



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Analisi Matematica 1

Esercizi, volume 1 — Logica e metodi di dimostrazione

Gli esercizi svolti della prima parte del corso, con la soluzione subito dopo ogni testo: dimostrazioni con il principio di induzione. Le schede sono di Fabio Furini e Gianluca Priori; molti esercizi sono tratti da M. Bramanti, *Esercitazioni di Analisi matematica 1*, Esculapio.

Fabio Furini

fabiofurini.github.io

Dipartimento di Ingegneria informatica, automatica e gestionale — Sapienza Università di Roma

Versione online e materiale scaricabile:
fabiofurini.github.io/analisi-matematica-1/
github.com/fabiofurini/analisi-matematica-1

Anno accademico 2026–2027

Indice

1 Principio di induzione

2



Principio di induzione

Esercizio 1.1

Dimostrare per induzione che per ogni intero $n \geq 1$, vale:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(somma dei quadrati dei primi n numeri naturali)

Soluzione

Per induzione su n .

- **Primo passo dell'induzione**

Sia $n = 1$. Allora l'asserto diventa:

$$\sum_{k=1}^1 k^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} \quad \text{cioè} \quad 1 = 1$$

che è evidentemente vero.

- **Passo induttivo**

Supponiamo che sia vero per n , e proviamolo per $(n+1)$. Per ipotesi induttiva, abbiamo:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Quindi possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\
 &= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} \\
 &= \frac{(n+1)(2n^2 + 4n + 3n + 6)}{6} = \frac{(n+1)((2n)(n+2) + 3(n+2))}{6} \\
 &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6}
 \end{aligned}$$

che è esattamente l'asserto voluto, per $n+1$.

Esercizio 1.2

Dimostrare per induzione che per ogni intero $n \geq 1$, vale

$$\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n^2 \quad \text{oppure} \quad \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$$

(somma dei primi n numeri dispari)

Soluzione

Per induzione su n .

- **Primo passo dell'induzione**

Sia $n = 1$. Allora l'asserto diventa:

$$\sum_{k=0}^0 (2k+1) = 1^2 \quad \text{cioè} \quad 1 = 1$$

che è evidentemente vero.

- **Passo induttivo**

Supponiamo che sia vero per n , e proviamolo per $(n+1)$. Per ipotesi induttiva, abbiamo:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n^2$$

Quindi possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1+1} (2k+1) &= \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) + 2n+1 \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2\end{aligned}$$

che è esattamente l'asserto voluto, per $n+1$.

Esercizio 1.3

Dimostrare per induzione che per ogni intero $n \geq 1$, vale:

$$\sum_{k=1}^n 2k = n(n+1)$$

(somma dei primi n numeri pari)

Soluzione

Per induzione su n .

- **Primo passo dell'induzione**

Sia $n = 1$. Allora l'asserto diventa:

$$\sum_{k=1}^1 2k = 1 \cdot 2 \quad \text{cioè} \quad 2 = 2$$

che è evidentemente vero.

- **Passo induttivo**

Supponiamo che sia vero per n , e proviamolo per $(n+1)$. Per ipotesi induttiva, abbiamo:

$$\sum_{k=1}^n 2k = n(n+1)$$

Quindi possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{n+1} 2k &= \sum_{k=1}^n 2k + 2(n+1) \\
 &= 2 \left(\sum_{k=1}^n k + (n+1) \right) \\
 &= 2 \left(\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \right) \\
 &= 2 \left(\frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \right) \\
 &= (n+1)(n+2) = (n+1)(n+1+1)
 \end{aligned}$$

che è esattamente l'asserto voluto, per $n+1$.

Esercizio 1.4

Dimostrare per induzione che per ogni intero $n \geq 1$, vale:

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

Soluzione

Per induzione su n .

- **Primo passo dell'induzione**

Sia $n = 1$. Allora l'asserto diventa:

$$\sum_{k=1}^1 \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{1+2}{2^1} \quad \text{cioè} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

che è evidentemente vero.

- **Passo induttivo**

Supponiamo che sia vero per n , e proviamolo per $(n+1)$. Per ipotesi induttiva, abbiamo:

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

Quindi possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
 &= 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
 &= 2 - \frac{2(n+2)}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
 &= 2 - \left(\frac{2(n+2) - n - 1}{2^{n+1}} \right) \\
 &= 2 - \left(\frac{n+3}{2^{n+1}} \right) \\
 &= 2 - \frac{(n+1) + 2}{2^{n+1}}
 \end{aligned}$$

che è esattamente l'asserto voluto, per $n+1$.

Esercizio 1.5

Dato un insieme X con n elementi, dimostrare per induzione che l'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$ ha 2^n elementi, ovvero che

$$|\mathcal{P}(X)| = 2^n \quad \text{per } n \geq 0$$

Soluzione

Per induzione su n .

- **Primo passo dell'induzione**

Sia $n = 0$. Un insieme con 0 elementi è un insieme vuoto ($\emptyset$). L'insieme delle parti di un insieme vuoto contiene solo l'insieme vuoto come elemento. Allora l'asserto diventa:

$$|\mathcal{P}(\emptyset)| = 2^0 \quad \text{cioè} \quad 1 = 1$$

che è evidentemente vero.

- **Passo induttivo**

Supponiamo l'asserto vero per un insieme di n elementi, e proviamolo per un insieme di $(n+1)$ elementi. Per ipotesi induttiva, l'insieme delle parti di un insieme di n elementi ha 2^n elementi.

Un insieme Y di $(n+1)$ elementi si può scrivere come:

$$Y = \{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\}$$

quindi:

$$\mathcal{P}(Y) = \{S : S \subseteq Y\} = \{S : S \subseteq \{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\}\}$$

I sottoinsiemi di Y o contengono l'elemento a_{n+1} o non lo contengono. Definiamo quindi l'insieme Z_a formato dai primi n elementi di Y :

$$Z_a = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \quad \text{quindi} \quad |\mathcal{P}(Z_a)| = 2^n$$

Definiamo ora il seguente insieme Z_b :

$$Z_b = \{S \cup \{a_{n+1}\} : S \subseteq \underbrace{\{a_1, a_2, \dots, a_n\}}_{=Z_a}\} = \{S \cup \{a_{n+1}\} : S \subseteq Z_a\} \quad \text{e} \quad |Z_b| = 2^n$$

dato che Z_b ha un elemento per ogni elemento di $\mathcal{P}(Z_a)$.

In altre parole, $\mathcal{P}(Z_a)$ contiene tutti i sottoinsiemi di Y in cui l'elemento a_{n+1} non è presente e Z_b contiene tutti i sottoinsiemi di Y in cui l'elemento a_{n+1} è invece presente.

Notiamo anche che gli insiemi $\mathcal{P}(Z_a)$ e Z_b sono disgiunti ovvero: $\mathcal{P}(Z_a) \cap Z_b = \emptyset$. Quindi $|\mathcal{P}(Z_a) \cup Z_b| = |\mathcal{P}(Z_a)| + |Z_b|$. Abbiamo infine:

$$|\mathcal{P}(Y)| = |\mathcal{P}(Z_a) \cup Z_b| = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$$

che è esattamente l'asserto voluto, per $n + 1$.

Esercizio 1.6

Dimostrare per induzione che per ogni intero $n \geq 1$, vale:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

(somma dei cubi dei primi n numeri naturali). Calcolare poi la somma dei cubi dei primi 10, 100 e 1000 numeri naturali (senza lo zero) e dimostrare che la somma dei cubi dei primi n numeri naturali è uguale al quadrato della somma dei primi n numeri naturali:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$$

Soluzione

Per induzione su n .

- **Primo passo dell'induzione**

Sia $n = 1$. Allora l'asserto diventa:

$$\sum_{k=1}^1 k^3 = \frac{1 + 2 + 1}{4} \quad \text{cioè} \quad 1 = 1$$

che è evidentemente vero.

• **Passo induttivo**

Supponiamo che sia vero per n , e proviamolo per $(n + 1)$. Per ipotesi induttiva, abbiamo:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}.$$

Quindi possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2 + 4n^3 + 12n^2 + 12n + 4}{4} \\ &= \frac{n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4}{4} \\ &= \frac{(n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) + 2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + (n^2 + 2n + 1)}{4} \\ &= \frac{(n+1)^4 + 2(n+1)^3 + (n+1)^2}{4} \end{aligned}$$

che è esattamente l'asserto voluto, per $n + 1$.

La somma dei cubi dei primi 10, 100 e 1000 numeri naturali (senza lo zero) vale:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} k^3 &= \frac{10^4 + 2 \cdot 10^3 + 10^2}{4} = 3025, & \sum_{k=1}^{100} k^3 &= \frac{100^4 + 2 \cdot 100^3 + 100^2}{4} = 25.502.500 \\ \sum_{k=1}^{1000} k^3 &= \frac{1000^4 + 2 \cdot 1000^3 + 1000^2}{4} = 250.500.250.000 \end{aligned}$$

Infine, la somma dei cubi dei primi n numeri naturali è uguale al quadrato della somma dei primi n numeri naturali, dato che:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \frac{n^2(n^2 + 2n + 1)}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2$$

Esercizio 1.7

Dimostrare per induzione che per ogni intero $n \geq 1$, vale:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Calcolare poi il valore della sommatoria per $n = 10$, $n = 100$ e $n = 1000$.

Soluzione

Per induzione su n .

- **Primo passo dell'induzione**

Sia $n = 1$. Allora l'asserto diventa:

$$\sum_{k=1}^1 \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1+1} \quad \text{cioè} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

che è evidentemente vero.

- **Passo induttivo**

Supponiamo che sia vero per n , e proviamolo per $(n+1)$. Per ipotesi induttiva, abbiamo:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Quindi possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{(n+1)+1} \end{aligned}$$

che è esattamente l'asserto voluto, per $n+1$.

Il valore della sommatoria per $n = 10$, $n = 100$ e $n = 1000$ è:

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{10}{11}, \quad \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{100}{101}, \quad \sum_{k=1}^{1000} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1000}{1001}$$

Esercizio 1.8

Dimostrare per induzione che per ogni intero $n \geq 1$, vale:

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{2n+3}{3} \frac{n^2+n^3}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Calcolare poi il valore della sommatoria per $n = 10$, $n = 100$ e $n = 1000$.

Soluzione

Per induzione su n .

- **Primo passo dell'induzione**

Sia $n = 1$. Allora l'asserto diventa:

$$\sum_{k=1}^1 k(k+1) = \frac{2+3+1}{3} \quad \text{cioè} \quad 2 = 2$$

che è evidentemente vero.

- **Passo induttivo**

Supponiamo che sia vero per n , e proviamolo per $(n+1)$. Per ipotesi induttiva, abbiamo:

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{2n+3n^2+n^3}{3}.$$

Quindi possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) \\ &= \sum_{k=1}^n k(k+1) + (n+1)((n+1)+1) = \frac{2n+3n^2+n^3}{3} + (n+1)(n+2) \\ &= \frac{2n+3n^2+n^3+3(n+1)(n+2)}{3} = \frac{n^3+6n^2+11n+6}{3} \\ &= \frac{2(n+1)+3(n^2+2n+1)+(n^3+3n^2+3n+1)}{3} \\ &= \frac{2(n+1)+3(n+1)^2+(n+1)^3}{3} \end{aligned}$$

che è esattamente l'asserto voluto, per $n+1$.

Il valore della sommatoria per $n = 10$, $n = 100$ e $n = 1000$ è:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} k(k+1) &= \frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{3} = 440, & \sum_{k=1}^{100} k(k+1) &= \frac{100 \cdot 101 \cdot 102}{3} = 343.400 \\ \sum_{k=1}^{1000} k(k+1) &= \frac{1000 \cdot 1001 \cdot 1002}{3} = 334.334.000 \end{aligned}$$

Esercizio 1.9

Dimostrare per induzione che per ogni intero $n \geq 1$, vale:

$$n! \geq 2^{n-1}$$

Soluzione

Per induzione su n .

- **Primo passo dell'induzione**

Sia $n = 1$. Allora l'asserto diventa:

$$1! \geq 2^{1-1} \quad \text{cioè} \quad 1 \geq 1$$

che è evidentemente vero.

- **Passo induttivo**

Supponiamo che sia vero per n , e proviamolo per $(n + 1)$. Per ipotesi induttiva, abbiamo $n! \geq 2^{n-1}$. Inoltre, per ogni $n \geq 1$:

$$(n + 1) 2^{n-1} \geq 2^n \iff n + 1 \geq \frac{2^n}{2^{n-1}} = 2 \iff n \geq 1$$

Quindi possiamo scrivere:

$$(n + 1)! = (n + 1) n! \geq (n + 1) 2^{n-1} \geq 2^n = 2^{(n+1)-1}$$

che è esattamente l'asserto voluto, per $n + 1$.

Esercizio 1.10

Dimostrare per induzione che per ogni intero $n \geq 1$, vale:

$$n^n \geq 2^{n-1} n!$$

Soluzione

Per induzione su n .

- **Primo passo dell'induzione**

Sia $n = 1$. Allora l'asserto diventa:

$$1^1 \geq 2^{1-1} \cdot 1! \quad \text{cioè} \quad 1 \geq 1$$

che è evidentemente vero.

- **Passo induttivo**

Supponiamo che sia vero per n , e proviamolo per $(n + 1)$. Per ipotesi induttiva, abbiamo $n^n \geq 2^{n-1} n!$. Inoltre, per ogni $n \geq 1$:

$$(n + 1)^n \geq 2 n^n \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq 2 \iff \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$$

e l'ultima disuguaglianza è vera per la disuguaglianza di Bernoulli, $(1+x)^m \geq 1+mx$ per ogni intero $m \geq 0$ e $x \geq -1$: con $x = \frac{1}{n}$ e $m = n$ si ha

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \frac{1}{n} = 2$$

Quindi possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}(n+1)^{n+1} &= (n+1)(n+1)^n \geq (n+1)2n^n \geq (n+1)2 \cdot 2^{n-1}n! \\ &= 2^n(n+1)! = 2^{(n+1)-1}(n+1)!\end{aligned}$$

che è esattamente l'asserto voluto, per $n+1$.

Esercizio 1.11

Dimostrare per induzione che per ogni intero $n \geq 1$, vale:

$$n! \leq n^n$$

Soluzione

Per induzione su n .

- **Primo passo dell'induzione**

Sia $n = 1$. Allora l'asserto diventa:

$$1! \leq 1^1 \quad \text{cioè} \quad 1 \leq 1$$

che è evidentemente vero.

- **Passo induttivo**

Supponiamo che sia vero per n , e proviamolo per $(n+1)$. Per ipotesi induttiva, abbiamo $n! \leq n^n$. Inoltre, per ogni $n \geq 1$:

$$(n+1)^n \geq n^n \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq 1 \iff \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1$$

e l'ultima disuguaglianza è evidentemente vera, perché $1 + \frac{1}{n} > 1$. Quindi possiamo scrivere:

$$(n+1)! = (n+1)n! \leq (n+1)n^n \leq (n+1)(n+1)^n = (n+1)^{n+1}$$

che è esattamente l'asserto voluto, per $n+1$.

Esercizio 1.12

Dimostrare per induzione che per ogni intero $n \geq 0$ il numero naturale $10^n - 1$ è divisibile per 9, ovvero che:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} : 10^n - 1 = 9m$$

Soluzione

Per induzione su n .

- **Primo passo dell'induzione**

Sia $n = 0$. Allora:

$$10^0 - 1 = 0 = 9 \cdot 0$$

e, poiché 0 è un numero naturale, l'asserto è vero.

- **Passo induttivo**

Supponiamo che sia vero per n , e proviamolo per $(n+1)$. Per ipotesi induttiva, esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $10^n - 1 = 9m$. Quindi possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} 10^{n+1} - 1 &= 10 \cdot 10^n - 1 = 10 \cdot 10^n - 10 + 9 = 10(10^n - 1) + 9 \\ &= 10(9m) + 9 = 9(10m + 1) \end{aligned}$$

e, poiché $10m + 1$ è un numero naturale, l'asserto è vero per $n + 1$.

Esercizio 1.13

Dimostrare per induzione che per ogni intero $n \geq 1$ il numero naturale $n(n+1)$ è divisibile per 2, ovvero che:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \exists m \in \mathbb{N} : n(n+1) = 2m$$

Soluzione

Per induzione su n .

- **Primo passo dell'induzione**

Sia $n = 1$. Allora:

$$1(1+1) = 2 = 2 \cdot 1$$

e, poiché 1 è un numero naturale, l'asserto è vero.

- **Passo induttivo**

Supponiamo che sia vero per n , e proviamolo per $(n+1)$. Per ipotesi induttiva, esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $n(n+1) = 2m$. Quindi possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}(n+1)((n+1)+1) &= (n+1)(n+2) = n^2 + n + 2n + 2 = n(n+1) + 2n + 2 \\ &= 2m + 2n + 2 = 2(m+n+1)\end{aligned}$$

e, poiché $m+n+1$ è un numero naturale, l'asserto è vero per $n+1$.

Esercizio 1.14

Dimostrare per induzione che per ogni intero $n \geq 2$ il numero naturale $n^3 - n$ è divisibile per 6, ovvero che:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \exists m \in \mathbb{N} : n^3 - n = 6m$$

(suggerimento: usare l'esercizio precedente).

Soluzione

Per induzione su n .

- **Primo passo dell'induzione**

Sia $n = 2$. Allora:

$$2^3 - 2 = 6 = 6 \cdot 1$$

e, poiché 1 è un numero naturale, l'asserto è vero.

- **Passo induttivo**

Supponiamo che sia vero per n , e proviamolo per $(n+1)$. Per ipotesi induttiva, esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $n^3 - n = 6m$. Inoltre, per l'esercizio precedente, $n(n+1)$ è pari: esiste $h \in \mathbb{N}$ tale che $n(n+1) = 2h$. Quindi possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}(n+1)^3 - (n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = (n^3 - n) + (3n^2 + 3n) \\ &= 6m + 3n(n+1) = 6m + 3 \cdot 2h = 6(m+h)\end{aligned}$$

e, poiché $m+h$ è un numero naturale, l'asserto è vero per $n+1$.

Esercizio 1.15

Dimostrare per induzione che per ogni intero $n \geq 0$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -\frac{2}{3}$, vale:

$$(1+x)e^n \geq \frac{1}{n+3}$$

Soluzione

Per induzione su n .

- **Primo passo dell'induzione**

Sia $n = 0$. Allora l'asserto diventa:

$$(1+x)e^0 \geq \frac{1}{0+3} \quad \text{cioè} \quad x \geq -\frac{2}{3}$$

che è vero per ipotesi.

- **Passo induttivo**

Supponiamo che sia vero per n , e proviamolo per $(n+1)$. Per ipotesi induttiva, abbiamo $(1+x)e^n \geq \frac{1}{n+3}$. Quindi, poiché $e > 1$, possiamo scrivere:

$$(1+x)e^{n+1} = e((1+x)e^n) \geq \frac{e}{n+3} \geq \frac{1}{n+3} \geq \frac{1}{(n+1)+3}$$

che è esattamente l'asserto voluto, per $n+1$.