheda per capitolo, con la soluzione subito dopo ogni testo: massimi, minimi, estremi superiori e inferiori, equazioni e disequazioni, sommatorie, numeri complessi. Le schede sono di Fabio Furini e Gianluca Priori; molti esercizi sono tratti da M. Bramanti, *Esercitazioni di Analisi matematica 1*, Esculapio.

Fabio Furini

fabiofurini.github.io

Dipartimento di Ingegneria informatica, automatica e gestionale — Sapienza Università di Roma

Versione online e materiale scaricabile:
fabiofurini.github.io/analisi-matematica-1/
github.com/fabiofurini/analisi-matematica-1

Anno accademico 2026–2027

Indice

1	Massimi, minimi, estremi superiori e inferiori	2
2	Equazioni e disequazioni di variabile reale	9
3	Sommatorie	17
4	Numeri complessi	20



Massimi, minimi, estremi superiori e inferiori

Esercizio 1.1

Determinare se l'insieme

$$A = [0, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$$

ammette massimo, minimo, estremo superiore, estremo inferiore e, in caso affermativo, determinare tali elementi.

Soluzione

Il minimo di A è 0. A non ammette massimo, il suo estremo superiore è $\sqrt{2}$.

Esercizio 1.2

Determinare se l'insieme

$$A = [\sqrt{2}, \sqrt{3}] \cap \mathbb{Q}$$

ammette massimo, minimo, estremo superiore, estremo inferiore e, in caso affermativo, determinare tali elementi.

Soluzione

A non ammette né minimo né massimo. L'estremo inferiore vale $\sqrt{2}$, l'estremo superiore vale $\sqrt{3}$.

Esercizio 1.3

Determinare se l'insieme

$$A = [0, \sqrt{2}] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$$

ammette massimo, minimo, estremo superiore, estremo inferiore e, in caso affermativo,

determinare tali elementi.

Soluzione

A non ammette minimo, l'estremo inferiore vale 0. Il massimo di A vale $\sqrt{2}$.

Esercizio 1.4

In ciascuno dei seguenti casi dire se l'insieme

$$A = (-\infty, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$$

ammette massimo, minimo, estremo superiore, estremo inferiore e, in caso affermativo, determinare tali elementi.

Soluzione

A non è inferiormente limitato quindi non ha estremo inferiore in $\mathbb{R}$. A non ammette massimo, l'estremo superiore vale $\sqrt{2}$.

Esercizio 1.5

Dire se il seguente insieme $A \subset \mathbb{R}$ ammette massimo, minimo, estremo superiore, estremo inferiore e se è limitato:

$$A = \left\{ \frac{2n+1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

Soluzione

Da $(2n+1)/n = 2 + (1/n)$ abbiamo che il massimo di A si ottiene per $n = 1$ e vale 3. A non ammette minimo, l'estremo inferiore vale 2. In particolare A è limitato.

Esercizio 1.6

Dire se il seguente insieme $A \subset \mathbb{R}$ ammette massimo, minimo, estremo superiore, estremo inferiore e se è limitato:

$$A = \left\{ \frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

Soluzione

Da $(n-1)/n = 1 - (1/n)$ abbiamo che il minimo di A si ottiene per $n = 1$ e vale 0. A non ammette massimo, l'estremo superiore vale 1. In particolare A è limitato.

Esercizio 1.7

Dire se il seguente insieme $A \subset \mathbb{R}$ ammette massimo, minimo, estremo superiore, estremo inferiore e se è limitato:

$$A = \left\{ \frac{3n^2 + 1}{n^2} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

Soluzione

Da $(3n^2 + 1)/n^2 = 3 + (1/n^2)$ abbiamo che il massimo di A si ottiene per $n = 1$ e vale 4. A non ammette minimo, l'estremo inferiore vale 3. In particolare A è limitato.

Esercizio 1.8

Dire se il seguente insieme $A \subset \mathbb{R}$ ammette massimo, minimo, estremo superiore, estremo inferiore e se è limitato:

$$A = \left\{ \frac{1}{n^2 + 1} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

Soluzione

Il valore massimo di A si ottiene per $n = 1$ e vale $1/2$. A non ammette minimo, l'estremo inferiore vale 0. In particolare A è limitato.

Esercizio 1.9

Sia

$$A = \left\{ \left| \frac{3x}{x+1} \right| : -\frac{1}{2} < x \leq 2 \right\}.$$

Scegliere le affermazioni corrette tra le seguenti:

- (a) $\sup A \notin A$ (b) $\inf A = \min A = 2$
 (c) $\max A = 3$ (d) nessuna delle altre risposte corretta

Soluzione

A è l'insieme dei valori di $|f(x)|$ nell'intervallo $(-1/2, 2]$ con $f(x) = \frac{3x}{x+1}$. Da

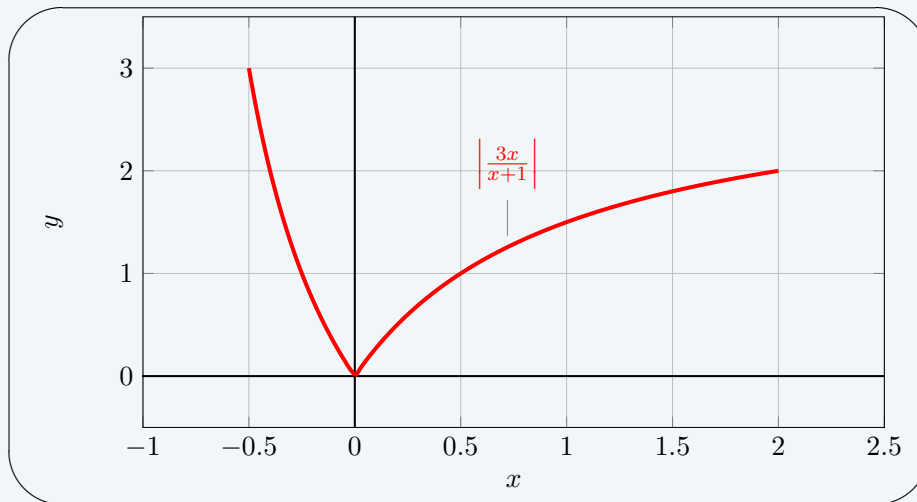
$$\frac{3x}{x+1} = 3 - \frac{3}{x+1}$$

abbiamo che la funzione f è strettamente crescente nell'intervallo indicato $(-1/2, 2]$, nega-

tiva su $(-1/2, 0)$, nulla per $x = 0$, positiva su $(0, 2]$. Ne segue che

$$|f(x)| = \left| \frac{3x}{x+1} \right|$$

è strettamente decrescente in $(-1/2, 0]$, dove assume tutti i valori in $[0, 3)$, strettamente crescente su $[0, 2]$ dove assume tutti i valori in $[0, 2]$. Il valore minimo è quindi assunto per $x = 0$ e vale 0. L'estremo superiore vale 3, non c'è valore massimo. La risposta corretta è la (a).



Esercizio 1.10

Per $I = [1/3, +\infty)$ si consideri la funzione

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \exp \left(\left| \frac{2x-1}{x} \right| \right).$$

Determinare, tra i seguenti intervalli, l'insieme $J = f(I)$ dei valori assunti da f .

- | | | |
|--------------------|-------------------|-------------------------|
| (a) $[e, e^2)$ | (b) $(e^{-2}, e]$ | (c) $[1, e^2)$ |
| (d) $(e, +\infty)$ | (e) $(0, e^2)$ | (f) un altro intervallo |

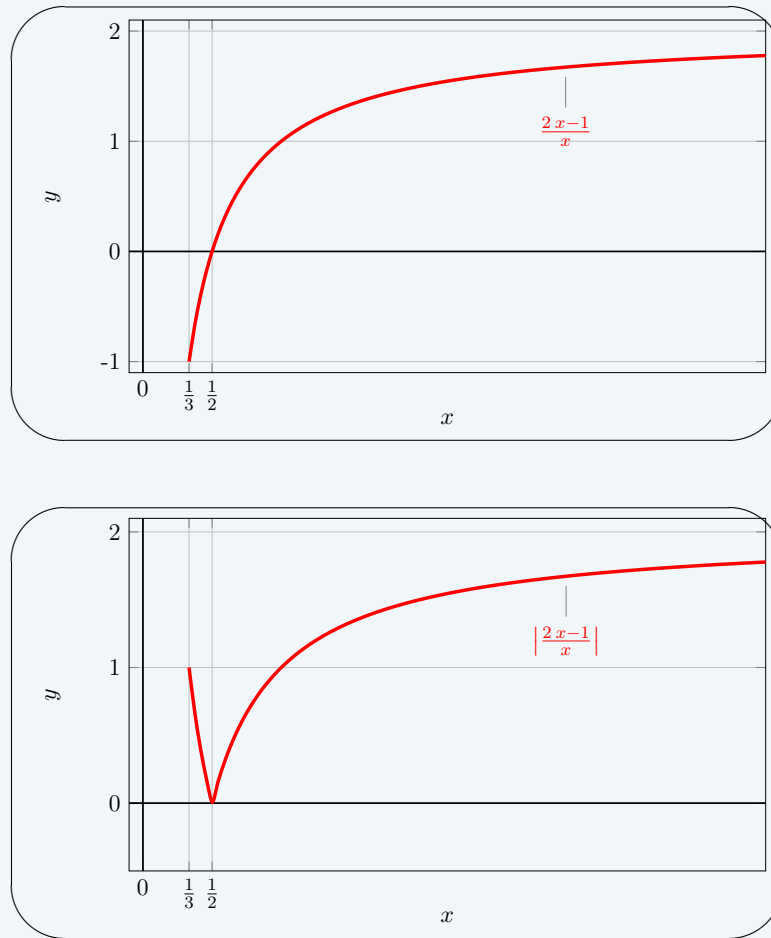
Soluzione

La funzione f ha lo stesso andamento di monotonia di

$$|g(x)| = \left| \frac{2x-1}{x} \right|$$

con

$$g(x) = \frac{2x-1}{x} = 2 - \frac{1}{x}.$$

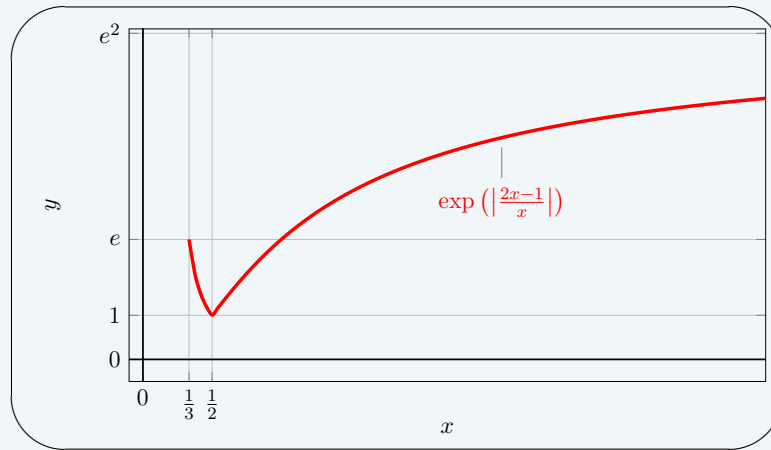


Soluzione

La funzione g è strettamente crescente nell'intervallo $I = [1/3, +\infty)$, negativa su $[1/3, 1/2)$, nulla per $x = 1/2$, positiva su $(1/2, +\infty)$. Ne segue che $|g(x)|$ è strettamente decrescente in $[1/3, 1/2]$, dove assume tutti i valori in $[0, 1]$, strettamente crescente su $[1/2, +\infty)$ dove assume tutti i valori in $[0, 2)$. L'insieme dei valori $|g|(I)$ è $[0, 2)$, quindi per $f(x) = e^{|g(x)|}$ si ha

$$f(I) = [1, e^2).$$

La risposta corretta è (c).



Possiamo precisare dicendo che f è strettamente decrescente in $[1/3, 1/2]$, dove assume tutti i valori in $[1, e]$, strettamente crescente su $[1/2, +\infty)$ dove assume tutti i valori in $[1, e^2)$.

Esercizio 1.11

Sia $A = A_+ \cup A_-$ con

$$A_+ = \left\{ x + \frac{2}{x} : x > 0 \right\}, \quad A_- = \left\{ x + \frac{2}{x} : x < 0 \right\}.$$

Scegliere le affermazioni corrette tra le seguenti:

- (a) $\sup A = +\infty$ (b) $\inf A_+ = 2\sqrt{2}$ (c) A_+ non ha minimo
 (d) A_- non ha massimo (e) nessuna delle altre risposte corretta

Soluzione

In maniera evidente A_+ non è superiormente limitato quindi la affermazione (a) è corretta (e l'affermazione (e) è errata). Per $x \neq 0$, consideriamo l'equazione

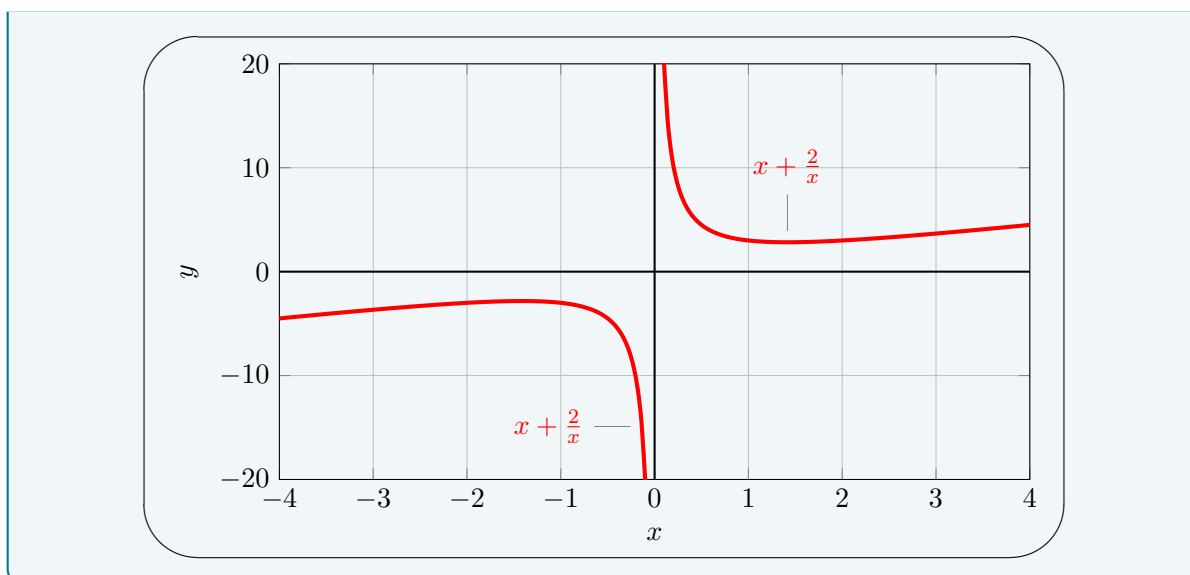
$$x + \frac{2}{x} = y,$$

$$x^2 - yx + 2 = 0.$$

Ci sono soluzioni $x \in \mathbb{R}$ se e solo se $y \in (-\infty, -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}, +\infty)$. Inoltre per ogni $y \in (-\infty, -2\sqrt{2}]$ le soluzioni x sono negative mentre per ogni $y \in [2\sqrt{2}, +\infty)$ le soluzioni x sono positive. Questo significa

$$A_+ = [2\sqrt{2}, +\infty), \quad A_- = (-\infty, -2\sqrt{2}].$$

Dunque (b) è vera, (c) falsa, (d) falsa.



Equazioni e disequazioni di variabile reale

Esercizio 2.1

Risolvere la seguente disequazione di variabile reale x :

$$\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 3} > 0$$

Soluzione

Il numeratore $x^2 - 2x$ è positivo per $x < 0$ oppure per $x > 2$, nullo per $x = 0$, $x = 2$, negativo per $0 < x < 2$. Il denominatore $x^2 - 4x + 3$ è positivo per $x < 1$ oppure per $x > 3$, negativo per $1 < x < 3$. Il quoziente è definito ed ha il segno positivo richiesto per

$$x \in (-\infty, 0) \cup (1, 2) \cup (3, +\infty).$$

Esercizio 2.2

Risolvere la seguente disequazione di variabile reale x :

$$\log(x-1)^2 - \log(x-2) > 0$$

Soluzione

La funzione $f(x) = \log(x-1)^2 - \log(x-2)$ è definita per $x > 2$ in quanto per tali x , e solo per tali, risulta $x-2 > 0$, $(x-1)^2 > 0$. Nel suo dominio, si ha, come richiesto, $f(x) > 0$ se e solo se

$$\log(x-1)^2 > \log(x-2), \quad x > 2$$

quindi se e solo se

$$\begin{cases} (x-1)^2 > x-2 \\ x > 2 \end{cases}$$

Otteniamo

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 3 > 0 \\ x > 2 \end{cases}$$

che equivale a

$$x > 2$$

in quanto $x^2 - 3x + 3 > 0$ è soddisfatta per ogni x . In tutto il proprio dominio $(2, +\infty)$ la funzione $f(x)$ assume valori positivi.

Esercizio 2.3

Risolvere la seguente disequazione di variabile reale x :

$$e^x + e^{-x} < \frac{10}{3}$$

Soluzione

Per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$e^x + e^{-x} < \frac{10}{3}$$

equivale a

$$3e^{2x} - 10e^x + 3 < 0$$

quindi a

$$\frac{1}{3} < e^x < 3.$$

Ne segue che la disequazione è risolta da

$$-\log 3 < x < \log 3.$$

Esercizio 2.4

Risolvere la seguente disequazione di variabile reale x :

$$8^{x+1} \geq 2^{x^2}$$

Soluzione

Per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$8^{x+1} \geq 2^{x^2}$$

equivale a

$$2^{3x+3} \geq 2^{x^2}$$

quindi a

$$3x + 3 \geq x^2$$

dal momento che 2^x è una funzione strettamente crescente in $\mathbb{R}$. Ne segue che la disequazione è risolta da

$$\frac{3 - \sqrt{21}}{2} \leq x \leq \frac{3 + \sqrt{21}}{2}.$$

Esercizio 2.5

Risolvere la seguente disequazione di variabile reale x :

$$\log(1 - \sin x) \geq 0$$

Soluzione

La funzione $f(x) = \log(1 - \sin x)$ è definita per $\sin x < 1$ quindi per

$$x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Per tali x si ha $f(x) \geq 0$ se e solo se

$$1 - \sin x \geq 1$$

quindi per

$$\sin x \leq 0.$$

La disequazione data è risolta per

$$\pi + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$$

cioè per

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} [\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi].$$

Esercizio 2.6

Risolvere la seguente disequazione di variabile reale x :

$$|x|\sqrt{1 - 2x^2} > 2x^2 - 1$$

Soluzione

$\sqrt{1 - 2x^2}$ è definita per $1 - 2x^2 \geq 0$. Quando $1 - 2x^2 = 0$ la disequazione non è soddisfatta in quanto si riduce a $0 > 0$. Quando $1 - 2x^2 > 0$ la disequazione è soddisfatta in quanto il primo membro $|x|\sqrt{1 - 2x^2}$ è il prodotto di due numeri positivi mentre il secondo membro $2x^2 - 1 = -(1 - 2x^2)$ è negativo. Dunque la disequazione è risolta per

$$-\sqrt{\frac{1}{2}} < x < \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Esercizio 2.7

Risolvere la seguente equazione di variabile reale x :

$$\sin^2 x = 2 \cos^2 x - \frac{1}{2}$$

Soluzione

L'equazione

$$\sin^2 x = 2 \cos^2 x - \frac{1}{2}$$

equivale a

$$2 \sin^2 x = 4(1 - \sin^2 x) - 1$$

$$6 \sin^2 x = 3$$

$$\sin x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Le soluzioni sono date da

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Esercizio 2.8

Risolvere la seguente disequazione di variabile reale x :

$$e^{\sin^2 x - \sin x} \leq 1$$

Soluzione

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, $e^{\sin^2 x - \sin x} \leq 1$ equivale a

$$\sin^2 x - \sin x \leq 0$$

quindi a

$$0 \leq \sin x \leq 1.$$

Le soluzioni sono date da

$$2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$$

cioè da

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} [2k\pi, \pi + 2k\pi].$$

Esercizio 2.9

Risolvere la seguente disequazione di variabile reale x :

$$2|x^2 - x| > |x|$$

Soluzione

La disequazione $2|x^2 - x| > |x|$ non è soddisfatta per $x = 0$. Per $x \neq 0$, dividendo per il termine positivo $|x|$, equivale a

$$2|x - 1| > 1$$

quindi a

$$|x - 1| > 1/2.$$

Le soluzioni sono date da

$$(x - 1 < -1/2, x \neq 0) \vee (x - 1 > 1/2),$$

$$(x < 1/2, x \neq 0) \vee x > 3/2$$

quindi da

$$x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1/2) \cup (3/2, +\infty).$$

Esercizio 2.10

Risolvere la seguente disequazione di variabile reale x :

$$(x + 1)^{x^2 - 1} > 1$$

Soluzione

La funzione $f(x) = (x + 1)^{x^2 - 1}$ è definita per $x > -1$. Per tali x , $f(x) > 1$ equivale a

$$e^{(x^2 - 1)\log(x + 1)} > 1$$

quindi a

$$(x^2 - 1)\log(x + 1) > 0, \quad x > -1.$$

Dividendo per il termine positivo $x + 1$ si ottiene

$$(x - 1)\log(x + 1) > 0, \quad x > -1.$$

Il fattore $x - 1$ è positivo per $x > 1$, nullo per $x = 1$, negativo per $-1 < x < 1$. Il fattore $\log(x + 1)$ è positivo per $x > 0$, nullo per $x = 0$, negativo per $-1 < x < 0$. Per la regola dei segni, le soluzioni sono date da

$$x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty).$$

Esercizio 2.11

Risolvere la seguente equazione di variabile reale x :

$$3^{|x^2-4|} = 0$$

Soluzione

$3^{|x^2-4|} = 0$ non ha soluzioni in quanto $3^y > 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2.12

Risolvere la seguente disequazione di variabile reale x :

$$\frac{\log_a(4x-3)}{\log_a(2x-1)} > 1 \quad 0 < a < 1$$

Soluzione

Per le condizioni di esistenza del logaritmo e del denominatore, bisogna imporre il sistema

$$\begin{cases} 4x-3 > 0 \\ 2x-1 > 0 \\ \log_a(2x-1) \neq 0 \end{cases}$$

che fornisce $\frac{3}{4} < x < 1, x > 1$. Portando ora tutto a primo membro, determinando il minimo comune denominatore ed utilizzando le proprietà dei logaritmi, si ricava

$$\frac{\log_a\left(\frac{4x-3}{2x-1}\right)}{\log_a(2x-1)} > 0$$

Studiando il segno di numeratore e denominatore e tenendo presente che $a < 1$, per il numeratore si ottiene

$$\log_a\left(\frac{4x-3}{2x-1}\right) > 0 \iff \frac{4x-3}{2x-1} < 1 \iff \frac{1}{2} < x < 1$$

mentre per il denominatore si ottiene

$$\log_a(2x-1) > 0 \iff x < 1$$

Componendo i segni, la disequazione è verificata per $\frac{1}{2} < x < 1, x > 1$. Unendo a sistema tale intervallo di soluzioni con le condizioni di esistenza precedentemente studiate, si ottiene che la disequazione è soddisfatta per ogni x appartenente all'insieme $(\frac{3}{4}; 1) \cup (1, +\infty)$.

Esercizio 2.13

Risolvere la seguente disequazione di variabile reale x :

$$\sqrt{x^2 - 3x + 5} \leq x + 3$$

Soluzione

La disequazione irrazionale si presenta nella forma $\sqrt{A(x)} \leq B(x)$, con $A(x)$ e $B(x)$ polinomi in x . Bisogna innanzitutto imporre la condizione di esistenza del radicale, cioè $x^2 - 3x + 5 \geq 0$. Inoltre, essendo un radicale sempre positivo o nullo in $\mathbb{R}$, imponiamo $x + 3 \geq 0$. Risolviamo dunque il sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 5 \geq 0 \\ x + 3 \geq 0 \\ x^2 - 3x + 5 \leq (x + 3)^2 \end{cases}$$

dove, nell'ultima disequazione, abbiamo potuto elevare entrambi i membri, in quanto positivi, al quadrato. Il sistema si riduce a:

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x \geq -3 \\ x \geq -\frac{4}{9} \end{cases}$$

il cui intervallo di soluzioni è $[-\frac{4}{9}, +\infty)$.

Esercizio 2.14

Risolvere la seguente disequazione frazionaria di variabile reale x :

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 6}{x^2 - 2x - 3} > \frac{2}{x + 1}$$

Soluzione

Bisogna innanzitutto porre nella forma canonica (0 al secondo membro) la disequazione. Le condizioni di esistenza (denominatori diversi da zero) saranno automaticamente incluse nello studio del segno. Otteniamo

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 6}{x^2 - 2x - 3} - \frac{2}{x + 1} > 0$$

Scomponiamo in fattori il numeratore e il denominatore della prima frazione, ottenendo:

$$\frac{(x^2 + 2)(x - 3)}{(x - 3)(x + 1)} - \frac{2}{x + 1} > 0$$

Potendo semplificare $x - 3$ ottenendo una frazione equivalente, a patto che $x \neq 3$ per

condizione di esistenza, si ha

$$\frac{x^2 + 2}{x + 1} - \frac{2}{x + 1} > 0$$

ovvero

$$\frac{x^2}{x + 1} > 0$$

Il numeratore è positivo $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$, il denominatore è positivo per $x > -1$. Componendo i segni, e tenendo conto della condizione $x \neq 3$, si ottiene l'insieme delle soluzioni $(-1, 0) \cup (0, 3) \cup (3, +\infty)$.

Sommatorie

Esercizio 3.1

Dimostrare utilizzando le proprietà delle sommatorie che, per ogni intero $n \geq 1$, abbiamo:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(somma dei quadrati dei primi n numeri naturali senza lo zero).

Soluzione

Partiamo scrivendo in due modi diversi la somma: $\sum_{k=0}^n (k+1)^3$

$$\begin{aligned} 1) \quad \sum_{k=0}^n (k+1)^3 &= \sum_{k=0}^n (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) \\ &= \left(\sum_{k=1}^n k^3 + 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \right) + 1 \\ &= \sum_{k=1}^n k^3 + 3 \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n + 1 \end{aligned}$$

$$2) \quad \sum_{k=0}^n (k+1)^3 = \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3$$

Uguagliando e cancellando la somma con k^3 otteniamo:

$$3 \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n + 1 = (n+1)^3$$

Isolando quella con k^2 otteniamo:

$$\begin{aligned}
3 \sum_{k=1}^n k^2 &= (n+1)^3 - \frac{3n(n+1)}{2} - n - 1 \\
&= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - \frac{3n^2 + 3n}{2} - n - 1 \\
&= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2}
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Esercizio 3.2

Dimostrare utilizzando le proprietà delle sommatorie che, per ogni intero $n \geq 1$, abbiamo:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}$$

(somma dei cubi dei primi n numeri naturali senza lo zero). Ovvero che abbiamo:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$$

e quindi la somma dei cubi è uguale al quadrato della somma dei numeri naturali.

Soluzione

Partiamo scrivendo in due modi diversi la seguente somma: $\sum_{k=0}^n (k+1)^4$.

$$\begin{aligned}
 1) \quad \sum_{k=0}^n (k+1)^4 &= \sum_{k=0}^n (k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) \\
 &= \left(\sum_{k=1}^n k^4 + 4 \sum_{k=1}^n k^3 + 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \right) + 1 \\
 &= \sum_{k=1}^n k^4 + 4 \sum_{k=1}^n k^3 + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n + 1 \\
 &= \sum_{k=1}^n k^4 + 4 \sum_{k=1}^n k^3 + 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1 \\
 2) \quad \sum_{k=0}^n (k+1)^4 &= \sum_{k=1}^{n+1} k^4 = \sum_{k=1}^n k^4 + (n+1)^4
 \end{aligned}$$

Uguagliando e cancellando la somma con k^4 otteniamo:

$$4 \sum_{k=1}^n k^3 + 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1 = (n+1)^4$$

Isolando quella con k^3 otteniamo:

$$4 \sum_{k=1}^n k^3 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 - 2n^3 - 5n^2 - 4n - 1 = n^4 + 2n^3 + n^2$$

Quindi:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}$$

Numeri complessi

Esercizio 4.1

Porre in forma algebrica i seguenti numeri complessi z identificandone la parte reale e la parte immaginaria. Per ciascuno, poi, trovare il modulo, il coniugato ed il reciproco.

$$z = \frac{2+5i}{1+i} \qquad z = \frac{2+i}{1-3i}$$

Soluzione

$$z = \frac{2+5i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{7+3i}{2} = \frac{7}{2} + i\frac{3}{2}$$

da cui

$$\Re z = \frac{7}{2}, \Im z = \frac{3}{2}, |z| = \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{58}}{2}, \bar{z} = \frac{7}{2} - i\frac{3}{2}.$$

Infine

$$z^{-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{7-3i}{2} \cdot \frac{4}{58} = \frac{7}{29} - i\frac{3}{29}.$$

Soluzione

$$z = \frac{2+i}{1-3i} \cdot \frac{1+3i}{1+3i} = \frac{-1+7i}{10} = -\frac{1}{10} + i\frac{7}{10}$$

da cui

$$\Re z = -\frac{1}{10}, \Im z = \frac{7}{10}, |z| = \sqrt{\frac{1}{100} + \frac{49}{100}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \bar{z} = -\frac{1}{10} - i\frac{7}{10}.$$

Infine

$$z^{-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = -\frac{1+7i}{10} \cdot 2 = -\frac{1}{5} - i\frac{7}{5}.$$

Esercizio 4.2

Determinare tutti i numeri complessi z che verificano:

$$|z| \leq |z - 2i|$$

Soluzione

Convieni passare alla forma $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$$|x + iy| \leq |x + i(y - 2)|$$

$$|x + iy|^2 \leq |x + i(y - 2)|^2$$

$$x^2 + y^2 \leq x^2 + (y - 2)^2$$

$$0 \leq -4y + 4$$

$$y \leq 1.$$

Rappresentando le soluzioni nel piano cartesiano, si ha un semipiano chiuso.

Esercizio 4.3

Determinare tutti i numeri complessi z che verificano:

$$|z - (3 + i)| \leq 2$$

Soluzione

Tale disequazione è soddisfatta da quei numeri complessi $z = x + iy$ che, nel piano di Gauss, sono rappresentati da quei punti $P(x, y)$ che distano dal punto $(3, 1)$ di una quantità minore o uguale a 2.

Ossia, tutti e soli i punti del **cerchio chiuso** di centro $C(3, 1)$ e raggio 2 (attenzione, non è la circonferenza, bensì il cerchio, vale a dire la parte interna unita al bordo). La circonferenza ha equazione:

$$\gamma: (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$$

mentre il cerchio chiuso ha equazione:

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 \leq 4$$

Alternativamente, la disuguaglianza si può trattare attraverso la sostituzione $z = x + iy$, ottenendo

$$|x + iy - 3 - i| \leq 2$$

in cui, raccogliendo l'unità immaginaria

$$|x - 3 + i(y - 1)| \leq 2$$

Applicando la definizione di modulo di numero complesso, si ha

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} \leq 2$$

Potendo elevare al quadrato ambo i membri non negativi, si ottiene in definitiva:

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 \leq 4$$

Esercizio 4.4

Determinare tutti i numeri complessi z che verificano:

$$(1-i)z - (1+i)\bar{z} = i$$

Soluzione

$$(1-i)(x+iy) - (1+i)(x-iy) = i$$

$$x+y-ix+iy-x-y-ix+iy = i$$

$$i(2y-2x) = i$$

$$2y-2x = 1.$$

Rappresentando le soluzioni nel piano cartesiano, si ha una retta.

Esercizio 4.5

Determinare tutti i numeri complessi z che verificano:

$$|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| \leq 2$$

Soluzione

$$|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| \leq 2$$

$$2|\Re z| + 2|\Im z| \leq 2$$

$$|x| + |y| \leq 1.$$

Rappresentando le soluzioni nel piano cartesiano, si ha un quadrato chiuso di vertici ± 1 , $\pm i$.

Esercizio 4.6

Determinare tutti i numeri complessi z che verificano:

$$\Im(z) - |z + \bar{z}|^2 < 1$$

Soluzione

$$\Im(z) - |z + \bar{z}|^2 < 1$$

$$\Im(z) - 4 |\Re z|^2 < 1$$

$$y < 4x^2 + 1.$$

Rappresentando le soluzioni nel piano cartesiano, si ha la regione aperta al di sotto della parabola $y = 4x^2 + 1$.

Esercizio 4.7

Determinare tutti i numeri complessi z che verificano:

$$\begin{cases} z\bar{z} \leq 2 \\ z + \bar{z} \leq 2 \end{cases}$$

Soluzione

$$\begin{cases} |z|^2 \leq 2 \\ 2\Re z \leq 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

Rappresentando le soluzioni nel piano cartesiano, si ha la parte di piano comune al cerchio chiuso di centro l'origine e raggio $\sqrt{2}$ ed al semipiano chiuso a sinistra della retta verticale $x = 1$.

Esercizio 4.8

Il sistema in $\mathbb{C}$

$$\begin{cases} z^2 + \bar{z}^2 = 0 \\ |\Re(z)| + |\Im(z)| = 1 \end{cases}$$

ha:

- (a) due soluzioni (b) tre soluzioni
(c) quattro soluzioni (d) nessuna delle altre risposte corretta

Soluzione

Posto $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$$\begin{cases} (x + iy)^2 + (x - iy)^2 = 0 \\ |x| + |y| = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2ixy + x^2 - y^2 - 2ixy = 0 \\ |x| + |y| = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = y^2 \\ |x| + |y| = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} |x| = |y| \\ |x| + |y| = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} |x| = 1/2 \\ |y| = 1/2 \end{cases}$$

Si ottengono i quattro punti $(1+i)/2$, $(-1+i)/2$, $(1-i)/2$, $(-1-i)/2$. La risposta corretta è (c).

Esercizio 4.9

Le soluzioni $z = x + iy$ dell'equazione complessa

$$z^2 - z\bar{z} + iz = -3 + 2i$$

soddisfano

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = 1 & \text{(b)} \quad y = \frac{2}{3}x + 1 \\ \text{(c)} \quad \left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = 1 & \text{(d)} \quad y = \frac{3}{2}x \end{array}$$

Soluzione

$$(x + iy)^2 - (x^2 + y^2) + ix - y = -3 + 2i$$

$$-2y^2 - y + i(x + 2xy) = -3 + 2i$$

$$\begin{cases} 2y^2 + y - 3 = 0 \\ x + 2xy = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1 \vee y = -3/2 \\ x = 2/(1 + 2y) \end{cases}$$

Si ottengono i due punti $(2/3) + i$, $-1 - i(3/2)$ che giacciono sulla retta $y = (3/2)x$. La risposta corretta è (d).

Esercizio 4.10

Trovare modulo ed argomento principale di

$$(a) z = -1 - i\sqrt{3}, \quad (b) z = -4i.$$

Soluzione

(a) Si ha $|z| = \sqrt{1+3} = 2$. L'argomento principale $\text{Arg } z$ è l'unico $\vartheta \in [-\pi, \pi)$ tale che

$$\cos \vartheta = \Re z / |z| = -1/2, \quad \sin \vartheta = \Im z / |z| = -\sqrt{3}/2$$

quindi $\text{Arg } z = -2\pi/3$.

Soluzione

(b) Si ha $|z| = 4$. L'argomento principale $\text{Arg } z$ è l'unico $\vartheta \in [-\pi, \pi)$ tale che

$$\cos \vartheta = \Re z / |z| = 0, \quad \sin \vartheta = \Im z / |z| = -1$$

quindi $\text{Arg } z = -\pi/2$.

Esercizio 4.11

Sia

$$w = \frac{z+1-i}{z+i}$$

Determinare, individuandoli sul piano di Gauss, i numeri complessi z affinché w sia un numero immaginario puro.

Soluzione

Il numero complesso w è definito per $z \neq -i$. Inoltre

$$w = \frac{z+1-i}{z+i} \cdot \frac{z-i}{z-i} = \frac{z^2 + z - 1 + i(-2z-1)}{z^2 + 1}$$

Ossia, separando la parte reale di w dalla sua parte immaginaria:

$$w = \frac{z^2 + z - 1}{z^2 + 1} + i \frac{-2z - 1}{z^2 + 1}$$

Il numero complesso w è immaginario puro quando $\Re(w) = 0$, vale a dire

$$\Re(w) = \frac{z^2 + z - 1}{z^2 + 1} = 0$$

Tale equazione fratta, sotto condizione $z \neq \pm\sqrt{-1}$, ovvero $z \neq \pm i$, restituisce i numeri reali

$$z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

che, sul piano di Gauss, sono rappresentabili come due punti appartenenti all'asse dei reali. In definitiva, w è immaginario puro in corrispondenza dei due valori di z trovati.

Esercizio 4.12

Sia $z = \sqrt{3} - 3i$. Le soluzioni w con $\Im(w) < 0$ dell'equazione

$$w^6 = |z|(z + \bar{z})$$

sono in numero di:

- (a) due (b) tre
(c) nessuna (d) nessuna delle altre risposte corretta

Soluzione

Si ha $|z| = \sqrt{12}$, $z + \bar{z} = 2\sqrt{3}$ quindi

$$w^6 = 12.$$

Le radici seste complesse di un numero reale positivo sono sei, a due a due opposte e due tra loro sono reali. Delle quattro rimanenti due hanno parte immaginaria positiva e due parte immaginaria negativa. La risposta corretta è (a). Vogliamo comunque determinarne i valori. Posto $w = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$, tenendo conto che $|12| = 12$, $\arg 12 = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, otteniamo

$$\begin{cases} r^6 = 12 \\ 6\vartheta = 2k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} r = 12^{1/6} \\ \vartheta = k\pi/3 \end{cases}$$

Abbiamo quindi le sei radici

$$w_k = 12^{1/6}(\cos k\pi/3 + i \sin k\pi/3), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5,$$

cioè

$$w_0 = 12^{1/6}, \quad w_1 = 12^{1/6}(1/2 + i\sqrt{3}/2), \quad w_2 = 12^{1/6}(-1/2 + i\sqrt{3}/2)$$

$$w_3 = -12^{1/6}, \quad w_4 = 12^{1/6}(-1/2 - i\sqrt{3}/2), \quad w_5 = 12^{1/6}(1/2 - i\sqrt{3}/2).$$

Le due con parte immaginaria negativa sono w_4 e w_5 .

Esercizio 4.13

Risolvere il seguente sistema nella incognita $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{cases} z^6 = i \\ \Re(z)\Im(z) < 0 \end{cases}$$

Soluzione

Risolviamo prima l'equazione $z^6 = i$. Posto $z = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$, tenendo conto che $|i| = 1$, $\arg(i) = \pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, otteniamo

$$\begin{cases} r^6 = 1 \\ 6\vartheta = \pi/2 + 2k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} r = 1 \\ \vartheta = \pi/12 + k\pi/3. \end{cases}$$

Abbiamo quindi le sei radici

$$z_k = \cos((\pi + 4k\pi)/12) + i \sin((\pi + 4k\pi)/12), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Quelle che soddisfano la condizione $\Re(z)\Im(z) < 0$ (punti del II o IV quadrante) sono:

$$z_2 = -\sqrt{1/2} + i\sqrt{1/2}, \quad z_5 = \sqrt{1/2} - i\sqrt{1/2}.$$

Esercizio 4.14

Risolvere le seguenti equazioni di variabile complessa z .

$$z^3 + 8 = 0$$

Soluzione

L'equazione da risolvere è, chiaramente,

$$z^3 = -8$$

Posto $z = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$, tenendo conto che $|-8| = 8$, $\arg(-8) = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, otteniamo

$$\begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\vartheta = \pi + 2k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} r = 2 \\ \vartheta = (2k + 1)\pi/3. \end{cases}$$

Abbiamo quindi le tre radici

$$z_k = 2 \cos((2k + 1)\pi/3) + 2i \sin((2k + 1)\pi/3), \quad k = 0, 1, 2,$$

cioè

$$z_0 = 1 + \sqrt{3}i, \quad z_1 = -2, \quad z_2 = 1 - \sqrt{3}i.$$

Esercizio 4.15

Risolvere le seguenti equazioni di variabile complessa z .

$$z^3 = -27i$$

Soluzione

Posto $z = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$, tenendo conto che $|-27i| = 27$, $\arg(-27i) = -\pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, otteniamo

$$\begin{cases} r^3 = 27 \\ 3\vartheta = -\pi/2 + 2k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} r = 3 \\ \vartheta = (4k - 1)\pi/6. \end{cases}$$

Abbiamo quindi le tre radici

$$z_k = 3 \cos((4k - 1)\pi/6) + 3i \sin((4k - 1)\pi/6), \quad k = 0, 1, 2,$$

cioè

$$z_0 = 3\sqrt{3}/2 - 3i/2, \quad z_1 = 3i, \quad z_2 = -3\sqrt{3}/2 - 3i/2.$$

Esercizio 4.16

Risolvere le seguenti equazioni di variabile complessa z .

$$z^5 + (3 + i\sqrt{3})z = 0$$

Soluzione

Abbiamo

$$z(z^4 + 3 + i\sqrt{3}) = 0$$

quindi una soluzione è $z = 0$. Le altre quattro si trovano risolvendo

$$z^4 = -3 - i\sqrt{3}.$$

Posto $z = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$, tenendo conto che

$$|-3 - i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}, \quad \arg(-3 - i\sqrt{3}) = -5\pi/6 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

otteniamo

$$\begin{cases} r^4 = 12^{1/2} \\ 4\vartheta = -5\pi/6 + 2k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} r = 12^{1/8} \\ \vartheta = -5\pi/24 + k\pi/2. \end{cases}$$

Oltre alla soluzione $z = 0$, abbiamo quindi le ulteriori quattro radici

$$z_k = 12^{1/8} \cos((12k - 5)\pi/24) + 12^{1/8}i \sin((12k - 5)\pi/24), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Esercizio 4.17

Risolvere le seguenti equazioni di variabile complessa z .

$$\left(\frac{z+i}{1+i}\right)^3 = -8i$$

Soluzione

Posto $w = (z+i)/(1+i)$, risolviamo $w^3 = -8i$. Scrivendo $w = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$, tenendo conto che $|-8i| = 8$, $\arg(-8i) = -\pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, otteniamo

$$\begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\vartheta = -\pi/2 + 2k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} r = 2 \\ \vartheta = (4k-1)\pi/6. \end{cases}$$

Abbiamo quindi le tre radici

$$w_k = 2 \cos((4k-1)\pi/6) + 2i \sin((4k-1)\pi/6), \quad k = 0, 1, 2,$$

cioè

$$w_0 = \sqrt{3} - i, \quad w_1 = 2i, \quad w_2 = -\sqrt{3} - i.$$

Tornando alla variabile z , da $z = (1+i)w - i$, le tre soluzioni dell'equazione data sono

$$z_0 = \sqrt{3} + 1 + i\sqrt{3} - 2i, \quad z_1 = -2 + i, \quad z_2 = 1 - \sqrt{3} - i\sqrt{3} - 2i.$$

Esercizio 4.18

Risolvere le seguenti equazioni di variabile complessa z .

$$\left(\frac{z-i}{i}\right)^4 = -16$$

Soluzione

Da $i^4 = 1$ abbiamo $(z-i)^4 = -16$. Posto $w = z-i$, risolviamo $w^4 = -16$. Scrivendo $w = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$, tenendo conto che $|-16| = 16$, $\arg(-16) = -\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, otteniamo

$$\begin{cases} r^4 = 16 \\ 4\vartheta = -\pi + 2k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} r = 2 \\ \vartheta = -\pi/4 + k\pi/2. \end{cases}$$

Abbiamo quindi le quattro radici

$$w_k = 2 \cos((2k-1)\pi/4) + 2i \sin((2k-1)\pi/4), \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

cioè

$$w_0 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}, \quad w_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}, \quad w_2 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}, \quad w_3 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

Tornando alla variabile z , da $z = w + i$, le quattro soluzioni dell'equazione data sono

$$z_0 = \sqrt{2} - i\sqrt{2} + i, \quad z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2} + i, \quad z_2 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} + i, \quad z_3 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} + i.$$

Esercizio 4.19

Risolvere le seguenti equazioni di variabile complessa z .

$$z^5 = -\bar{z}$$

Soluzione

L'equazione può essere vista come

$$z^5 = (-1)\bar{z}$$

Posto $z = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$, tenendo conto che $|\bar{z}| = r$, $\arg(\bar{z}) = -\vartheta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, e ricordando che $-1 = e^{i\pi}$, otteniamo

$$\begin{cases} r^5 = r \\ 5\vartheta = \pi - \vartheta + 2k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} r = 0, r = 1 \\ \vartheta = (2k+1)\pi/6. \end{cases}$$

A questo punto,

- per $r = 0$, otteniamo $z_0 = 0$;
- per $r = 1$, otteniamo le radici $z = \cos((2k+1)\pi/6) + i \sin((2k+1)\pi/6)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Esercizio 4.20

L'equazione

$$z^4 - 2z^3 + 4z^2 - 2z + 3 = 0$$

ha $z_1 = i$ per soluzione. Indicando con z_2, z_3, z_4 le altre soluzioni, si ha:

- (a) $\Im(z_1 z_2 z_3 z_4) = 0$ (b) $\Re(z_1 + z_2 + z_3 + z_4) = 0$
 (c) $\Re((z_1 + z_2 + z_3 + z_4)^{-1}) = 1/2$ (d) nessuna delle altre risposte corretta

Soluzione

L'equazione è a coefficienti reali quindi le soluzioni sono coniugate, in particolare un'altra soluzione è $z_2 = -i$. Ne segue che il polinomio

$$p(z) = z^4 - 2z^3 + 4z^2 - 2z + 3$$

è divisibile per $(z-i)(z+i)$ cioè per $z^2 + 1$. Eseguendo la divisione si ottiene

$$p(z) = (z^2 + 1)(z^2 - 2z + 3)$$

quindi abbiamo tra le soluzioni anche le radici di

$$z^2 - 2z + 3 = 0$$

che sono $z_3 = 1 - i\sqrt{2}$, $z_4 = 1 + i\sqrt{2}$.

Riassumendo, le soluzioni dell'equazione data sono

$$z_1 = i, \quad z_2 = -i, \quad z_3 = 1 - i\sqrt{2}, \quad z_4 = 1 + i\sqrt{2}.$$

Dal momento che $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 2$ e $z_1 z_2 z_3 z_4 = 3$, le risposte corrette sono (a) e (c).

Esercizio 4.21

Siano $z_h, h = 1, \dots, 6$ le soluzioni di

$$z^6 - (8 - i)z^3 - 8i = 0.$$

Si ha:

$$(a) \sum_{h=1}^6 \Re(z_h) = -1 \quad (b) \sum_{h=1}^6 \Im(z_h) = -1$$

$$(c) \sum_{h=1}^6 \Re(z_h) = 1 \quad (d) \sum_{h=1}^6 \Im(z_h) = 0$$

$$(e) \sum_{h=1}^6 \Re(z_h) = 2 \quad (f) \text{ nessuna delle altre risposte corretta}$$

Soluzione

Conviene fattorizzare in

$$(z^3 - 8)(z^3 + i) = 0$$

poi risolvere le due equazioni

$$z^3 = 8, \quad z^3 = -i$$

con l'usuale metodo più volte illustrato nelle soluzioni degli esercizi precedenti. Si ottengono i valori:

$$z_1 = 2, \quad z_2 = -1 + i\sqrt{3}, \quad z_3 = -1 - i\sqrt{3},$$

$$z_4 = \sqrt{3}/2 - i/2, \quad z_5 = i, \quad z_6 = -\sqrt{3}/2 - i/2.$$

La risposta corretta è (d).