

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Analisi Matematica 1

Volume 7 — Integrali

Il settimo volume: il calcolo integrale. L'integrale di Riemann con somme inferiori e superiori, le classi di funzioni integrabili, le proprietà dell'integrale e il teorema della media; primitive e teorema fondamentale del calcolo integrale; integrazione per sostituzione, per parti e delle funzioni razionali, aree e valor medio; integrali impropri, criteri di convergenza e criterio integrale per le serie. Definizioni, teoremi con dimostrazione, figure ed esempi svolti; gli esercizi della parte, con le soluzioni, sono nel volume Esercizi 7.

Fabio Furini
fabiofurini.github.io
Dipartimento di Ingegneria informatica, automatica e gestionale — Sapienza Università di Roma

Versione online e materiale scaricabile:
fabiofurini.github.io/analisi-matematica-1/
github.com/fabiofurini/analisi-matematica-1

Anno accademico 2026–2027

Indice

1 L'integrale di Riemann **2**
- 1.1 Partizioni e somme di Riemann . . . 2
- 1.2 L'integrale di Riemann . . . 5
- 1.3 Classi di funzioni integrabili . . . 8
- 1.4 Proprietà dell'integrale . . . 10
- 1.5 Teorema della media integrale . . . 13
- 1.6 In sintesi . . . 15

2 Teorema fondamentale del calcolo integrale **16**
- 2.1 Primitive . . . 16
- 2.2 La funzione integrale . . . 18
- 2.3 Teorema fondamentale del calcolo integrale . . . 19
- 2.4 Primitive immediate . . . 20
- 2.5 Derivata di una funzione integrale . . . 22
- 2.6 In sintesi . . . 23

3 Tecniche di integrazione e applicazioni **24**
- 3.1 Integrazione per sostituzione . . . 24
- 3.2 Integrazione per parti . . . 26
- 3.3 Integrazione delle funzioni razionali . . . 27
- 3.4 Aree di regioni piane . . . 29
- 3.5 Valor medio di una funzione . . . 30
- 3.6 In sintesi . . . 31

4 Integrali impropri **32**
- 4.1 Integrali su intervalli illimitati . . . 32
- 4.2 Integrali di funzioni illimitate . . . 34
- 4.3 Criteri di convergenza . . . 35
- 4.4 Criterio integrale per le serie . . . 38
- 4.5 In sintesi . . . 40

Capitolo 1

L'integrale di Riemann

Prerequisiti

- Da questo modulo, «Campi ordinati, estremo superiore/inferiore e assioma di continuità»: estremo superiore e inferiore di un insieme e loro esistenza in $\mathbb{R}$.
- Da questo modulo, «Sommatorie, progressioni geometriche e aritmetiche»: il simbolo di sommatoria e la somma dei primi n numeri naturali.
- Da questo modulo, «Funzioni continue» e «Teorema di Weierstrass e teorema dei valori intermedi»: continuità, massimo e minimo su un intervallo chiuso e limitato, valori intermedi.

Obiettivi

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- calcolare le somme inferiori e superiori di una funzione limitata rispetto a una partizione;
- enunciare la definizione di integrale di Riemann e interpretarlo come area con segno;
- dimostrare che le funzioni monotone e le funzioni continue su $[a,b]$ sono integrabili;
- usare linearità, additività, monotonia e la disuguaglianza $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$;
- enunciare e dimostrare il teorema della media integrale.

1.1 Partizioni e somme di Riemann

Definizione 1.1: di partizione di un intervallo

Dato un intervallo $[a,b]$, con $a < b$, si chiama ***partizione*** *di $[a,b]$ un insieme finito di punti*

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \quad \text{con} \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

I punti x_k dividono $[a,b]$ negli n intervalli $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, con $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, di ampiezza $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

- La partizione si dice **uniforme** quando tutti gli intervalli hanno la stessa ampiezza $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$, ovvero quando $x_k = a + k\,\frac{b-a}{n}$.
- Se $P \subseteq P'$, la partizione P' si dice **più fine** di P (o un **raffinamento** di P): si ottiene da P aggiungendo punti.

Definizione 1.2: di somma inferiore e di somma superiore

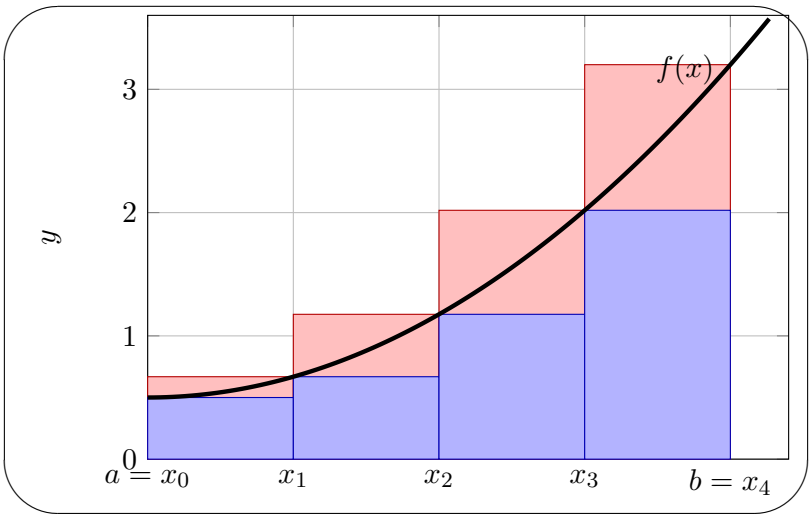
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e sia $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partizione di $[a, b]$. Posto, per ogni $k \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$m_k = \inf_{x \in I_k} f(x) \quad \text{e} \quad M_k = \sup_{x \in I_k} f(x)$$

*si chiamano **somma inferiore** e **somma superiore** di f relative a P i numeri*

$$s(f, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k\,\Delta x_k \quad \text{e} \quad S(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k\,\Delta x_k$$

- Gli estremi m_k e M_k sono numeri reali perché f è limitata. Dato che $m_k \le M_k$ per ogni k, si ha sempre $s(f, P) \le S(f, P)$.
- Se $f \ge 0$, la somma inferiore è l'area dei rettangoli **inscritti** nella regione sotto il grafico, la somma superiore quella dei rettangoli **circoscritti**.



- Nella figura, con f crescente, i rettangoli blu formano la somma inferiore e i rettangoli blu insieme ai rossi la somma superiore: l'area sotto il grafico sta in mezzo.

Esempio 1.1: somme inferiori e superiori di $f(x) = x$

Sia $f(x) = x$ in $[0,1]$ e sia P_n la partizione uniforme con $x_k = \frac{k}{n}$. Poiché f è crescente, in ogni intervallo I_k il minimo è nell'estremo sinistro e il massimo nell'estremo destro:

$$m_k = \frac{k-1}{n}, \qquad M_k = \frac{k}{n}, \qquad \Delta x_k = \frac{1}{n}$$

Con la somma dei primi n numeri naturali, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, otteniamo

$$S(f, P_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{2n}, \qquad s(f, P_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(k-1) = \frac{n-1}{2n}$$

La differenza $S(f, P_n) - s(f, P_n) = \frac{1}{n}$ tende a 0 e le due somme tendono a $\frac{1}{2}$.

Proposizione 1.3: delle somme e dei raffinamenti

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata. Se P' è più fine di P, allora

$$s(f, P) \le s(f, P') \le S(f, P') \le S(f, P)$$

Dimostrazione. Basta considerare il caso in cui P' ha un solo punto in più, $y \in (x_{k-1}, x_k)$: il caso generale si ottiene aggiungendo un punto alla volta. Le due somme differiscono solo per l'intervallo I_k, che in P' è diviso in $[x_{k-1}, y]$ e $[y, x_k]$.

L'estremo inferiore su un sottoinsieme è maggiore o uguale a quello sull'insieme intero, quindi

$$m' = \inf_{[x_{k-1}, y]} f \ge m_k \quad \text{e} \quad m'' = \inf_{[y, x_k]} f \ge m_k$$

Di conseguenza

$$m'(y - x_{k-1}) + m''(x_k - y) \ge m_k(y - x_{k-1}) + m_k(x_k - y) = m_k \Delta x_k$$

cioè $s(f, P') \ge s(f, P)$. Per le somme superiori si ragiona allo stesso modo con gli estremi superiori, che su un sottoinsieme sono minori o uguali: $S(f, P') \le S(f, P)$. □

Corollario 1.4

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata. Per ogni coppia di partizioni P_1 e P_2 di $[a,b]$ si ha

$$s(f, P_1) \le S(f, P_2)$$

Dimostrazione. La partizione $P = P_1 \cup P_2$ è più fine sia di P_1 sia di P_2. Per la Proposizione delle somme e dei raffinamenti

$$s(f, P_1) \le s(f, P) \le S(f, P) \le S(f, P_2)$$

□

- Ogni somma superiore è quindi un maggiorante dell'insieme delle somme inferiori. Per l'assioma di continuità esistono finiti

$$\sup_P s(f,P) \quad \leq \quad \inf_P S(f,P)$$

dove estremo superiore e inferiore sono presi al variare di tutte le partizioni P di $[a,b]$.

1.2 L'integrale di Riemann

Definizione 1.5: di funzione integrabile secondo Riemann

*Una funzione limitata $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ si dice **integrabile secondo Riemann** in $[a,b]$ se*

$$\sup_P s(f,P) = \inf_P S(f,P)$$

*Il valore comune si chiama **integrale** di f in $[a,b]$ e si indica con*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

- La funzione f si dice **funzione integranda**, i numeri a e b sono gli **estremi di integrazione**.
- La variabile x è **muta**: $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b f(t)\,dt$ e $\int_a^b f(u)\,du$ indicano lo stesso numero.
- Il simbolo $\int$ è una S allungata (somma) e dx ricorda le ampiezze Δx_k dei rettangoli.

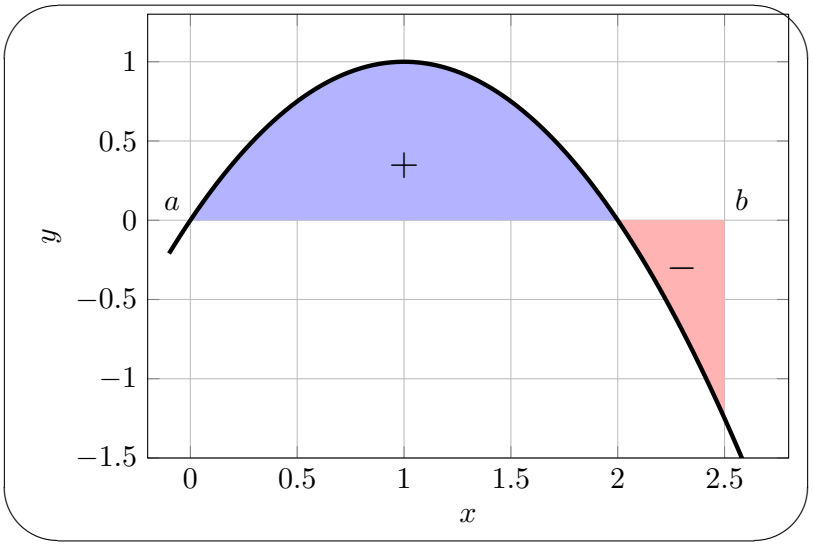
1.2.1 Interpretazione geometrica

- Se $f \geq 0$ in $[a,b]$, l'integrale è l'**area del trapezoide** (o sottografico)

$$T_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

che è compreso fra i plurirettangoli inscritti (somme inferiori) e circoscritti (somme superiori).

- Se f cambia segno, le parti sotto l'asse x contano con il segno meno: l'integrale è un'**area con segno**, cioè l'area sopra l'asse meno l'area sotto l'asse.



- Nella figura l'integrale di f in $[a,b]$ è l'area blu meno l'area rossa.

Esempio 1.2: integrale di una costante

Sia $f(x) = c$ in $[a,b]$, con $c \in \mathbb{R}$. Per ogni partizione P si ha $m_k = M_k = c$, quindi

$$s(f,P) = S(f,P) = \sum_{k=1}^{n} c\,\Delta x_k = c\,(b-a)$$

La funzione costante è integrabile e

$$\int_a^b c\,dx = c\,(b-a)$$

Se $c > 0$ è l'area del rettangolo di base $b-a$ e altezza c.

Esempio 1.3: integrale di $f(x) = x$

Riprendiamo $f(x) = x$ in $[0,1]$ e le partizioni uniformi P_n dell'Esempio sulle somme inferiori e superiori di $f(x) = x$. Per ogni n

$$\frac{n-1}{2n} = s(f,P_n) \le \sup_P s(f,P) \le \inf_P S(f,P) \le S(f,P_n) = \frac{n+1}{2n}$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ i due estremi tendono a $\frac{1}{2}$, quindi

$$\sup_P s(f,P) = \inf_P S(f,P) = \frac{1}{2} \quad \text{ovvero} \quad \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

È l'area del triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$.

Esempio 1.4: integrale di $f(x) = x^2$

Sia $f(x) = x^2$ in $[0,1]$ e P_n la partizione uniforme. La funzione è crescente in $[0,1]$, quindi $m_k = \left(\frac{k-1}{n}\right)^2$ e $M_k = \left(\frac{k}{n}\right)^2$. Usando la formula $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (si dimostra per induzione) otteniamo

$$S(f,P_n) = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}, \qquad s(f,P_n) = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

Entrambe tendono a $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ per $n \to +\infty$; ragionando come nell'esempio precedente

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

Esempio 1.5: una funzione non integrabile

La **funzione di Dirichlet** in $[0,1]$ è

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Ogni intervallo I_k contiene sia numeri razionali sia numeri irrazionali (densità di $\mathbb{Q}$ e di $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$), quindi $m_k = 0$ e $M_k = 1$ per ogni k. Per ogni partizione

$$s(D,P) = 0 \quad \text{e} \quad S(D,P) = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = 1$$

Dunque $\sup_P s(D,P) = 0 \neq 1 = \inf_P S(D,P)$: la funzione di Dirichlet è limitata ma **non** è integrabile secondo Riemann.

1.2.2 Criterio di integrabilità

Teorema 1.6: criterio di integrabilità di Riemann

Una funzione limitata $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile in $[a,b]$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione P di $[a,b]$ tale che

$$S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$$

Dimostrazione. Poniamo $I_- = \sup_P s(f,P)$ e $I^+ = \inf_P S(f,P)$; sappiamo che $I_- \le I^+$.

- ($\Leftarrow$) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste P con $s(f,P) \le I_- \le I^+ \le S(f,P)$ e $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$. Quindi $0 \le I^+ - I_- < \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$, cioè $I^+ = I_-$.
- ($\Rightarrow$) Sia $I = I_- = I^+$ e sia $\varepsilon > 0$. Per le proprietà di estremo superiore e inferiore

esistono P_1 e P_2 con

$$s(f, P_1) > I - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad S(f, P_2) < I + \frac{\varepsilon}{2}$$

Con $P = P_1 \cup P_2$, per la Proposizione delle somme e dei raffinamenti, $S(f, P) - s(f, P) \leq S(f, P_2) - s(f, P_1) < \varepsilon$.

□

1.2.3 Somme di Riemann

- Scelto in ogni intervallo I_k un punto t_k, la somma $\sigma(f, P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k$ si chiama **somma di Riemann**.
- Poiché $m_k \leq f(t_k) \leq M_k$, si ha $s(f, P) \leq \sigma(f, P) \leq S(f, P)$: se f è integrabile e $S(f, P) - s(f, P) \to 0$, anche le somme di Riemann tendono all'integrale, qualunque sia la scelta dei punti t_k.
- Per le funzioni continue con partizioni uniformi, t_k può essere l'estremo sinistro, l'estremo destro o il punto medio di I_k: è il modo in cui si approssima un integrale al calcolatore.

1.3 Classi di funzioni integrabili

Teorema 1.7: di integrabilità delle funzioni monotone

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è monotona, allora f è integrabile in $[a, b]$.

Dimostrazione. Supponiamo f non decrescente (il caso non crescente è analogo). La funzione è limitata, perché $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$. Sia P_n la partizione uniforme, con $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$. In ogni intervallo I_k si ha $m_k = f(x_{k-1})$ e $M_k = f(x_k)$, quindi

$$S(f, P_n) - s(f, P_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big) = \frac{(b-a)\,\big(f(b) - f(a)\big)}{n}$$

perché la somma è telescopica. Dato $\varepsilon > 0$, basta prendere $n > \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{\varepsilon}$ per avere $S(f, P_n) - s(f, P_n) < \varepsilon$. Per il Criterio di integrabilità di Riemann, f è integrabile. □

- Una funzione monotona può avere punti di discontinuità: per esempio la parte intera $[x]$ è integrabile in ogni intervallo $[a, b]$, anche se ha un salto in ogni numero intero.

1.3.1 Continuità uniforme

Definizione 1.8: di funzione uniformemente continua

Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice ***uniformemente continua*** *nell'intervallo I se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che*

$$x, y \in I, \quad |x - y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

- Nella continuità in ogni punto il numero δ può dipendere dal punto; nella continuità uniforme lo stesso δ va bene per tutti i punti di I.
- Una funzione uniformemente continua in I è continua in ogni punto di I.

Esempio 1.6: continuità uniforme

La funzione $f(x) = x^2$ è uniformemente continua in $[0, 1]$: per $x, y \in [0, 1]$

$$|x^2 - y^2| = |x + y|\,|x - y| \le 2\,|x - y|$$

e basta scegliere $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

La funzione $g(x) = \frac{1}{x}$ è continua in $(0, 1]$ ma non uniformemente continua: i punti $x_n = \frac{1}{n}$ e $y_n = \frac{1}{n+1}$ hanno distanza $\frac{1}{n(n+1)} \to 0$, mentre $|g(x_n) - g(y_n)| = 1$ per ogni n.

Teorema 1.9: di Heine–Cantor

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, allora f è uniformemente continua in $[a, b]$.

Dimostrazione. Per assurdo: esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $n \ge 1$ ci sono $x_n, y_n \in [a, b]$ con

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \ge \varepsilon$$

La successione $\{x_n\}$ è limitata. Per il teorema di Bolzano–Weierstrass (ogni successione limitata ha una sottosuccessione convergente: si dimostra con la stessa bisezione usata per il Teorema di Weierstrass) esiste una sottosuccessione $x_{n_j} \to c$, con $c \in [a, b]$ perché l'intervallo è chiuso.

Poiché $|x_{n_j} - y_{n_j}| < \frac{1}{n_j}$, anche $y_{n_j} \to c$. Per la continuità di f in c

$$f(x_{n_j}) - f(y_{n_j}) \to f(c) - f(c) = 0$$

in contraddizione con $|f(x_{n_j}) - f(y_{n_j})| \ge \varepsilon$ per ogni j. □

1.3.2 Integrabilità delle funzioni continue

Teorema 1.10: di integrabilità delle funzioni continue

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua, allora f è integrabile in $[a, b]$.

Dimostrazione. Per il Teorema di Weierstrass f è limitata. Sia $\varepsilon > 0$. Per il Teorema di Heine–Cantor esiste $\delta > 0$ tale che

$$|x - y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

Prendiamo una partizione P con tutti gli intervalli di ampiezza $\Delta x_k < \delta$. In ogni I_k, per il Teorema di Weierstrass, f ha minimo $m_k = f(\xi_k)$ e massimo $M_k = f(\eta_k)$, con $|\xi_k - \eta_k| \leq \Delta x_k < \delta$. Quindi $M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}$ e

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\, \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \varepsilon$$

Per il Criterio di integrabilità di Riemann, f è integrabile. □

Osservazione 1.11

Si dimostra che è integrabile anche una funzione limitata in $[a, b]$ che è continua tranne che in un numero finito di punti. Inoltre, se si modifica una funzione integrabile in un numero finito di punti, si ottiene una funzione integrabile con lo stesso integrale.

1.4 Proprietà dell'integrale

- Conviene estendere il simbolo di integrale al caso in cui gli estremi sono uguali o scambiati:

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx$$

1.4.1 Linearità

Teorema 1.12: di linearità dell'integrale

Se f e g sono integrabili in $[a, b]$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $\alpha f + \beta g$ è integrabile in $[a, b]$ e

$$\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$$

Dimostrazione. Basta trattare separatamente la somma $f+g$ e il multiplo αf.

- **Somma.** In ogni intervallo I_k si ha $\inf(f+g) \geq \inf f + \inf g$ e $\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$, quindi

$$s(f,P) + s(g,P) \leq s(f+g,P) \leq S(f+g,P) \leq S(f,P) + S(g,P)$$

  Dato $\varepsilon > 0$, per il Criterio di integrabilità di Riemann e la Proposizione delle somme e dei raffinamenti esiste una partizione P (unione di quelle che vanno bene per f e per g) con $S - s < \frac{\varepsilon}{2}$ sia per f sia per g. Allora $S(f+g,P) - s(f+g,P) < \varepsilon$ e $f+g$ è integrabile. Inoltre $\int(f+g)$ e $\int f + \int g$ stanno entrambi fra $s(f,P) + s(g,P)$ e $S(f,P) + S(g,P)$: distano meno di ε per ogni $\varepsilon > 0$, quindi coincidono.

- **Multiplo.** Se $\alpha \geq 0$, si ha $\inf(\alpha f) = \alpha \inf f$ e $\sup(\alpha f) = \alpha \sup f$, quindi $s(\alpha f, P) = \alpha\, s(f,P)$ e $S(\alpha f, P) = \alpha\, S(f,P)$. Se $\alpha < 0$, estremo inferiore e superiore si scambiano: $s(\alpha f, P) = \alpha\, S(f,P)$ e $S(\alpha f, P) = \alpha\, s(f,P)$. In entrambi i casi $\int \alpha f = \alpha \int f$.

□

1.4.2 Additività rispetto all'intervallo

Teorema 1.13: di additività rispetto all'intervallo

Siano $a < c < b$. Una funzione f è integrabile in $[a,b]$ se e solo se è integrabile in $[a,c]$ e in $[c,b]$, e in tal caso

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Dimostrazione. Per la Proposizione delle somme e dei raffinamenti possiamo usare solo partizioni P di $[a,b]$ che contengono c (aggiungere c non peggiora la differenza $S-s$). Una tale P è l'unione di una partizione P_1 di $[a,c]$ e di una partizione P_2 di $[c,b]$, e

$$s(f,P) = s(f,P_1) + s(f,P_2), \qquad S(f,P) = S(f,P_1) + S(f,P_2)$$

Quindi $S(f,P) - s(f,P)$ è la somma delle due differenze, entrambe non negative: è minore di ε se e solo se lo sono (a meno di dimezzare ε) entrambe. Per il Criterio di integrabilità di Riemann le due integrabilità sono equivalenti. Infine $\int_a^b f$ e $\int_a^c f + \int_c^b f$ stanno entrambi fra $s(f,P)$ e $S(f,P)$, che distano meno di ε: coincidono. □

- Con la convenzione sugli estremi scambiati, la formula di additività vale per a, b, c in qualunque ordine, purché f sia integrabile nell'intervallo più grande.

Esempio 1.7: additività

Sia $f(x) = x$ per $x \in [0,1]$ e $f(x) = 1$ per $x \in [1,3]$. La funzione è continua, quindi integrabile, e per l'additività

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx + \int_1^3 1\,dx = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

dove abbiamo usato l'Esempio sull'integrale di $f(x) = x$ e quello sull'integrale di una costante.

1.4.3 Monotonia e valore assoluto

Teorema 1.14: di monotonia dell'integrale

Se f e g sono integrabili in $[a,b]$ e $f(x) \le g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$, allora

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

Dimostrazione. In ogni intervallo I_k si ha $\inf f \le \inf g$, quindi $s(f,P) \le s(g,P) \le \int_a^b g$ per ogni partizione P. Passando all'estremo superiore su P, $\int_a^b f = \sup_P s(f,P) \le \int_a^b g$. □

Corollario 1.15: stime dell'integrale

Sia f integrabile in $[a,b]$.

- *Se $f(x) \ge 0$ per ogni $x \in [a,b]$, allora $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$.*
- *Se $m \le f(x) \le M$ per ogni $x \in [a,b]$, allora*

$$m\,(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M\,(b-a)$$

Dimostrazione. Si applica il Teorema di monotonia dell'integrale confrontando f con le costanti 0, m e M, il cui integrale è dato dall'Esempio sull'integrale di una costante. □

Esempio 1.8: una stima senza calcolare l'integrale

In $[0,1]$ la funzione $f(x) = e^{-x^2}$ è decrescente, quindi $e^{-1} \le f(x) \le 1$. Per il Corollario

delle stime dell'integrale

$$\frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leq 1$$

pur senza conoscere una primitiva elementare di e^{-x^2}.

Teorema 1.16: dell'integrale del valore assoluto

Se f è integrabile in $[a,b]$, allora anche $|f|$ è integrabile in $[a,b]$ e

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Dimostrazione.

- **Integrabilità di $|f|$.** Per $x, y \in I_k$ si ha $\big||f(x)|-|f(y)|\big| \leq |f(x)-f(y)| \leq M_k - m_k$. Prendendo l'estremo superiore in x e l'estremo inferiore in y, la differenza fra estremo superiore e inferiore di $|f|$ in I_k è al più $M_k - m_k$. Quindi $S(|f|,P) - s(|f|,P) \leq S(f,P) - s(f,P)$ e si conclude con il Criterio di integrabilità di Riemann.
- **Disuguaglianza.** Da $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, per il Teorema di linearità dell'integrale e il Teorema di monotonia dell'integrale,

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

che è la tesi.

□

Esempio 1.9: la disuguaglianza può essere stretta

Sia $f(x) = x$ in $[-1,1]$. Le aree con segno dei due triangoli si compensano, mentre per $|x|$ si sommano:

$$\int_{-1}^1 x\,dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0, \qquad \int_{-1}^1 |x|\,dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Quindi $\left|\int_{-1}^1 x\,dx\right| = 0 < 1 = \int_{-1}^1 |x|\,dx$.

1.5 Teorema della media integrale

Definizione 1.17: di media integrale

Sia f integrabile in $[a,b]$. Si chiama ***media integrale*** *(o valor medio) di f in $[a,b]$ il numero*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

- Se $f \geq 0$, la media integrale è l'altezza del rettangolo di base $[a, b]$ che ha la stessa area del trapezoide di f.

Teorema 1.18: della media integrale

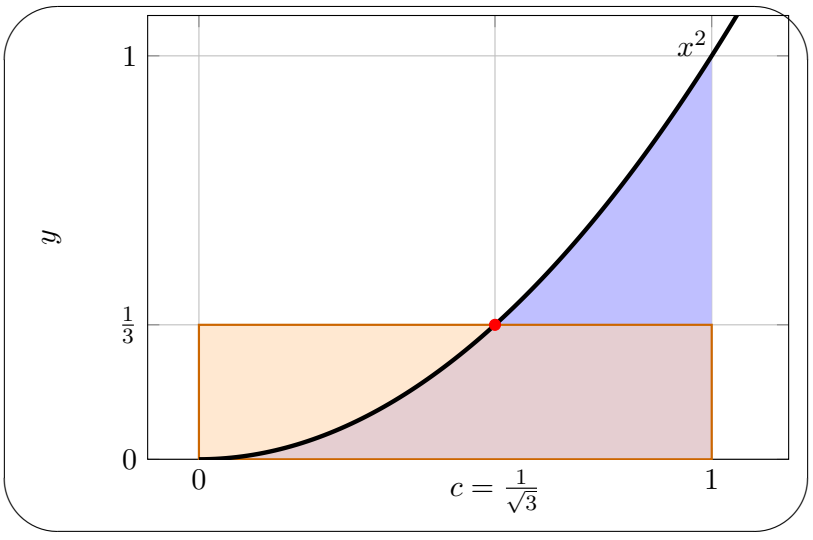
Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua, allora esiste $c \in [a, b]$ tale che

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

Dimostrazione. Per il Teorema di Weierstrass f ha minimo m e massimo M in $[a, b]$. Per il Corollario delle stime dell'integrale

$$m\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M\,(b-a) \quad \Longrightarrow \quad m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \leq M$$

La media integrale è quindi un valore compreso fra il minimo e il massimo di f. Per il Teorema dei valori intermedi f assume tutti i valori fra m e M: esiste $c \in [a, b]$ in cui $f(c)$ è uguale alla media integrale. □



Esempio 1.10: media integrale di x^2

Per l'Esempio sull'integrale di $f(x) = x^2$, la media integrale di x^2 in $[0, 1]$ è

$$\frac{1}{1-0} \int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}$$

Il punto del Teorema della media integrale si trova risolvendo $c^2 = \frac{1}{3}$ con $c \in [0, 1]$: $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Nella figura il rettangolo arancione di altezza $\frac{1}{3}$ ha la stessa area della regione blu sotto la parabola.

Osservazione 1.19

L'ipotesi di continuità non si può togliere. La funzione $f(x) = 0$ per $x \in [0, 1)$ e $f(x) = 1$ per $x \in [1, 2]$ è integrabile (è monotona) e, per l'additività e l'Osservazione sulle modifiche in un numero finito di punti, ha media integrale $\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$, un valore che f non assume.

1.6 In sintesi

In sintesi

- Per una funzione limitata e una partizione di $[a, b]$, la somma inferiore usa gli estremi inferiori e la somma superiore gli estremi superiori; raffinando la partizione la prima cresce e la seconda cala.
- f è integrabile se l'estremo superiore delle somme inferiori è uguale all'estremo inferiore delle somme superiori; equivalentemente, se $S(f, P) - s(f, P)$ si può rendere piccola a piacere.
- Se $f \geq 0$ l'integrale è l'area del trapezoide; in generale è un'area con segno.
- Le funzioni monotone e le funzioni continue su $[a, b]$ sono integrabili (per le continue serve il Teorema di Heine–Cantor); la funzione di Dirichlet non lo è.
- L'integrale è lineare, additivo rispetto all'intervallo e monotono, e $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.
- Una funzione continua assume la sua media integrale in almeno un punto di $[a, b]$.

Capitolo 2

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Prerequisiti

- Da questo modulo, «L'integrale di Riemann»: definizione e proprietà dell'integrale, teorema della media integrale.
- Da questo modulo, «Funzione derivata», «Derivate di funzioni elementari» e «Regole di calcolo delle derivate»: derivate e regola della catena.
- Da questo modulo, «Teorema del valore medio, massimi e minimi»: una funzione con derivata nulla in un intervallo è costante.
- Da questo modulo, «Teorema di De l'Hospital e derivabilità»: il teorema di De l'Hospital.

Obiettivi

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- riconoscere una primitiva e descrivere tutte le primitive di una funzione su un intervallo;
- enunciare e dimostrare le due parti del teorema fondamentale del calcolo integrale;
- calcolare integrali definiti con una primitiva e la tabella delle primitive immediate;
- derivare funzioni integrali con estremi variabili e usarle nei limiti e negli studi di funzione.

2.1 Primitive

Definizione 2.1: di primitiva

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo. Una funzione $F : I \to \mathbb{R}$ si dice ***primitiva*** *di f in I se F è derivabile in I e*

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I$$

- Trovare una primitiva è il procedimento inverso della derivazione: si cerca una funzione conoscendone la derivata.

- Se I contiene un estremo, in quel punto la derivata è unilaterale.

Esempio 2.1: primitive

- $F(x) = \frac{x^3}{3}$ è una primitiva di $f(x) = x^2$ in $\mathbb{R}$, perché $F'(x) = x^2$; lo è anche $\frac{x^3}{3} + 5$.
- $F(x) = \sin x$ è una primitiva di $f(x) = \cos x$ in $\mathbb{R}$.
- $F(x) = \log x$ è una primitiva di $f(x) = \frac{1}{x}$ in $(0, +\infty)$; $F(x) = \log(-x)$ lo è in $(-\infty, 0)$.

Teorema 2.2: di caratterizzazione delle primitive

Sia F una primitiva di f nell'intervallo I. Allora G è una primitiva di f in I se e solo se esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$G(x) = F(x) + c, \quad \forall x \in I$$

Dimostrazione.

- ($\Leftarrow$) Se $G = F + c$, allora $G' = F' + 0 = f$ in I.
- ($\Rightarrow$) La funzione $H = G - F$ ha derivata $H' = f - f = 0$ in tutto l'intervallo I. Per il corollario del teorema di Lagrange, una funzione con derivata nulla in un intervallo è costante: $H(x) = c$ per ogni $x \in I$.

□

Osservazione 2.3

L'ipotesi che I sia un intervallo è essenziale. In $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ le funzioni

$$F(x) = \log|x| \quad \text{e} \quad G(x) = \begin{cases} \log|x| + 1 & \text{se } x > 0 \\ \log|x| & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

hanno entrambe derivata $\frac{1}{x}$, ma $G - F$ non è costante: vale 1 per $x > 0$ e 0 per $x < 0$.

Definizione 2.4: di integrale indefinito

*L'insieme di tutte le primitive di f in un intervallo I si chiama **integrale indefinito** di f e si indica con $\int f(x)\,dx$. Se F è una primitiva, si scrive*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

- Dalla linearità della derivata segue la **linearità dell'integrale indefinito**: $\int(\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int f\,dx + \beta \int g\,dx$.

- Non bisogna confondere l'integrale indefinito, che è un insieme di funzioni, con l'integrale definito $\int_a^b f(x)\,dx$, che è un numero. Il teorema fondamentale del calcolo integrale mostra il legame fra i due.

2.2 La funzione integrale

Definizione 2.5: di funzione integrale

Sia f integrabile in $[a,b]$ e sia $x_0 \in [a,b]$. La funzione

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt, \quad x \in [a,b]$$

si chiama ***funzione integrale*** *di f con punto iniziale x_0.*

- La variabile di integrazione si chiama t per non confonderla con l'estremo superiore x.
- Per $x < x_0$ vale la convenzione $\int_{x_0}^{x} f = -\int_{x}^{x_0} f$; inoltre $F(x_0) = 0$.

Esempio 2.2: una funzione integrale

Sia $f(t) = t$ e $x_0 = 0$. Per $x > 0$ l'integrale $\int_0^x t\,dt$ è l'area del triangolo di base e altezza x, cioè $\frac{x^2}{2}$. Per $x < 0$

$$\int_0^x t\,dt = -\int_x^0 t\,dt = -\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2}$$

perché fra x e 0 il grafico sta sotto l'asse. Quindi $F(x) = \frac{x^2}{2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$: la funzione integrale di $f(t) = t$ è una sua primitiva.

Proposizione 2.6: di continuità della funzione integrale

Se f è integrabile in $[a,b]$ e $|f(t)| \le L$ per ogni $t \in [a,b]$, allora la funzione integrale F soddisfa

$$|F(x) - F(y)| \le L\,|x - y|, \quad \forall x, y \in [a,b]$$

In particolare F è continua in $[a,b]$.

Dimostrazione. Sia $y < x$. Per l'additività rispetto all'intervallo, $F(x) - F(y) = \int_y^x f(t)\,dt$. Per la disuguaglianza del valore assoluto e per il Corollario delle stime dell'integrale

$$|F(x) - F(y)| \le \int_y^x |f(t)|\,dt \le L\,(x - y)$$

Quando $y \to x$ il secondo membro tende a 0, quindi F è continua. □

2.3 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Teorema 2.7: fondamentale del calcolo integrale, prima parte

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e sia $x_0 \in [a, b]$. La funzione integrale

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$$

è derivabile in $[a, b]$ e

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

cioè F è una primitiva di f in $[a, b]$.

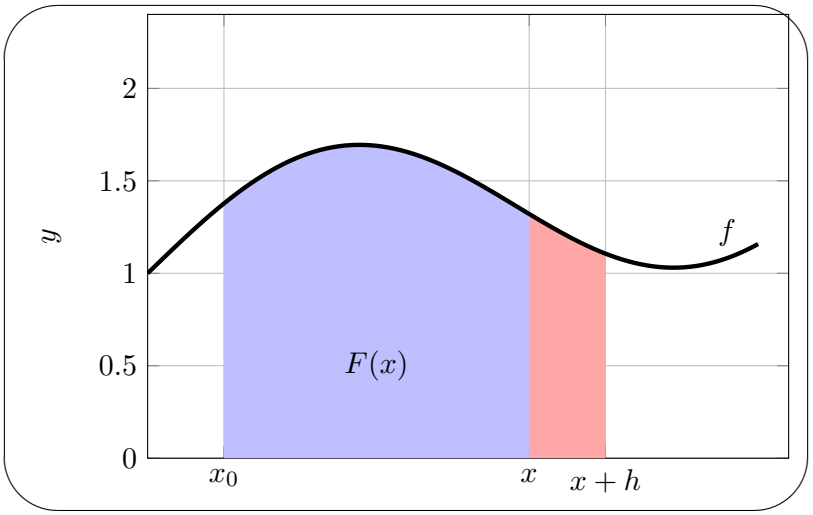
Dimostrazione. Sia $x \in [a, b]$ e sia $h \neq 0$ con $x + h \in [a, b]$. Per l'additività rispetto all'intervallo

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} f(t)\, dt$$

Il secondo membro è la media integrale di f nell'intervallo di estremi x e $x+h$ (anche per $h < 0$, scambiando gli estremi). Per il Teorema della media integrale esiste c_h compreso fra x e $x + h$ tale che

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(c_h)$$

Quando $h \to 0$ si ha $c_h \to x$ e, per la continuità di f, $f(c_h) \to f(x)$. Il limite del rapporto incrementale esiste e vale $f(x)$. □



- Nella figura l'area blu è $F(x)$ e la striscia rossa è $F(x + h) - F(x)$: per h piccolo è quasi un rettangolo di base h e altezza $f(x)$. Dividendo per h si ottiene circa $f(x)$.
- Ogni funzione continua su un intervallo ha quindi una primitiva, anche quando questa non si scrive con le funzioni elementari (per esempio e^{-x^2}).

Teorema 2.8: fondamentale del calcolo integrale, seconda parte

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e sia G una qualunque primitiva di f in $[a, b]$. Allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

Dimostrazione. Per il Teorema fondamentale del calcolo integrale, prima parte, la funzione $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è una primitiva di f in $[a, b]$. Per il Teorema di caratterizzazione delle primitive esiste $c \in \mathbb{R}$ con $G = F + c$ in $[a, b]$. Allora

$$G(b) - G(a) = \big(F(b) + c\big) - \big(F(a) + c\big) = \int_a^b f(t)\,dt - 0$$

□

- Si scrive $G(b) - G(a) = \big[G(x)\big]_a^b$. La seconda parte è chiamata anche **formula fondamentale del calcolo integrale**: per calcolare un integrale definito basta una primitiva.

Esempio 2.3: integrali definiti con una primitiva

- $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$, come avevamo ottenuto con le somme di Riemann.
- $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\,dx = \big[-\cos x\big]_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 2.$
- $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = \big[\log x\big]_1^e = 1 - 0 = 1.$
- $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = \big[-\cos x\big]_0^{2\pi} = 0$, mentre $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx = 2\int_0^\pi \sin x\,dx = 4.$

2.4 Primitive immediate

- Leggendo al contrario la tabella delle derivate delle funzioni elementari si ottengono le **primitive immediate**. Ogni riga si verifica derivando il secondo membro.

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$x^\alpha, \quad \alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$\dfrac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert + c$
e^x	$e^x + c$
$a^x, \quad a > 0,\ a \neq 1$	$\dfrac{a^x}{\log a} + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x + c$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + c$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c$
$\operatorname{Sh} x$	$\operatorname{Ch} x + c$
$\operatorname{Ch} x$	$\operatorname{Sh} x + c$

- Ogni formula vale in un intervallo in cui la funzione è definita: per esempio $\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + c$ in $(0, +\infty)$ oppure in $(-\infty, 0)$.
- Per la regola della catena, se g è derivabile, la tabella vale anche nella forma **composta**: per esempio

$$\int g'(x)\,g(x)^\alpha\,dx = \frac{g(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \log|g(x)| + c, \quad \int g'(x)\,e^{g(x)}\,dx = e^{g(x)} + c$$

Esempio 2.4: primitive immediate e linearità

- $\displaystyle\int \left(3x^2 - \frac{4}{x} + 2e^x\right) dx = x^3 - 4\log|x| + 2e^x + c.$
- $\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx = \frac{2}{3}\,x^{3/2} + c$, in $(0, +\infty)$.
- $\displaystyle\int \tan x\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\log|\cos x| + c$, con $g(x) = \cos x$.
- $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c.$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \big[\arctan x\big]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$

2.5 Derivata di una funzione integrale

Teorema 2.9: di derivazione delle funzioni integrali

Sia f continua nell'intervallo I e siano α e β funzioni derivabili in un intervallo J, a valori in I. Allora la funzione

$$G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt, \quad x \in J$$

è derivabile in J e

$$G'(x) = f\big(\beta(x)\big)\,\beta'(x) - f\big(\alpha(x)\big)\,\alpha'(x)$$

Dimostrazione. Sia F una primitiva di f in I, che esiste per il Teorema fondamentale del calcolo integrale, prima parte. Per la seconda parte

$$G(x) = F\big(\beta(x)\big) - F\big(\alpha(x)\big)$$

Per la regola della catena e per $F' = f$ si ottiene la tesi. □

Esempio 2.5: derivate di funzioni integrali

- Se $G(x) = \displaystyle\int_1^{x^2} e^{t^2}\,dt$, allora $G'(x) = e^{(x^2)^2} \cdot 2x = 2x\,e^{x^4}$.
- Se $G(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{1}{1+t^2}\,dt$, allora $G'(x) = \frac{3}{1+9x^2} - \frac{1}{1+x^2}$.

Esempio 2.6: un limite con una funzione integrale

Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \sin(t^2)\,dt$$

La funzione $\sin(t^2)$ non ha una primitiva elementare, ma il numeratore $F(x) = \int_0^x \sin(t^2)\,dt$ tende a $F(0) = 0$ ed è derivabile con $F'(x) = \sin(x^2)$. Si ha una forma $\frac{0}{0}$ e, per il Teorema di De l'Hospital e il limite notevole del seno,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{3x^2} = \frac{1}{3} \quad \text{quindi} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \sin(t^2)\,dt = \frac{1}{3}$$

Esempio 2.7: studio di una funzione integrale

Sia $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$, $x \in \mathbb{R}$.

- **Monotonia.** $F'(x) = e^{-x^2} > 0$: F è crescente in $\mathbb{R}$ e $F(0) = 0$, quindi $F(x) > 0$ per

$x > 0$ e $F(x) < 0$ per $x < 0$.

- **Concavità.** $F''(x) = -2x\,e^{-x^2}$: F è convessa in $(-\infty, 0]$, concava in $[0, +\infty)$ e ha un flesso in $x = 0$, con tangente $y = x$.
- **Simmetria.** La funzione $H(x) = F(x) + F(-x)$ ha derivata $H'(x) = e^{-x^2} - e^{-x^2} = 0$, quindi è costante e vale $H(0) = 0$: F è dispari.

2.6 In sintesi

In sintesi

- Una primitiva di f in un intervallo è una funzione con derivata f; due primitive sullo stesso intervallo differiscono per una costante.
- La funzione integrale $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ è continua; se f è continua, F è derivabile e $F' = f$ (prima parte del teorema fondamentale).
- Se G è una primitiva della funzione continua f, allora $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$ (seconda parte).
- Le primitive immediate si ottengono leggendo al contrario la tabella delle derivate, anche nella forma composta con $g'(x)$.
- $\frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt = f(\beta(x))\,\beta'(x) - f(\alpha(x))\,\alpha'(x)$: serve nei limiti (con De l'Hospital) e negli studi di funzioni integrali.

Capitolo 3

Tecniche di integrazione e applicazioni

Prerequisiti

- Da questo modulo, «Teorema fondamentale del calcolo integrale»: primitive, formula fondamentale del calcolo integrale, primitive immediate.
- Da questo modulo, «Regole di calcolo delle derivate»: derivata del prodotto e della funzione composta.
- Da questo modulo, «Limiti di polinomi e funzioni razionali»: polinomi, radici e funzioni razionali.
- Da questo modulo, «L'integrale di Riemann»: area del trapezoide e media integrale.

Obiettivi

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- dimostrare e usare le formule di integrazione per sostituzione e per parti, per integrali indefiniti e definiti;
- integrare una funzione razionale con la divisione e la decomposizione in fratti semplici;
- calcolare l'area di una regione compresa fra due grafici;
- calcolare il valor medio di una funzione su un intervallo e interpretarlo.

3.1 Integrazione per sostituzione

Teorema 3.1: di integrazione per sostituzione

Sia f continua nell'intervallo I, sia F una sua primitiva e sia $g : J \to I$ derivabile con derivata continua nell'intervallo J. Allora

$$i) \quad \int f\big(g(x)\big)\, g'(x)\, dx = F\big(g(x)\big) + c$$

$$ii) \quad \int_a^b f\big(g(x)\big)\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\, dt, \quad \forall a, b \in J$$

Dimostrazione.
- *i)* Per la regola della catena $\big(F(g(x))\big)' = F'\big(g(x)\big)\,g'(x) = f\big(g(x)\big)\,g'(x)$: la funzione $F \circ g$ è una primitiva dell'integranda.
- *ii)* L'integranda a sinistra è continua. Per la formula fondamentale del calcolo integrale e per *i)* entrambi i membri valgono $F\big(g(b)\big) - F\big(g(a)\big)$.

□

- In pratica si pone $t = g(x)$ e si sostituisce formalmente $dt = g'(x)\,dx$. Negli integrali definiti cambiano anche gli estremi: $x = a$ diventa $t = g(a)$, $x = b$ diventa $t = g(b)$.

Esempio 3.1: sostituzione

- $\displaystyle\int x\,e^{x^2}\,dx$: con $t = x^2$, $dt = 2x\,dx$, si ha $\displaystyle\frac{1}{2}\int e^t\,dt = \frac{1}{2}\,e^{x^2} + c$.
- $\displaystyle\int \cos x\,\sin^3 x\,dx$: con $t = \sin x$, $dt = \cos x\,dx$, si ha $\displaystyle\int t^3\,dt = \frac{\sin^4 x}{4} + c$.
- $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx$: con $t = 1 + x^2$, $dt = 2x\,dx$, gli estremi diventano $t = 1$ e $t = 2$:

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\,t^{3/2}\right]_1^2 = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

Osservazione 3.2: cambio di variabile

La formula ii) si usa anche da destra verso sinistra: per calcolare $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ si pone $x = \varphi(t)$, con φ derivabile con derivata continua e invertibile, e

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt$$

Per un integrale indefinito, alla fine si torna alla variabile x con $t = \varphi^{-1}(x)$.

Esempio 3.2: cambio di variabile

- $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$, per $x > 0$: con $x = t^2$, $t = \sqrt{x} > 0$, $dx = 2t\,dt$,

$$\int \frac{2t^2}{1+t^2}\,dt = 2\int\left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = 2t - 2\arctan t + c = 2\sqrt{x} - 2\arctan\sqrt{x} + c$$

- $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$: con $x = \sin t$, $t \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right]$, si ha $dx = \cos t\,dt$ e $\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$

(perché $\cos t \geq 0$). Usando $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$,

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

È l'area di un quarto del cerchio di raggio 1.

3.2 Integrazione per parti

Teorema 3.3: di integrazione per parti

Siano f e g derivabili con derivata continua nell'intervallo I. Allora

$$i) \quad \int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$$

$$ii) \quad \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = \big[f(x)\,g(x)\big]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx, \quad \forall a,b \in I$$

Dimostrazione. Per la regola di derivazione del prodotto $(f\,g)' = f'\,g + f\,g'$: la funzione $f\,g$ è una primitiva di $f'\,g + f\,g'$. Per la linearità dell'integrale indefinito

$$f(x)\,g(x) + c = \int f'(x)\,g(x)\,dx + \int f(x)\,g'(x)\,dx$$

che è $i)$. Per $ii)$ si integra $(f\,g)' = f'\,g + f\,g'$ fra a e b con la formula fondamentale del calcolo integrale e la linearità. □

- f si chiama **fattore finito** e g' **fattore differenziale**. Conviene scegliere come f il fattore che si semplifica derivando (un polinomio, un logaritmo, un'arcotangente) e come g' quello di cui si conosce una primitiva.

Esempio 3.3: per parti

- $\int x\,e^x\,dx$: con $f = x$, $g' = e^x$, si ha $x\,e^x - \int e^x\,dx = (x-1)\,e^x + c$.
- $\int \log x\,dx$, per $x > 0$: con $f = \log x$, $g' = 1$, si ha $x\log x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x\log x - x + c$.
- $\int \arctan x\,dx$: con $f = \arctan x$, $g' = 1$, si ha $x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c$.

- $\int_0^\pi x \sin x \, dx$: con $f = x$, $g' = \sin x$,

$$\int_0^\pi x \sin x \, dx = \big[-x \cos x \big]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x \, dx = \pi + \big[\sin x \big]_0^\pi = \pi$$

Esempio 3.4: integrale che ritorna

Sia $I = \int e^x \sin x \, dx$. Integrando due volte per parti, con $g' = e^x$ entrambe le volte,

$$I = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx \right) = e^x (\sin x - \cos x) - I$$

Ricavando I dall'uguaglianza (a meno della costante):

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x \, (\sin x - \cos x)}{2} + c$$

3.3 Integrazione delle funzioni razionali

- Vogliamo calcolare $\int \frac{P(x)}{Q(x)} \, dx$ con P e Q polinomi. Se $\deg P \geq \deg Q$, si divide: $P = A\,Q + R$ con $\deg R < \deg Q$, e

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

  Il polinomio A si integra subito; resta una funzione razionale **propria**, con il grado del numeratore minore di quello del denominatore.

3.3.1 Denominatore di primo e di secondo grado

- **Primo grado**: $\displaystyle\int \frac{1}{x - x_1} \, dx = \log |x - x_1| + c$.
- **Secondo grado**, $Q(x) = x^2 + px + q$ con discriminante $\Delta = p^2 - 4q$:
  - $\Delta > 0$: $Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)$ e si cercano A, B con $\dfrac{R(x)}{Q(x)} = \dfrac{A}{x - x_1} + \dfrac{B}{x - x_2}$;
  - $\Delta = 0$: $Q(x) = (x - x_1)^2$ e $\dfrac{R(x)}{Q(x)} = \dfrac{A}{x - x_1} + \dfrac{B}{(x - x_1)^2}$, con $\displaystyle\int \frac{dx}{(x - x_1)^2} = -\frac{1}{x - x_1} + c$;
  - $\Delta < 0$: si completa il quadrato, $Q(x) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + k^2$ con $k^2 = -\frac{\Delta}{4}$, e si scrive il numeratore come multiplo di $Q'(x) = 2x + p$ più una costante.
- Nel caso $\Delta < 0$ servono le due primitive

$$\int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} \, dx = \log(x^2 + px + q) + c, \qquad \int \frac{dx}{(x + p/2)^2 + k^2} = \frac{1}{k} \arctan \frac{x + p/2}{k} + c$$

Osservazione 3.4: decomposizione in fratti semplici

Si dimostra che ogni polinomio reale Q è il prodotto di una costante, di fattori di primo grado $(x-a)$ e di fattori di secondo grado x^2+px+q con $\Delta<0$, eventualmente ripetuti. Una funzione razionale propria $\frac{R}{Q}$ è la somma di ***fratti semplici****: per ogni fattore $(x-a)^m$ i termini $\frac{A_1}{x-a}+\cdots+\frac{A_m}{(x-a)^m}$, per ogni fattore x^2+px+q (non ripetuto) un termine $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$. Le costanti si trovano uguagliando i numeratori.*

Esempio 3.5: funzioni razionali

- **Divisione.** $x^3+x+1 = x(x^2+1)+1$, quindi $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1}\,dx = \int\left(x+\frac{1}{x^2+1}\right)dx = \frac{x^2}{2}+\arctan x+c.$
- $\Delta>0$. $\displaystyle\frac{1}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$ dà $1=A(x+1)+B(x-1)$: con $x=1$ e $x=-1$ si ottiene $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$, e
$$\int\frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+c$$
- $\Delta=0$. $2x+3=2(x+1)+1$, quindi $\displaystyle\int\frac{2x+3}{(x+1)^2}\,dx=\int\left(\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx = 2\log|x+1|-\frac{1}{x+1}+c.$
- $\Delta<0$. $x^2+2x+5=(x+1)^2+4$ e $x+3=\frac{1}{2}(2x+2)+2$, quindi
$$\int\frac{x+3}{x^2+2x+5}\,dx=\frac{1}{2}\log(x^2+2x+5)+\arctan\frac{x+1}{2}+c$$

Esempio 3.6: un fattore ripetuto e un integrale definito

- $\displaystyle\frac{1}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$ dà $1=A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx$. Con $x=0$: $A=1$; con $x=-1$: $C=-1$; confrontando i coefficienti di x^2: $A+B=0$, cioè $B=-1$. Quindi
$$\int\frac{dx}{x(x+1)^2}=\log|x|-\log|x+1|+\frac{1}{x+1}+c$$
- Con la primitiva dell'esempio precedente,
$$\int_2^3\frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\left[\log\frac{x-1}{x+1}\right]_2^3=\frac{1}{2}\left(\log\frac{1}{2}-\log\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\log\frac{3}{2}$$

3.4 Aree di regioni piane

Proposizione 3.5: dell'area fra due grafici

Siano f e g continue in $[a,b]$ con $f(x) \le g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$. L'area della regione

$$D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ f(x) \le y \le g(x)\big\}$$

è

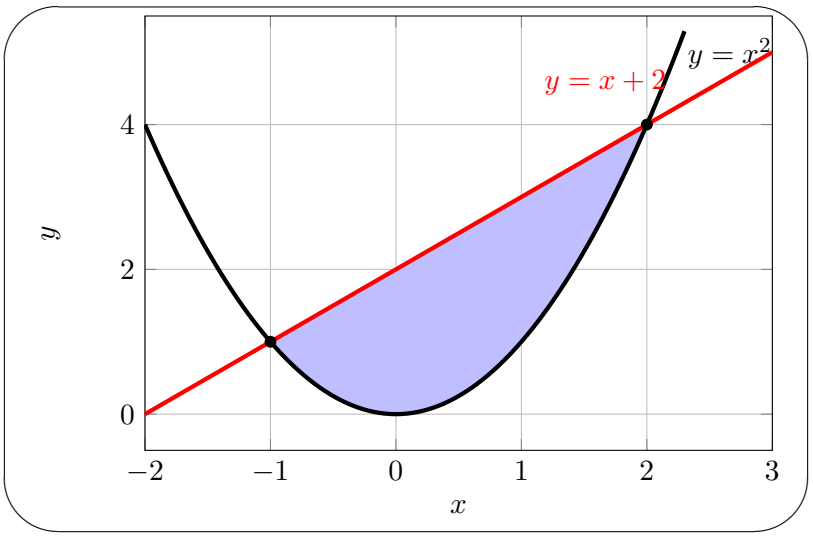
$$\text{Area}(D) = \int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,dx$$

Dimostrazione. Per il Teorema di Weierstrass f è limitata inferiormente: esiste una costante c con $f + c \ge 0$ in $[a,b]$. Traslare verso l'alto di c non cambia l'area, e la regione traslata è il trapezoide di $g+c$ privato di quello di $f+c$. Per l'interpretazione geometrica dell'integrale e per la linearità

$$\text{Area}(D) = \int_a^b (g+c)\,dx - \int_a^b (f+c)\,dx = \int_a^b (g-f)\,dx$$

□

- L'area della regione compresa fra il grafico di f e l'asse x è $\int_a^b |f(x)|\,dx$: si divide $[a,b]$ negli intervalli in cui f ha segno costante.
- Se i due grafici si incrociano, l'area fra di essi è $\int_a^b |g(x) - f(x)|\,dx$: si cercano prima i punti di intersezione.



Esempio 3.7: area fra una parabola e una retta

Calcoliamo l'area della regione compresa fra $y = x^2$ e $y = x + 2$ (in blu nella figura). Le intersezioni si trovano da $x^2 = x + 2$: $x = -1$ e $x = 2$. In $[-1, 2]$ la retta sta sopra la parabola, quindi

$$\text{Area} = \int_{-1}^{2} \left(x + 2 - x^2\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{10}{3} - \left(-\frac{7}{6}\right) = \frac{9}{2}$$

Esempio 3.8: grafici che si incrociano

Calcoliamo l'area fra $y = \sin x$ e $y = \cos x$ per $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. I grafici si incrociano in $x = \frac{\pi}{4}$: prima sta sopra il coseno, poi il seno. Quindi

$$\text{Area} = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x)\, dx$$

$$= \big[\sin x + \cos x\big]_0^{\pi/4} + \big[-\cos x - \sin x\big]_{\pi/4}^{\pi/2} = (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2} - 2$$

Esempio 3.9: area sotto il logaritmo

In $[1, e]$ si ha $\log x \geq 0$. Con la primitiva trovata per parti,

$$\text{Area} = \int_1^e \log x\, dx = \big[x \log x - x\big]_1^e = (e - e) - (0 - 1) = 1$$

3.5 Valor medio di una funzione

- Il valor medio di f in $[a, b]$ è la media integrale $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$: ora la sappiamo calcolare con una primitiva.
- È la naturale estensione della media aritmetica $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$: con la partizione uniforme, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) = \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^n f(x_k)\, \frac{b-a}{n}$ è una somma di Riemann divisa per $b - a$.

Esempio 3.10: valori medi

- Il valor medio di $\sin x$ in $[0, \pi]$ è $\dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi \sin x\, dx = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}64$.
- Il valor medio di x^2 in $[0, 3]$ è $\dfrac{1}{3} \left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^3 = 3$; come prevede il Teorema della media integrale è assunto in $c = \sqrt{3} \in [0, 3]$.
- Se un punto si muove con velocità $v(t) = 3t^2$ (metri al secondo) per $t \in [0, 2]$, lo spazio percorso è $\int_0^2 3t^2\, dt = 8$ metri e la velocità media è $\frac{8}{2} = 4$ metri al secondo.

3.6 In sintesi

In sintesi

- **Sostituzione**: $\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$; con $t = g(x)$ cambiano integranda, differenziale ed estremi. Letta al contrario è il cambio di variabile $x = \varphi(t)$.
- **Per parti**: $\int f\,g' = f\,g - \int f'\,g$; si deriva il fattore che si semplifica. A volte l'integrale ritorna e si ricava da un'equazione.
- **Funzioni razionali**: divisione se serve, poi fratti semplici secondo i fattori del denominatore; i fattori di secondo grado con $\Delta < 0$ danno un logaritmo e un'arcotangente.
- L'area fra due grafici è $\int_a^b |g - f|$, dopo aver trovato le intersezioni.
- Il valor medio $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$ estende la media aritmetica: è la velocità media se f è una velocità.

Capitolo 4

Integrali impropri

Prerequisiti

- Da questo modulo, «Teorema fondamentale del calcolo integrale» e «Tecniche di integrazione e applicazioni»: calcolo di integrali definiti con le primitive.
- Da questo modulo, «Limiti notevoli e stime asintotiche» e «Funzioni monotone su un intervallo e invertibilità»: equivalenze asintotiche e limiti delle funzioni monotone.
- Da questo modulo, «Serie numeriche a termini non negativi»: criteri del confronto e serie armonica generalizzata.

Obiettivi

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- definire l'integrale improprio su un intervallo illimitato e di una funzione illimitata, e calcolarlo con il limite;
- stabilire il carattere degli integrali notevoli $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ e $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$;
- enunciare, dimostrare e usare i criteri del confronto, del confronto asintotico e della convergenza assoluta;
- usare il criterio integrale per studiare una serie a termini positivi.

- L'integrale di Riemann è definito per funzioni limitate su intervalli chiusi e limitati. In questo capitolo lo estendiamo con un limite a intervalli illimitati e a funzioni illimitate.

4.1 Integrali su intervalli illimitati

Definizione 4.1: di integrale improprio su un intervallo illimitato

Sia f continua in $[a, +\infty)$. Si chiama ***integrale improprio*** *di f in $[a, +\infty)$ il limite*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\omega \to +\infty} \int_a^{\omega} f(x)\,dx$$

Se il limite è finito l'integrale si dice ***convergente****, se è $+\infty$ o $-\infty$ si dice* ***divergente****; se il limite non esiste l'integrale* ***non esiste****.*

- Allo stesso modo $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\omega \to -\infty} \int_{\omega}^{b} f(x)\,dx$ per f continua in $(-\infty, b]$.
- Per f continua in $\mathbb{R}$ si fissa $c \in \mathbb{R}$ e si pone $\int_{-\infty}^{+\infty} f = \int_{-\infty}^{c} f + \int_{c}^{+\infty} f$: l'integrale converge se convergono **entrambi** gli integrali, e il valore non dipende da c.
- Se $\int_a^{+\infty} f$ converge si dice anche che f è **integrabile in senso improprio** in $[a, +\infty)$.

Esempio 4.1: integrali impropri su intervalli illimitati

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{\omega \to +\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^{\omega} = \lim_{\omega \to +\infty} \left(1 - e^{-\omega}\right) = 1$: converge.
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos x\,dx$: $\int_0^{\omega} \cos x\,dx = \sin \omega$ non ha limite per $\omega \to +\infty$, quindi l'integrale non esiste.
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\omega \to -\infty} \left[\arctan x\right]_{\omega}^{0} + \lim_{\omega \to +\infty} \left[\arctan x\right]_0^{\omega} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$

Teorema 4.2: dell'integrale improprio notevole all'infinito

Sia $p \in \mathbb{R}$. L'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ converge se e solo se $p > 1$, e in tal caso

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}$$

Per $p \leq 1$ diverge a $+\infty$.

Dimostrazione.

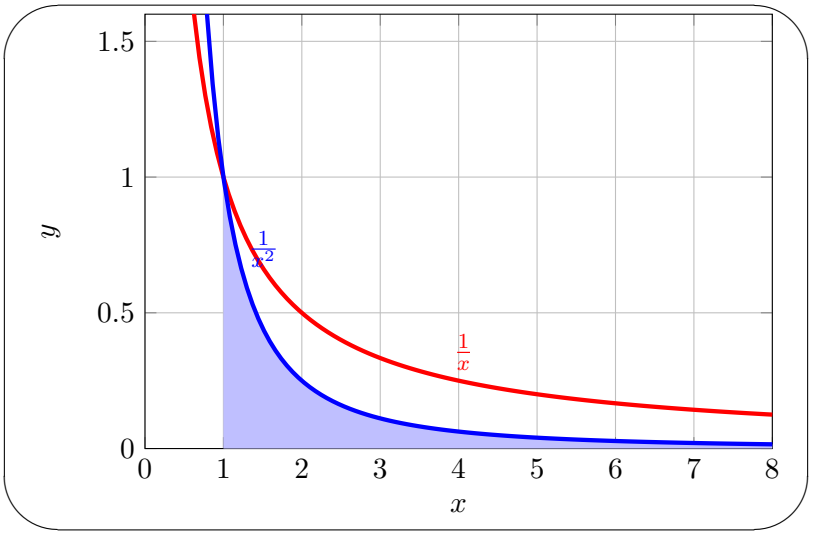
- Per $p \neq 1$:

$$\int_1^{\omega} \frac{dx}{x^p} = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^{\omega} = \frac{\omega^{1-p} - 1}{1-p}$$

  Se $p > 1$, l'esponente $1-p$ è negativo e $\omega^{1-p} \to 0$: il limite è $\frac{-1}{1-p} = \frac{1}{p-1}$. Se $p < 1$, $\omega^{1-p} \to +\infty$ e l'integrale diverge.

- Per $p = 1$: $\int_1^{\omega} \frac{dx}{x} = \log \omega \to +\infty$.

□



- Nella figura l'area blu sotto $\frac{1}{x^2}$ in $[1, +\infty)$ è finita e vale 1, mentre l'area sotto $\frac{1}{x}$ è infinita: i due grafici si somigliano, ma $\frac{1}{x^2}$ tende a zero abbastanza in fretta.

4.2 Integrali di funzioni illimitate

Definizione 4.3: di integrale improprio di una funzione illimitata

Sia f continua in $(a, b]$. Si chiama ***integrale improprio*** *di f in $(a, b]$ il limite*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

con la stessa terminologia: convergente, divergente, non esiste.

- Interessa il caso in cui f è illimitata vicino ad a (se f si prolunga con continuità in a, il limite è l'integrale di Riemann del prolungamento).
- Allo stesso modo per f continua in $[a, b)$ si pone $\int_a^b f = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f$. Se i punti critici sono più d'uno (entrambi gli estremi, un punto interno, un estremo infinito) si spezza l'intervallo: l'integrale converge se convergono tutti i pezzi.

Teorema 4.4: dell'integrale improprio notevole in zero

Sia $p \in \mathbb{R}$. L'integrale $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ converge se e solo se $p < 1$, e in tal caso

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}$$

Per $p \geq 1$ diverge a $+\infty$.

Dimostrazione.

- Per $p \neq 1$:
$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1-\varepsilon^{1-p}}{1-p}$$
Se $p<1$, $\varepsilon^{1-p} \to 0$ per $\varepsilon \to 0^+$ e il limite è $\frac{1}{1-p}$. Se $p>1$, $\varepsilon^{1-p} \to +\infty$ e l'integrale diverge.
- Per $p=1$: $\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = -\log\varepsilon \to +\infty$.

□

- I due integrali notevoli si comportano in modo opposto: all'infinito serve $p>1$, in zero serve $p<1$. Con il cambio di variabile $t = x-a$ si vede che $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ converge se e solo se $p<1$.

Esempio 4.2: integrali di funzioni illimitate

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ (Teorema dell'integrale improprio notevole in zero con $p=\frac{1}{2}$).
- $\displaystyle\int_0^1 \log x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \big[x\log x - x\big]_\varepsilon^1 = -1 - \lim_{\varepsilon\to 0^+}(\varepsilon\log\varepsilon - \varepsilon) = -1$, perché $\varepsilon\log\varepsilon \to 0$.
- $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{x\log^2 x}$: con $t = \log x$ una primitiva è $-\frac{1}{\log x}$, quindi
$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x\log^2 x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(-\frac{1}{\log\frac{1}{2}} + \frac{1}{\log\varepsilon}\right) = \frac{1}{\log 2}$$

Attenzione ai punti in cui la funzione è illimitata **dentro** l'intervallo. Il calcolo $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \big[-\frac{1}{x}\big]_{-1}^1 = -2$ è sbagliato: l'integranda è positiva e non è definita in 0. Spezzando in 0, $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ diverge (con $p=2$), quindi $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = +\infty$.

4.3 Criteri di convergenza

- Spesso non serve il valore di un integrale improprio, ma solo sapere se converge, anche quando una primitiva non si sa scrivere. Come per le serie, per le funzioni non negative ci sono criteri di confronto.

Osservazione 4.5: funzioni non negative

Se f è continua e non negativa in $[a,+\infty)$, la funzione $\omega \mapsto \int_a^\omega f(x)\,dx$ è non decrescente. Per il teorema di monotonia delle funzioni il suo limite per $\omega \to +\infty$ esiste: l'integrale ***converge oppure diverge a*** *$+\infty$, e converge se e solo se $\int_a^\omega f$ è limitato.*

Teorema 4.6: del criterio del confronto per gli integrali impropri

Siano f e g continue in $[a, +\infty)$ con $0 \le f(x) \le g(x)$ per ogni $x \ge a$. Allora:

$$i) \quad \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ convergente} \quad \Rightarrow \quad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ convergente}$$

$$ii) \quad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ divergente} \quad \Rightarrow \quad \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ divergente}$$

Dimostrazione. Per il Teorema di monotonia dell'integrale, per ogni $\omega \ge a$

$$\int_a^{\omega} f(x)\,dx \le \int_a^{\omega} g(x)\,dx \le \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

dove l'ultima disuguaglianza vale perché la funzione integrale di $g \ge 0$ è non decrescente. Se $\int_a^{+\infty} g$ converge, $\int_a^{\omega} f$ è limitato e per l'Osservazione sulle funzioni non negative $\int_a^{+\infty} f$ converge: è $i)$. La $ii)$ è la contronominale di $i)$, perché entrambi gli integrali convergono o divergono a $+\infty$. □

Teorema 4.7: del criterio del confronto asintotico per gli integrali impropri

Siano f e g continue e positive in $[a, +\infty)$ e sia

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \quad \text{con} \quad 0 < \ell < +\infty$$

(in particolare se $f(x) \sim g(x)$ per $x \to +\infty$). Allora $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ sono entrambi convergenti o entrambi divergenti.

Dimostrazione. Per la definizione di limite con $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$, esiste $x_1 \ge a$ tale che

$$\frac{\ell}{2} \le \frac{f(x)}{g(x)} \le \frac{3\ell}{2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\ell}{2}\,g(x) \le f(x) \le \frac{3\ell}{2}\,g(x), \quad \forall x \ge x_1$$

Per il Teorema del criterio del confronto applicato in $[x_1, +\infty)$: se $\int g$ converge, converge $\int f$ (seconda disuguaglianza); se $\int g$ diverge, diverge $\int f$ (prima disuguaglianza). Infine $\int_a^{x_1} f$ e $\int_a^{x_1} g$ sono integrali di funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato, quindi finiti: non cambiano il carattere. □

- Se il limite è $\ell = 0$ vale solo un'implicazione: se $\int_a^{+\infty} g$ converge, converge anche $\int_a^{+\infty} f$ (perché definitivamente $f \le g$).
- Gli stessi criteri valgono per le funzioni illimitate in $(a, b]$, con i limiti per $x \to a^+$; il confronto tipico è con $\frac{1}{(x-a)^p}$.

Esempio 4.3: confronto asintotico all'infinito

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x^3+2}\,dx$: per $x \to +\infty$, $\frac{x+1}{x^3+2} \sim \frac{1}{x^2}$, e $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge: l'integrale converge.
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$: per $x \to +\infty$, $\frac{1}{\sqrt{x^2+x}} \sim \frac{1}{x}$: l'integrale diverge.
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$: per $x \geq 1$ si ha $x^2 \geq x$ e quindi $0 < e^{-x^2} \leq e^{-x}$; poiché $\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$ converge, per confronto converge $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$, e $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ è finito: l'integrale converge.

Esempio 4.4: confronto asintotico in zero

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx$: per $x \to 0^+$, $\sin x \sim x$ e $\frac{\sin x}{x^{3/2}} \sim \frac{1}{x^{1/2}}$; poiché $\frac{1}{2} < 1$, l'integrale converge.
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x-1}$: per $x \to 0^+$, $e^x - 1 \sim x$ e $\frac{1}{e^x-1} \sim \frac{1}{x}$: l'integrale diverge.

Esempio 4.5: un integrale con un parametro

Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^2}\,dx$? L'integranda è continua e positiva in $(0,+\infty)$; spezziamo in $x = 1$.

- In $(0,1]$: $\frac{x^\alpha}{1+x^2} \sim x^\alpha = \frac{1}{x^{-\alpha}}$ per $x \to 0^+$; converge se e solo se $-\alpha < 1$, cioè $\alpha > -1$.
- In $[1,+\infty)$: $\frac{x^\alpha}{1+x^2} \sim \frac{1}{x^{2-\alpha}}$ per $x \to +\infty$; converge se e solo se $2-\alpha > 1$, cioè $\alpha < 1$.

L'integrale converge se e solo se $-1 < \alpha < 1$.

Teorema 4.8: della convergenza assoluta per gli integrali impropri

Sia f continua in $[a,+\infty)$. Se $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge, allora anche $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge e

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)\,dx\right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$$

Dimostrazione. Si ha $0 \leq f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)|$. Per il Teorema del criterio del confronto $\int_a^{+\infty} (f + |f|)$ converge. Allora converge anche

$$\int_a^{\omega} f(x)\,dx = \int_a^{\omega} \big(f(x) + |f(x)|\big)\,dx - \int_a^{\omega} |f(x)|\,dx$$

perché entrambi i termini hanno limite finito per $\omega \to +\infty$. La disuguaglianza segue

passando al limite in $\left|\int_a^\omega f\right| \le \int_a^\omega |f|$. □

Esempio 4.6: convergenza assoluta

L'integranda di $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ cambia segno infinite volte, quindi i criteri del confronto non si applicano direttamente. Ma $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$ e $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge: l'integrale converge assolutamente, quindi converge.

4.4 Criterio integrale per le serie

Teorema 4.9: del criterio integrale

Sia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua, non negativa e non crescente. Allora la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ sono entrambi convergenti o entrambi divergenti. Inoltre, per ogni $n \ge 2$,

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \le \int_1^n f(x)\,dx \le \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

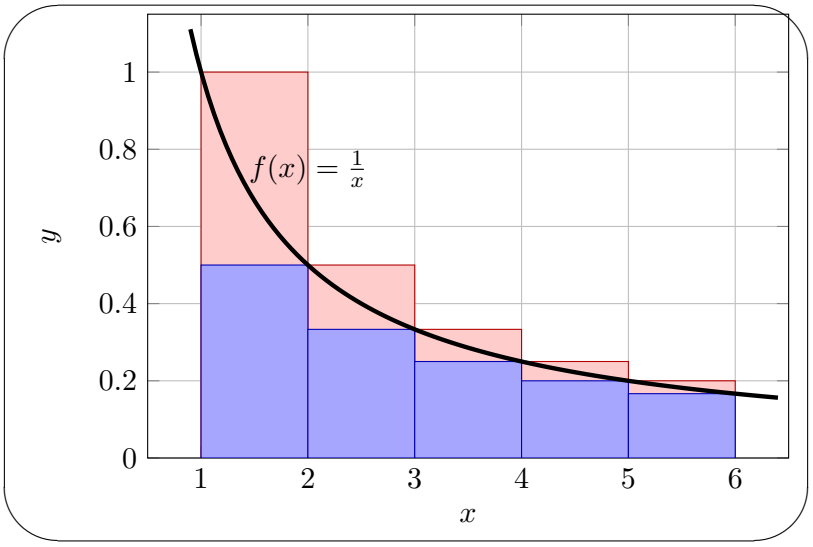
Dimostrazione. Per $x \in [k, k+1]$, essendo f non crescente, $f(k+1) \le f(x) \le f(k)$. Per il Corollario delle stime dell'integrale

$$f(k+1) \le \int_k^{k+1} f(x)\,dx \le f(k)$$

Sommando per $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ e usando l'additività si ottengono le disuguaglianze dell'enunciato.

- Se l'integrale converge, le somme parziali $\sum_{k=1}^{n} f(k) \le f(1) + \int_1^{+\infty} f$ sono limitate: la serie, a termini non negativi, converge.
- Se la serie converge, $\int_1^n f \le \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ per ogni n; poiché $\omega \mapsto \int_1^\omega f$ è non decrescente, è limitata e l'integrale converge per l'Osservazione sulle funzioni non negative.

□



- Nella figura, con $f(x) = \frac{1}{x}$: i rettangoli blu (altezze $f(2), f(3), \dots$) stanno sotto il grafico, quelli rossi (altezze $f(1), f(2), \dots$) sopra. La serie e l'integrale differiscono al più per il primo termine.
- Il criterio si applica anche partendo da un intero k_0 diverso da 1: si confrontano $\sum_{k=k_0}^{\infty} f(k)$ e $\int_{k_0}^{+\infty} f$.

Esempio 4.7: serie e integrali

- **Serie armonica generalizzata.** Per $p > 0$ la funzione $\frac{1}{x^p}$ è positiva e decrescente: per il Teorema dell'integrale improprio notevole all'infinito, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ converge se e solo se $p > 1$ (per $p \le 0$ il termine generale non tende a 0). Ritroviamo il carattere della serie armonica generalizzata.
- $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log k}$ diverge: con $t = \log x$, $\int_2^{\omega} \frac{dx}{x \log x} = \log(\log \omega) - \log(\log 2) \to +\infty$.
- $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log^2 k}$ converge: $\int_2^{\omega} \frac{dx}{x \log^2 x} = \frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log \omega} \to \frac{1}{\log 2}$.

Esempio 4.8: quanto cresce la serie armonica

Con $f(x) = \frac{1}{x}$ le disuguaglianze del Teorema del criterio integrale danno, per $n \ge 2$,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \le \log n \quad \text{e} \quad \log(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

cioè

$$\log(n+1) \le 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \le 1 + \log n$$

Le somme parziali della serie armonica crescono come $\log n$: per superare 10 servono più di 8000 termini, perché $1 + \log n < 10$ finché $n < e^9 \approx 8103$.

4.5 In sintesi

In sintesi

- Un integrale improprio è un limite di integrali di Riemann: $\int_a^{+\infty} f = \lim_{\omega\to+\infty} \int_a^{\omega} f$, $\int_a^b f = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f$ se f è illimitata vicino ad a. Con più punti critici si spezza l'intervallo.
- $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ converge se e solo se $p > 1$; $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ converge se e solo se $p < 1$.
- Per funzioni non negative l'integrale converge o diverge a $+\infty$; valgono il criterio del confronto e quello del confronto asintotico (con $f \sim g$ stesso carattere).
- Se $\int |f|$ converge, converge anche $\int f$ (convergenza assoluta).
- Per f non negativa e non crescente, $\sum f(k)$ e $\int_1^{+\infty} f$ hanno lo stesso carattere (criterio integrale).